

ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 621.7:658.52

В.А. Андрійчук, к.ф.-м.н., доц.
В.І. Великий, інж.

Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХОМОЇ ОПРОМІНЮВАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ

Розроблена математична модель рухомої опромінювальної установки з коловими рухами опромінювача у горизонтальній та вертикальній площинах. Отримано аналітичні вирази для часових залежностей узагальнених координат, швидкостей і прискорень окремих ланок установки для заданої траєкторії руху пучка променів.

Вступ

Сучасний стан оптичних технологій, світлове оформлення видовищних споруд для проведення культурно-масових заходів, охоронне освітлення тощо вимагають розробки рухомих світлових приладів, які б в необхідний момент часу освітлювали певну ділянку простору та здійснювали переміщення направленої світлового потоку за заданою траєкторією [1–5]. В зв'язку з цим виникає потреба у створенні математичної моделі рухомої світлотехнічної установки, що дозволило б аналітично описати роботу її структурних частин, а також встановити математичний зв'язок між координатами вибраної ділянки світлового поля та положенням рухомих вузлів установки.

1. Теоретична частина

Моделювання рухомої опромінювальної установки (ОУ), в першу чергу, зводиться до розробки математичної моделі її опорно-поворотного пристрою (ОПП).

При моделюванні ОПП виходили з того, що його ланки, з усіма закріпленими на них елементами, є твердими тілами, а пристрій в цілому утворює механічну систему, для якої справедливі основні закони механіки твердого тіла. Тоді кінематичні співвідношення, що визначають положення, швидкість і прискорення ланок ОПП без врахування дії сил керування та їх моментів, можна отримати розглядаючи рух кожної ланки як рух окремого твердого тіла з врахуванням зв'язків між ланками.

Кінематичний ланцюг поворотного пристрою складається з трьох ланок. Нульова ланка є нерухомою основою ОПП, відносно якої здійснюється відлік переміщення та орієнтація ОУ в просторі. Дві сусідні ланки утворюють між собою кінематичні пари обертового типу, в яких відносно переміщення заданої точки визначається кутом повороту однієї ланки відносно іншої. Даний поворотний пристрій задає два ступені вільності ОУ – в екваторіальній та меридіональній площинах.

На рис. 1 наведена геометрична модель рухомої опромінюючої установки. В даній моделі, як узагальнені координати, що повністю визначають просторову орієнтацію ОУ, використано кути відносних поворотів ланок q_1 , q_2 . Це зумовлено тим, що вони співпадають з кутами повороту опромінювача у відповідних площинах і знаходяться в певному масштабі з кутами повороту валів двигунів системи керування.

Вибір систем координат. Для розгляду просторового руху ОУ здійснено спеціальний вибір систем координат ланок ОПП, що дозволило звести до мінімуму кількість параметрів при переході від однієї системи до іншої (при довільному виборі систем координат кількість параметрів дорівнюватиме шістьом) [4–6].

Побудова систем координат, зв'язаних з відповідними ланками ОПП ОУ, проводилась в такій послідовності:

1. Кожній ланці поворотного пристрою присвоювався свій номер: 0, 1, 2.

2. З нерухомою основою (ланка 0) зв'язувалась система координат $0_0X_0Y_0Z_0$, відносно якої розглядалась опромінююча установка в цілому. Початок її розміщувався на осі кінематичної пари ланок (0,1). Вісь 0_0Z_0 направлялась вздовж осі пари, а вісь 0_0X_0 – довільно. Тоді вісь 0_0Y_0 доповнювала осі 0_0X_0 і 0_0Z_0 до правої трійки векторів.

3. Система координат $O_1X_1Y_1Z_1$ зв'язувалась з ланкою 1. Початок її – O_1 – розміщувався в точці перетину осей O_0Z_0 і O_1Z_1 . Вісь O_1Z_1 спрямовувалась по осі кінематичної пари (1, 2), а вісь O_1X_1 – по спільному перпендикуляру до осей O_0Z_0 і O_1Z_1 . O_1Y_1 доповнювала систему осей до правої трійки векторів.

