УДК 519.67:519.853.64

Р.В. Бурда, студ.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

РОЗРАХУНОК ПОЛЯ МЕТОДОМ РІТЦА З ВИКОРИСТАННЯМ R-ФУНКЦІЙ

(Представлено к.ф.-м.н., доц. С.І. Яремчук)

Розглянуто застосування варіаційного методу Рітца щодо розв'язання крайових задач з використанням структурного методу на основі R-функцій. Метод реалізовано для задач еліптичного типу з дискретними джерелами фізичного поля.

Вступ

Багато прикладних задач, що пов'язані з коливальними, температурними та іншими процесами, зводяться до диференційних рівнянь як в звичайних, так і в часткових похідних. Прикладом таких задач може бути розподіл температури на пластинці, визначення закону коливання струни тощо. Вони є доволі трудомісткими щодо обчислень. В більшості випадків одержати розв'язок в аналітичному вигляді неможливо, тому виникає необхідність використання чисельних методів. Через це реальні розв'язки можна отримати з допомогою обчислювальної техніки.

При розв'язанні таких задач, виникають наступні проблеми:

– *Швидкодія обчислень.*

Оскільки досить часто функція розподілу фізичної величини неодноразово обчислюється в деякій головній програмі, то коли на розв'язання диференційного рівняння витрачається декілька секунд, то на роботу всієї програми – декілька годин.

– *Точність.*

Зменшуючи час розв'язання задачі, отримуємо зменшення точності розрахунків.

Отже, розробити незалежний модуль, що забезпечив би максимальну швидкодію при заданій точності розрахунків досить важливо. Також важливо отримати функцію (тобто розв'язок диференційного рівняння) в аналітичному вигляді. Це полегшить відшукання часткових похідних, які використовуються в задачах оптимізації.

Постановка задачі

Розглянемо диференційне рівняння виду:

$$Au = f\,, \tag{1}$$

де u – шукана функція, A – диференційний оператор, наприклад, оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, f - відома функція. Нехай також визначені початкові (крайові) умови для u. Оскільки в загальному випадку вона є функцією декількох змінних, то крайові умови задаються на границі деякої області Ω. В одновимірному випадку – це дві точки на координатній прямій. В двохвимірному – замкнена крива.

Розрізняють наступні типи крайових умов [1]:

1. *Умова Діріхле* (перша крайова задача):

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y, z)\,, \tag{2}$$

де $\varphi(x, y, z)$ – задана функція.

2. *Умова Неймана* (друга крайова задача):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \psi(x, y, z), \tag{3}$$

де ν – зовнішня нормаль в деякій точці (x, y, z) границі області Ω. Зокрема, при $\psi(x, y, z) \equiv 0$ отримуємо так звану "умову теплоізоляції".

3. *Умова з "косою" похідною* (третя крайова задача):

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right)\right|_{\partial\Omega} = r(x, y, z), \tag{4}$$

де h – деяка стала.

Отже, задачу можна представити наступним чином: при заданій крайовій умові (2–4) знайти таку функцію u, що задовольняла б диференційне рівняння (1).

Метод Рітца

Розроблено багато різних методів розв'язання крайових задач. Одним з них є метод Рітца [2]. Полягає він у наступному.

Нехай маємо деяку повну систему лінійно незалежних функцій:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots \tag{5}$$

Виберемо ціле число n і будемо шукати апроксимацію u_n елемента u_0 – точного розв'язку задачі, у вигляді:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \ , \tag{6}$$

де φ_k – елементи базису (5), a_k – поки що невідомі коефіцієнти, які можна знайти з системи (7), попередньо порахувавши коефіцієнти біля них.

$$\begin{cases} a_1(\varphi_1, \varphi_1)_A + a_2(\varphi_1, \varphi_2)_A + \ldots + a_n(\varphi_1, \varphi_n)_A = (f, \varphi_1) \\ a_1(\varphi_2, \varphi_1)_A + a_2(\varphi_2, \varphi_2)_A + \ldots + a_n(\varphi_2, \varphi_n)_A = (f, \varphi_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1(\varphi_n, \varphi_1)_A + a_2(\varphi_n, \varphi_2)_A + \ldots + a_n(\varphi_n, \varphi_n)_A = (f, \varphi_n) \end{cases}, \tag{7}$$

де $(u, \upsilon)_A = (Au, \upsilon) = (A\upsilon, u)$ [2].

