УДК 621.396.96

С.В. Водоп'ян, к.т.н.,
Д.В. П'ясковський, к.т.н., доц.
В.В. Умінський, ад'юнкт
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРА КАЛМАНА НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Розроблено модель фільтра Калмана на основі диференційних перетворень, яка дозволяє підвищити точність та знизити обчислювальну складність процедури калманівської фільтрації.

Проблема оцінки випадкових процесів виникла на початку 40-х рр. у зв'язку із істотним підвищенням технічних вимог, поставлених до точності формування сигналів управління [1].

Розв'язування задачі оцінки виконувалось в класі стаціонарних систем і базувалось, як правило, на частотному підході у відповідності до критерію мінімуму середньоквадратичної похибки або на фундаментальних співвідношеннях теорії інформації при максимізації відношення сигнал/шум [2, 3].

Основоположні методи фільтрації А.Н. Колмогорова для дискретних випадкових послідовностей та Н.Вінера для безперервних випадкових процесів дозволили визначати оптимальний оператор фільтра в класі стаціонарних лінійних систем для стаціонарних і стаціонарно зв'язаних випадкових сигналів. При цьому оптимальний фільтр визначався в результаті розв'язання інтегрального рівняння Вінера–Хопфа в усталеному режимі, а час перехідного процесу роботи динамічної системи не обмежувався додатковими умовами.

Розвиток техніки поставив додаткові точнісні вимоги до пристроїв оцінки різного призначення. Виконання поставлених вимог стало можливим на основі використання нестаціонарних оптимальних фільтрів, що формують оптимальні оцінки стану в будь-який поточний момент часу [4].

Нові досягнення у галузі нестаціонарної фільтрації, отримані Р.Калманом і Р.Б'юсі, дозволяють формувати оцінку $\hat{x}(t)$ за критерієм мінімального середньоквадратичного відхилення від вектора стану $x(t)$. Висока точність оцінки та простота реалізації забезпечили широке застосування нестаціонарних фільтрів з використанням ЦЕОМ в технічних задачах. Зображення фільтрів Калмана–Б'юсі у часовій області змінення аргумента у вигляді звичайних диференціальних (або різницевих) рівнянь істотно розширило область практичного застосування нестаціонарних багатовимірних лінійних фільтрів.

Успіх ідей Калмана–Б'юсі у порівнянні з ідеями вінерівської фільтрації пояснюється такими чинниками [5]:

– відносна простота та доступність для інженерних розробок нестаціонарних фільтрів у різних технічних додатках;

– можливість аналітичного доведення та підтвердження оптимальності фільтрації у різних за складністю варіантах конструктивного виконання фільтрів;

– наочність аналітичного апарату, що базується на звичайних диференціальних (або різницевих) рівняннях, на відміну від вінерівської фільтрації, яка вимагає розв'язання інтегральних рівнянь;

– можливість оцінити стан системи у часовій області на основі статистичних даних про всі джерела та характер похибок;

– можливість побудування фільтрів для багатовимірних динамічних систем на основі гільбертового уявлення простору стану;

– можливість одержання рекурентної системи алгоритмів і рекурсивних процедур оптимальної фільтрації, що набагато зручніше при використанні сучасних ЕОМ.

Аналіз задачі.

Алгоритм оптимальної фільтрації Калмана–Б'юсі задається виразами (1)–(3), тобто [5]:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\left[\mathbf{z}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\right], \ \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}, \tag{1}$$

$$\mathbf{K}(t) = \eta(t)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}^{-1}(t), \tag{2}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\eta(t) + \eta(t)\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(t) - \eta(t)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\eta(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t), \ \eta(t_0) = \eta_{\mathbf{0}}, \tag{3}$$

де $\mathbf{K}(t)$ – матричний коефіцієнт підсилення;

$\mathbf{F}(t)$ – матриця стану;

$\mathbf{H}(t)$ – матриця спостереження;

$\mathbf{R}(t)$ – матриця інтенсивності похибок вимірювання;

$\mathbf{Q}(t)$ – матриця інтенсивності похибок спостереження;

$\eta(t)$ – коваріаційна матриця похибок фільтрації;

$\mathbf{G}(t)$ – матриця управління.

Структурна схема процесу оптимальної фільтрації за формулами (1)–(3) показана на рис. 1. З рисунка видно, що при відомих матрицях $\mathbf{K}(t)$, $\mathbf{H}(t)$ та $\mathbf{F}(t)$ моделювання фільтра Калмана є досить простою задачею, яка може бути реалізована за допомогою матричних операцій складання, множення та інтегрування.