4. З ланкою 2 зв'язувалась система координат $O_2X_2Y_2Z_2$. Початок координат O_2 суміщався з випромінюючим тілом джерела. Вісь O_2Z_2 спрямовувалась в напрямку оптичної осі опромінювача, а вісь O_2X_2 – по спільному перпендикуляру до осей O_1Z_1 і O_2Z_2 . Тоді вісь O_2Y_2 доповнювала осі O_2X_2 і O_2Z_2 до правої трійки векторів.

5. Точка M , в яку направляється пучок променів від опромінювача, розміщувалась на осі O_2Z_2 та її положення в системі координат $O_2X_2Y_2Z_2$ задавалось вектором $r_2^M(0, 0, Z_2^M)$.

Взаємне розташування систем координат, в загальному випадку, залежить від шести параметрів, один з яких є узагальненою координатою (q_1 або q_2), а інші – конструктивними сталими.

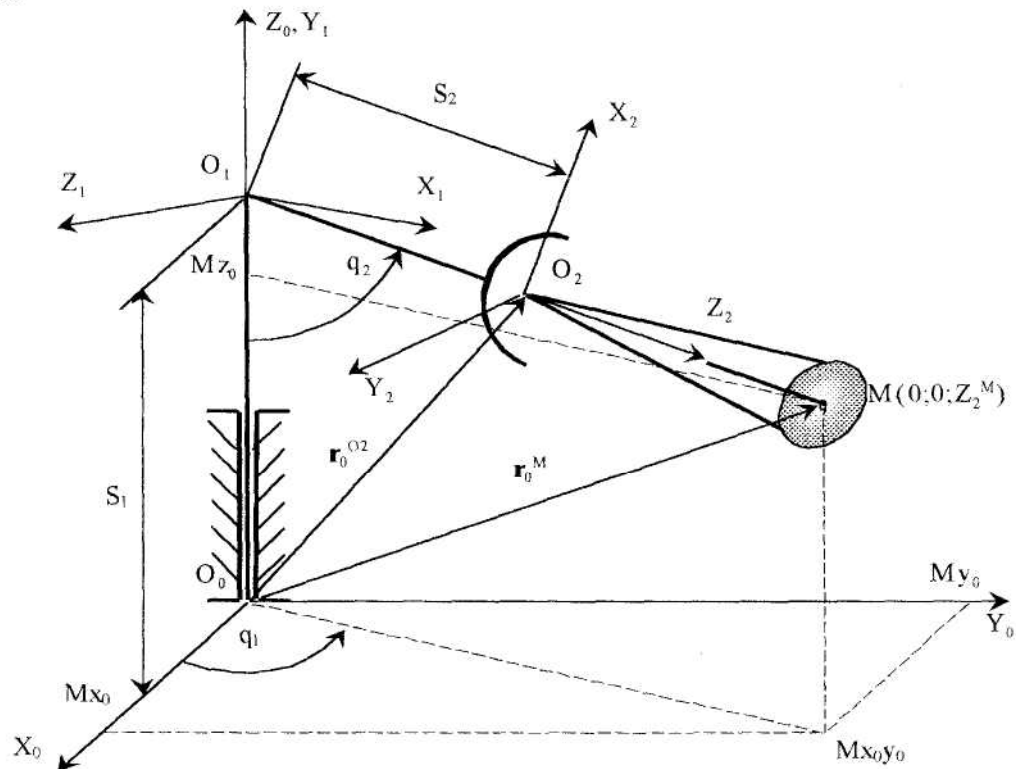


Рис. 1. Геометрична модель рухомої опромінювальної установки

Пряма та обернена задачі про положення рухомої ОУ. Як відомо, існують пряма та обернена задачі кінематики [6]. Пряма задача, в даному випадку, полягає у визначенні за заданими узагальненими координатами розташування та орієнтації в просторі вибраної ланки або точка M в системі $O_0X_0Y_0Z_0$. Необхідність вирішення прямої задачі виникає у зв'язку з неможливістю визначення положення ОУ шляхом безпосереднього вимірювання, тоді як поточні значення узагальнених координат q_1, q_2 вимірюються досить просто за допомогою відповідних датчиків.