Маючи базис (5) та знайшовши $\{a\}$, отримуємо апроксимацію u_n елемента u_0.

Побудова повного базису. Структурний метод. Метод R-функцій

Очевидно, що апроксимаційний багаточлен потрібно обирати таким чином, щоб він задовольняв крайові умови конкретної задачі, тобто належав області визначення диференційного оператора.

Є різні підходи побудови повного базису. Найбільш загальним є структурний метод, розроблений В.Л. Рвачовим [3].

Розглянемо побудову так званої структури розв'язку на прикладі першої крайової задачі. Оскільки функція u на границі області Ω повинна приймати значення $\varphi(x, y, z)$, де φ – деяка задана функція, то виберемо апроксимаційний многочлен наступним чином:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i g(x, y, z) X_i(x, y, z) + \varphi(x, y, z), \tag{8}$$

де a_i – невідомі коефіцієнти, $\{X_i(x, y, z) \mid i = 1 \ldots n\}$ – система лінійно-незалежних функцій. Наприклад, в одновимірному випадку $X_{i-1} = x^i, i = 0, \ldots, n-1$. $g(x, y, z)$ – так звана R-функція, що має наступні властивості:

$$\begin{aligned} & g(x, y, z)|_{\partial\Omega} = 0\ ; \\ & g(x, y, z) > 0\ , \text{ коли } (x, y, z) \in \Omega\ ; \\ & g(x, y, z) < 0\ , \text{ коли } (x, y, z) \notin \Omega \bigcup \partial\Omega\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, що R-функція залежить від форми області Ω.

Апарат R-функцій дозволяє побудувати рівняння області, що диференціюється необхідну кількість разів. Цей апарат також розроблено В.Л. Рвачовим.

Реалізація методу

Є деяка замкнена область Ω з джерелами фізичного поля в ній (рис. 1).

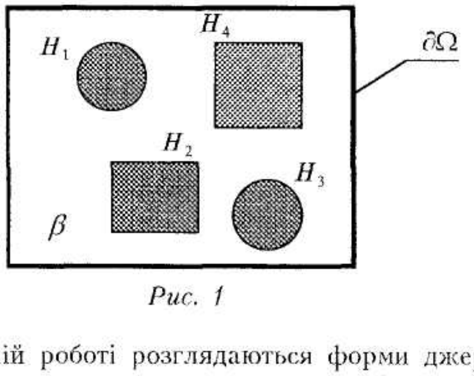

Рис. 1

При реалізації методу в даній роботі розглядаються форми джерел і області, що задані прямокутниками та кругами.

Нехай фізичні процеси задаються наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \beta^2 u = -f\,, \\ &u\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \end{aligned} \tag{10}$$

де $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,\quad f = \begin{cases} A_i, (x,y) \in H_i \\ 0, (x,y) \notin \bigcup\limits_i H_i \end{cases}.$$

Можна показати, що оператор Лапласа є додатнім, тобто дану задачу можна розв'язувати методом Рітца.

Будемо апроксимувати точний розв'язок задачі елементом [3],

$$u_n = \sum_{\substack{i+j=0 \\ i\geq 0 \\ j\geq 0}}^{n} a_{q(i,j)} g(x,y) X_i(x) Y_j(y), \tag{11}$$

де $q(i,j)$ – деяка функція. Маючи її значення, можна знайти i та j, причому, така пара буде лише однією;. $g(x,y)$ – R-функція області. Залежно від форми області вона визначена наступним чином:

$g(x,y) = R^2 - x^2 - y^2$ – коло з радіусом R і центром на початку координат;

$g(x,y) = a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^2 + \left(b^2 - y^2\right)^2}$ – прямокутник з центром на початку координат зі сторонами $2a$ і $2b$.