Для визначення положення, швидкості та прискорення опромінювача необхідно знати ці величини для всіх ланок поворотного пристрою. Відносно положення ланок в парах визначає їх положення в просторі. Пов'язавши з вибраною ланкою i -ту систему координат $O_iX_iY_iZ_i$, можна звести визначення взаємного положення ланок до задачі перетворення однієї системи в іншу. Таке перетворення можна виконати за формулою:

$$r_0^M = \alpha \cdot r_2^M + r_0^{O_2}, \tag{1}$$

де r_0^M, r_2^M – радіус-вектори точки M в системах координат $O_0X_0Y_0Z_0$ та $O_2X_2Y_2Z_2$, відповідно;

α – матриця направляючих косинусів системи координат $O_2X_2Y_2Z_2$ відносно системи $O_0X_0Y_0Z_0$;

$r_0^{O_2}$ – радіус-вектор точки O_2 в системі $O_0X_0Y_0Z_0$.

Дане перетворення в трьохмірному просторі зручно описувати за допомогою спеціальних матриць 4×4 [7], введення яких тісно пов'язане з поняттям однорідних координат проективного простору x_1, x_2, x_3, x_4 , що одночасно не дорівнюють нулю і пов'язані з координатами x, y, z такими рівняннями:

$$x_1 = x/x_4 \quad x_2 = y/x_4; \quad x_3 = z/x_4; \quad x_4 \neq 0.$$

Якщо $x_4 = 1$, то $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, а однорідні координати довільного вектора запишуться як $R(x, y, z, 1)$. В однорідних координатах рівняння (1) матиме вигляд:

$$R_0^M = A \cdot R_2^M, \tag{2}$$

де R_0^M та R_2^M – радіус-вектори точки M , що записані за допомогою однорідних координат в системах $O_0X_0Y_0Z_0$ та $O_2X_2Y_2Z_2$, відповідно;

A – матриця переходу від $O_2X_2Y_2Z_2$ до $O_0X_0Y_0Z_0$, розміром 4×4 .

Перехід від $O_2X_2Y_2Z_2$ до $O_0X_0Y_0Z_0$ здійсимо шляхом повороту і переносу системи координат $O_0X_0Y_0Z_0$ відносно осей O_0X_0, O_0Y_0, O_0Z_0 до суміщення її з системою $O_2X_2Y_2Z_2$. Оскільки такі перетворення є ортогональними, то можна записати:

$$R_2^M = A^{-1} \cdot R_0^M, \tag{3}$$

де A^{-1} – матриця, обернена до A .

Таким чином вирішення прямої задачі кінематики в запропонованій математичній моделі проводиться за таким алгоритмом:

- а) задаються значення узагальнених координат q_1, q_2 ;
- б) обчислюється значення елементів матриці A ;
- в) визначається просторова конфігурація ОПП ОУ.

Матрицю A в даному випадку можна представити у вигляді добутку матриць:

$$A = T_1 \cdot T_2,$$

де T_1, T_2 – матриці переходу від систем координат $O_1X_1Y_1Z_1$ до $O_0X_0Y_0Z_0$ та від $O_2X_2Y_2Z_2$ до $O_1X_1Y_1Z_1$, відповідно.

Запишемо матрицю T_1 . Для цього:

- а) повернемо систему $O_0X_0Y_0Z_0$ навколо O_0Z_0 на кут $\theta_1 = q_1$, що дозволить досягти паралельності між O_0X_0 і O_1X_1 (рис. 1);
- б) перенесемо систему $O_0X_0Y_0Z_0$ вздовж O_0Z_0 на S_1 до співпадання точок O_0 і O_1 ;
- в) повернемо систему $O_0X_0Y_0Z_0$ на кут $\alpha_1 = 90^\circ$ навколо O_1X_1 до суміщення всіх осей.

Отже, матриця T_1 запишеться як добуток трьох матриць:

$$T_1 = T_{\theta_1} \cdot T_{S_1} \cdot T_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Щоб записати вираз для матриці T_2 , зробимо аналогічно. Для цього:

- а) повернемо $O_1X_1Y_1Z_1$ навколо O_1Z_1 на кут $\theta_2 = q_2$ до досягнення паралельності між осями O_1X_1 і O_2X_2 ;
- б) перенесемо $O_1X_1Y_1Z_1$ вздовж O_1Y_1 на $(-S_2)$ до співпадання точок O_1 і O_2 ;
- в) повернемо $O_1X_1Y_1Z_1$ навколо O_2X_2 на кут $\alpha_2 = 90^\circ$ до повного суміщення обох систем.

В результаті матриця T_2 матиме вигляд:

$$T_2 = T_{\theta_2} \cdot T_{S_2} \cdot T_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & S_2 \sin q_2 \\ \sin q_2 & 0 & \cos q_2 & -S_2 \cos q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Остаточно матриця переходу від $O_2X_2Y_2Z_2$ до $O_0X_0Y_0Z_0$ запишеться як:

$$A = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cdot \cos q_2 & \sin q_1 & \cos q_1 \cdot \sin q_2 & S_2 \cos q_1 \cdot \sin q_2 \\ \sin q_1 \cdot \cos q_2 & -\cos q_1 & \sin q_1 \cdot \sin q_2 & S_2 \sin q_1 \cdot \sin q_2 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & S_1 - S_2 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Отже, згідно з (2), координати точки М в системі $0_0X_0Y_0Z_0$:

$$\begin{aligned} x_o^M &= (z_2^M + S_2) \cos q_1 \cdot \sin q_2; \\ y_o^M &= (z_2^M + S_2) \sin q_1 \cdot \sin q_2; \\ z_o^M &= S_1 - (z_2^M + S_2) \cos q_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Якщо необхідно визначити радіус-вектор будь-якої точки проміжної ланки в системі координат $O_0X_0Y_0Z_0$, то слід користуватись формулами:

$$\begin{aligned} R_o &= A_i \cdot R_i, \\ A_i &= T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_i. \end{aligned}$$

Аналогічно можна визначити положення та орієнтацію деякої ланки l у відношенні до ланки i :

$$\begin{aligned} R_l &= A_{i,l} \cdot R_l, \\ A_{i,l} &= T_{i+1} \cdot T_{i+2} \cdot \dots \cdot T_l. \end{aligned}$$

Обернена задача кінематики передбачає знаходження узагальнених координат ОПШ за заданим положенням та орієнтацією його ланок або за координатами точки М, в яку направляється пучок променів від ОУ, заданих в системі $O_0X_0Y_0Z_0$ [7, 8]. Для цього розв'яжемо систему рівнянь (7) відносно q_1 і q_2 . З першого і другого рівнянь отримуємо:

$$q_1 = \arctg \frac{y_o^M}{x_o^M} + \pi N \quad (8)$$

Виразивши $z_2^M + S_2$ з першого рівняння і підставивши в третє, отримуємо:

$$q_2 = \arctg \frac{x_o^M}{(S_1 - z_o^M) \cos q_1} + \pi N \quad (9)$$

Для усунення неоднозначності у визначенні кутів q_1, q_2 проведемо додаткові дослідження (8) і (9).

$$\begin{aligned} \text{при } x > 0, y > 0 & \quad q_1 = \arctg \frac{y_o^M}{x_o^M}; \\ \text{при } x < 0 & \quad q_1 = \arctg \frac{y_o^M}{x_o^M} + \pi; \\ \text{при } x > 0, y < 0 & \quad q_1 = \arctg \frac{y_o^M}{x_o^M} + 2\pi; \\ \text{при } S_1 > z_o^M & \quad q_2 = \arctg \frac{x_o^M}{(S_1 - z_o^M) \cos q_1}; \\ \text{при } S_1 < z_o^M & \quad q_2 = \arctg \frac{x_o^M}{(S_1 - z_o^M) \cos q_1} + \pi. \end{aligned}$$

Кутові швидкості та прискорення ланок ОПШ ОУ. Для знаходження узагальнених швидкостей окремих ланок та опромінювача рухомої ОУ продиференціюємо вираз (8) за часом:

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{y}_o^M \cdot x_o^M - y_o^M \cdot \dot{x}_o^M}{(x_o^M)^2} \cdot \cos^2 q_1 \quad (10)$$

Зробимо це і з виразом (9):

$$\dot{q}_2 = \left(\frac{\dot{x}_o^M}{x_o^M} + \frac{\dot{z}_o^M}{S_1 - z_o^M} + \dot{q}_1 \cdot \operatorname{tg} q_1 \right) \cdot \frac{\sin 2q_2}{2} \quad (11)$$