Виберемо базисні функції наступним чином:

$$\begin{aligned} X_i(x) &= \cos\frac{i\pi(x - x_0)}{a} \\ Y_j(y) &= \cos\frac{j\pi(y - y_0)}{b} \end{aligned} \tag{12}$$

де (x_0, y_0) – центр симетрії області, a, b – деякі коефіцієнти, які необхідні для того, щоб функції $X_i(x)$ та $Y_j(y)$ не "нав'язували" елементу u_n нульового значення в точці, що належить області. У випадку кола – $a = b = R$, у випадку прямокутника – a та b дорівнюють половині сторони прямокутника по осі абсцис та ординат відповідно.

Знайдемо скалярні добутки в системі (7).

В нашому випадку: $\varphi_{q(i,j)}(x,y) = g(x,y) X_i(x) Y_j(y)$, тоді:

$$\left(\varphi_{q(i,j)}, \varphi_{q(k,s)}\right)_A = \left(A\varphi_{q(i,j)}, \varphi_{q(k,s)}\right) = \left(-\frac{\partial^2 \varphi_{q(i,j)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{q(i,j)}}{\partial y^2} + \beta^2 \varphi_{q(i,j)}, \varphi_{q(k,s)}\right) =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{\partial^2 \varphi_{q(i,j)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{q(i,j)}}{\partial y^2} + \beta^2 \varphi_{q(i,j)}\right) \varphi_{q(k,s)} d\Omega$$

$$\left(-f, \varphi_{q(i,j)}\right) = -\iint\limits_{\Omega} f \varphi_{q(i,j)} d\Omega.$$

Як бачимо, дані інтеграли не виражаються в елементарних функціях, тому необхідно застосовувати чисельні методи. Інтегрування "за визначенням" не є доцільним, оскільки цей метод дає низьку точність. Найкраще використовувати кубатурну формулу Сімпсона [4]:

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y) d\Omega = \frac{h_x h_y}{9} \sum_{i=0}^{z_n} \sum_{j=0}^{z_m} \lambda_{ij} P(x_i, y_j) \tag{13}$$

Тут h_x, h_y – кроки сітки по осі абсцис та ординат відповідно, $[\lambda_{ij}]$ – матриця вагових коефіцієнтів, що визначена наступним чином:

$$[\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & \ldots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \ldots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & \ldots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \ldots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \ldots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & \ldots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \ldots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & \ldots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Будуючи матрицю, необхідно пам'ятати, що сітка розбиття повинна бути квадратною. Розмірність її є число непарне, не менше 3. При наявності першого рядка та першого стовпчика, всі інші елементи знаходяться як добутки елемента першого рядка на елемент першого стовпчика, індекси яких відповідають шуканому елемента.

Перевагою формули Сімпсона є висока швидкодія та точність. Недоліком є те, що за її допомогою можна взяти інтеграл лише по прямокутнику. А це значно обмежує простір геометричних форм.

Проблема вирішується досить просто, коли необхідно взяти інтеграл по кругу.

Нехай маємо коло з радіусом R та центром у точці (x_0, y_0). Зробимо заміну системи координат наступним чином:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}, \tag{15}$$

тоді:

$$\int\limits_{x_0-R}^{x_0+R} dx \int\limits_{y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}} P(x,y)dy = \int\limits_{x_0-R}^{x_0+R} dx' \int\limits_{y_0-\sqrt{R^2-x'^2}}^{y_0+\sqrt{R^2-x'^2}} P(x'+x_0, y'+y_0)dy'. \tag{16}$$

Перейдемо від декартової до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x' = \rho\cos\varphi \\ y' = \rho\sin\varphi \end{cases}, \tag{17}$$

тоді:

$$\int\limits_{x_0-R}^{x_0+R} dx \int\limits_{y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}} P(x,y)dy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \rho P(\rho\cos\varphi + x_0, \rho\sin\varphi + y_0)d\rho. \tag{18}$$

За допомогою (18) можна знайти інтеграл по кругу за допомогою формули Сімпсона.

Варто звернути увагу на те, що матриця коефіцієнтів в лівій частині системи (7) симетрична. Це зменшує об'єм розрахунків.