Для знаходження аналітичних виразів для кутових прискорень цих елементів ОУ продиференціюємо за часом вирази (10) і (11):

$$\ddot{q}_1 = \left(\frac{\ddot{y}_0^M \cdot x_0^M - \ddot{x}_0^M \cdot y_0^M - 2 \cdot \dot{y}_0^M \cdot \dot{x}_0^M}{(x_0^M)^2} + \frac{2 \cdot y_0^M \cdot (\dot{x}_0^M)^2}{(x_0^M)^3} \right) \cos^2 q_1 - 2 \cdot (\dot{q}_1)^2 \cdot \operatorname{tg} q_1; \quad (12)$$

$$\ddot{q}_2 = \left(\frac{\ddot{x}_0^M \cdot x_0^M - (\dot{x}_0^M)^2}{(x_0^M)^2} + \frac{\ddot{z}_0^M (S_1 - z_0^M) + (\dot{z}_0^M)^2}{(S_1 - z_0^M)^2} + \dot{q}_1 \cdot \operatorname{tg} q_1 + \frac{(\dot{q}_1)^2}{\cos^2 q_1} \right) \times \frac{\sin 2q_2}{2} + 2(\dot{q}_2)^2 \operatorname{ctg} 2q_2. \quad (13)$$

2. Результати розрахунку

Як приклад розглянемо ОУ, опромінювач якої складається з відбивача світильника ЖСП-04 та лампи ДНаТ-400 з круглосиметричним світловим розподілом, що виконує одночасно колові та коливні рухи у горизонтальній та вертикальній площинах відповідно. Застосуємо дану математичну модель для визначення законів зміни узагальнених координат, швидкостей і прискорень опромінювача для заданої траєкторії руху точки М, в яку направляється пучок променів від ОУ.

Розрахунок $q(t)$ проводився за складеною програмою за такою схемою:

- задавались параметри опромінюючої площадки у вигляді прямокутника розмірами $lx \times ly$;
- задавалась траєкторія руху точки М (в даному випадку вона задана у вигляді спіралі, яка розкручується до певної межі):

$$\begin{cases} x_o^M = (a\omega t + x_o) \cdot \cos \omega t; \\ y_o^M = (a\omega t + y_o) \cdot \sin \omega t; \\ z_o^M = 0; \\ t \in [0; t_1] \end{cases}$$

- за формулами (8), (9) знаходились часові залежності узагальнених координат $q_1(t)$, $q_2(t)$;
- за формулами (10)–(13) визначались кутові швидкості і прискорення опромінювача.

Для поданих нижче результатів розрахунку брали: $S_1 = 3$ м; $S_2 = 0$ м; $x_o = y_o = 0$ м; $t_1 = 100$ с; $f = 0,1$ Гц; $a = 1/2\pi$ м.; $lx = 20$ м.; $ly = 20$ м.