В задачах оптимізації виникає необхідність перераховувати поле неодноразово. При цьому змінюються лише положення джерел. Оскільки матриця коефіцієнтів в лівій частині системи (7) не залежить від джерел, тому необхідності перераховувати її кожного разу немає. Перераховується лише права частина системи. Це дає значний виграш в часі.

Характеристика методу. Отримані результати.

Відповідно вищевикладеному матеріалу було розроблено програму розрахунку поля методом Рітца, а також отримано розв'язок крайової задачі в аналітичному вигляді, що полегшує відшукання частинних похідних.

Проведемо порівняння методу Рітца з іншими методами розрахунку поля.

Порівнюючи метод Рітца з методом розділення змінних, отримали:

1) метод Рітца працює швидше, ніж метод розділення змінних, але дає значно меншу точність. Останнє пояснюється тим, що в методі Рітца ведеться дуже багато наближених підрахунків. Насамперед, це – скінченна кількість членів ряду (6), а також наближене диференціювання та чисельне взяття інтегралів. На точність методу значною мірою впливає вигляд базисних функцій (5). У реалізації методу базисні функції належать до класу симетричних функцій відносно ліній, що проходять через центр джерела паралельно осям абсцис і ординат. Тому і результат буде функцією з аналогічною симетрією. Оскільки в загальному випадку f не симетрична, то виникає значна похибка. У випадку симетричної задачі метод дає значно кращі результати;
2) метод Рітца може працювати з довільною формою як джерел, так і області. Єдиним обмеженням є складність обчислення інтегралів у випадку складної форми об'єкта. Метод розділення змінних може рахувати лише для прямокутних форм.

Порівнюючи метод Рітца з методом скінчених різниць, отримали наступне.

Для відшукання частинних похідних виникає необхідність рахувати поле декілька разів при різному положенні джерел. Метод скінченних різниць перераховуватиме поле, використовуючи кожного разу всю множину дій, що є в даному методі. Метод Рітца використовує всю множину дій лише під час першого розрахунку, а під час наступних – лише частину. Останнє дає превагу у часі.

Нижче наводяться результати роботи програми.

Вхідні дані (табл. 1):

Таблиця 1

Характеристики			
області	джерела №1	джерела №2	джерела №3
форма – прямокутник	форма – прямокутник	форма – прямокутник	форма – коло
координата лівого нижнього кута – $x = 0$ $y = 0$	координата лівого нижнього кута – $x = 0{,}1$ $y = 0{,}1$	координата лівого нижнього кута – $x = 0{,}6$ $y = 0{,}4$	координата центру – $x = 0{,}3$ $y = 0{,}7$
координата верхнього правого кута – $x = 1$ $y = 1$	координата верхнього правого кута – $x = 0{,}4$ $y = 0{,}4$	координата верхнього правого кута – $x = 0{,}9$ $y = 0{,}9$	радіус – 0,2
коефіцієнт затухання $\beta = 3$	інтенсивність джерела – 30	інтенсивність джерела – 120	інтенсивність джерела – 100

Розрахунки проводились при $n = 15$.

Отримана наступна таблиця коефіцієнтів (табл. 2):

Таблиця 2

q_{ij}	1	2	3	4	5	6	7
4	0	1	0	2	1	0	3
j	0	0	1	0	1	2	0
a_{ij}	11,519	-1,9646	-3,8335	-1,96177	-0,625	-1,0516	-0,2895

8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	4	3	2	1	0
1	2	3	0	1	2	3	4
0,107	-0,135	-0,44721	-0,24627	0,0247	-0,0906	-0,1113	-0,1397

Поле обраховується за формулою (11), де як $g(x, y)$ взято R-функцію по прямокутнику, причому $x_0 = y_0 = a = b = 0{,}5$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Тихонов А. Н.*, Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1997. – 736с.
2. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 589с.
3. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 521с.
4. *Убийконь В.* Вычисление кратных интегралов. – Радиолюбитель. Ваш компьютер, 1997. – № 11. – 36с.

БУРДА Роман Вадимович – студент 3 курсу факультету інформаційно-комп'ютерних технологій Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- задачі оптимізації;
- теорія штучного інтелекту;
- мова програмування C++.

E-mail: burda_r@mail.ru

ak13_bur@usr.ziet.zhitomir.ua