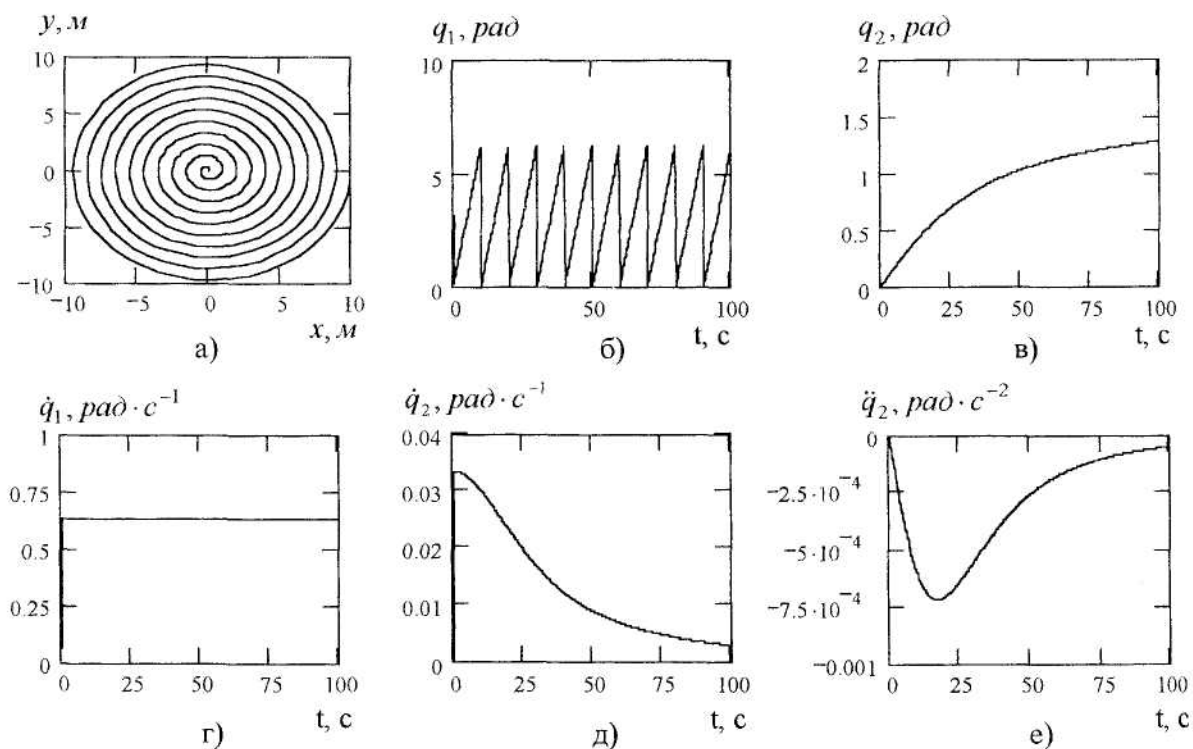


Рис. 2. Траєкторія руху точки М (а) та часові залежності узагальнених координат (б, в), узагальнених швидкостей і прискорень (г, д, е) рухомої ОУ

Висновки

1. Розроблена математична модель рухомої опромінюючої установки з коловими рухами опромінювача у горизонтальній та вертикальній площинах.
2. Отримано аналітичні вирази часових залежностей узагальнених координат, швидкостей і прискорень окремих лапок ОПШ ОУ для заданої траєкторії руху пучка променів.
3. Розроблено програмне забезпечення та наведено приклад розрахунку кінематичних параметрів рухомої ОУ з круглосиметричним опромінювачем ЖСП-04 і лампою ДНаТ-400.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Справочная книга по светотехнике / Под. ред. Ю.Б. Айзенберга. – М.: Энергоатомиздат, 1995. – 528 с.
2. *Андрійчук В.А., Костик Л.М., Лазарюк В.В.* Установка для переривчастого опромінення рослин. Патент України №20056А 5А01G9/28 опублікований 25.12.97. Бюл. № 6.
3. *Андрійчук В.А., Воркун С.В.* Пристрої змінного опромінення рослин. Проблеми економії енергії: Збірник матеріалів III Міжнародної науково-практичної конференції. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", – 2001. – С. 179.
4. *Лебедев А.Н.* Моделирование в научно-технических исследованиях. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
5. *Коршунов Ю.М.* Математические основы кибернетики. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.
6. Механика промышленных роботов: В 3 кн. / Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е.И. Воробьев, С.А. Понов, Г.И. Шевелева. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.
7. Робототехника и гибкие автоматизированные производства. В 9-ти кн. Кн. 3. Управление робототехническими системами и гибкими автоматизированными производствами / Под ред. И.М. Макарова. – М.: Высш. шк., 1986. – 159 с.
8. Робототехника и гибкие автоматизированные производства. В 9-ти кн. Кн. 5. Моделирование робототехнических систем и гибких автоматизированных производств / Под ред. И.М. Макарова. – М.: Высш. шк., 1986. – 175 с.

АНДРІЙЧУК Володимир Андрійович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри "Електротехніка, світлотехніка та електроніка" Тернопільського державного технічного університету ім. Івана Пулюя.

Наукові інтереси:

– змінні світлові поля в оптичних технологіях.

ВЕЛИКИЙ Віктор Іванович – інженер кафедри "Електротехніка, світлотехніка та електроніка" Тернопільського державного технічного університету ім. Івана Пулюя.

Наукові інтереси:

– розробка систем керування світлотехнічними пристроями.