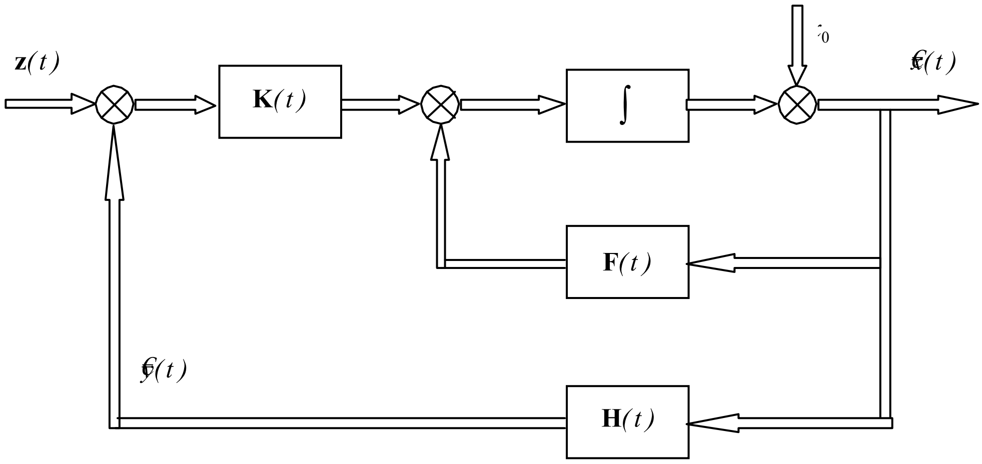

Рис. 1

Принципово складною задачею у процесі розробки та реалізації фільтра (рис. 1) є обчислення матричного коефіцієнта підсилення $\mathbf{K}(t)$, який є прямо пропорційним коваріаційній матриці похибок фільтрації $\eta(t)$. Остання є розв'язком нелінійного матричного рівняння Ріккаті (3) з заданими початковими умовами $\eta(0)$.

Відомі методи розв'язку, що спираються на оптимізацію усталеного режиму, та зведення диференціального рівняння (3) до алгебраїчного [6] не дозволяють отримати управління з заданою якістю перехідного процесу.

Безпосередній розв'язок нелінійного матричного диференціального рівняння у загальному вигляді відсутній, хоча для деяких нескладних задач [5] отримано розв'язок в аналітичному вигляді.

Пропонується розробити модель калманівської фільтрації на основі математичного апарату диференційних перетворень академіка Г.Є. Пухова. Математичний апарат диференційних перетворень є операторним методом, який дозволяє абсолютно точно моделювати складні нелінійні та нестаціонарні диференціальні рівняння алгебраїчними виразами в області зображень.

Основними операціями математичного апарату є пряме (4) та зворотне (5) перетворення, які встановлюють зв'язок між оригіналом та зображенням:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0}, \tag{4}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k), \tag{5}$$

де $X(k)$ – дискретний диференційний спектр безперервної аналітичної функції $x(t)$;

$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ – номер дискрети;

H – параметр диференційного перетворення.

Неважко бачити, що рівняння (3) за своєю структурою може бути представлене в узагальненому вигляді:

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + \mathbf{a}(t)\eta(t) + \mathbf{y}(\eta) + \mathbf{f}(t) = 0, \tag{6}$$

де $\mathbf{a}(t)\eta(t) = -\mathbf{F}(t)\eta(t) - \eta(t)\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(t)$ – лінійна частина рівняння (3);

$\mathbf{y}(\eta) = \eta(t)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\eta(t)$ – нелінійна частина (3);

$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t)$ – частина рівняння, яка не залежить від невідомої матриці $\eta(t)$.

Покажемо, що на основі застосування математичного апарату диференційних перетворень академіка Г.Є. Пухова може бути отримана точна модель рівнянь (3), (6) в області зображень.

Р-модель рівняння Ріккаті в області зображень

Враховуючи правила диференційних перетворень [7], нелінійне диференціальне рівняння (6) може бути перетворене до вигляду:

$$\frac{k+1}{H}\eta(k+1) + \sum_{l=0}^{l=k}\mathbf{A}(k-l)\eta(l) + \mathbf{Y}(k) + \mathbf{F}(k) = 0, \qquad (7)$$

де $\mathbf{F}(k)$ – диференційний спектр матричної функції $\mathbf{f}(t)$;

$\mathbf{Y}(k)$ – диференційний спектр нелінійних членів;

$\mathbf{A}(k)$ – диференційний спектр матричної функції $\mathbf{a}(t)$.

Рівняння (7) являє собою матричне рекурентне рівняння, яке при умові високого порядку абсолютно точно моделює нелінійне диференціальне рівняння Ріккаті (3). За умови невисокого порядку (7) може бути отриманий наближений розв'язок (3), перевагою якого є простота обчислень, а недоліком – не завжди достатній радіус збіжності.

Для забезпечення збіжності розв'язку нелінійних рівнянь на основі наближених функцій застосовують розбиття інтервалу визначення невідомої функції на підінтервали, на кожному з яких шукається локальний розв'язок.

Одним з ефективних методів розв'язку нелінійних рівнянь на основі апроксимації є метод підобластей [7].

Методика знаходження диференційного спектра за рівнянням Ріккаті методом підобластей

Метод підобластей відноситься до групи методів, які дозволяють добитися високої точності розв'язку на основі мінімізації нев'язки. Схема проведення обчислень за цим методом передбачає вибір структури апроксимуючої функції з невизначеними коефіцієнтами, наприклад, у вигляді багаточлена:

$$\overleftarrow{\eta}(t) = \eta_0 + \eta_1 t + \eta_2 t^2 + ... + \eta_{\nu-1}t^{\nu-1}, \qquad (8)$$

де $\eta_i, i \in [0...\nu-1]$ – невизначені коефіцієнти.

При використанні диференційних перетворень нетейлорівського типу апроксимація може будуватись і на інших базових функціях: гармонічних, експоненційних і т. д. [7].

В цьому методі невизначені коефіцієнти знаходяться на основі виразу:

$$\int_{t_0}^{t_\nu}\varepsilon(t)dt = 0, t_\nu = t_1, t_2, t_3, ..., t_{n-1}, H \ , \qquad (9)$$

де $\varepsilon(t) = \eta(t) - \overleftarrow{\eta}(t)$ вираз для нев'язки.

Кількість рівнянь ν відповідає кількості невизначених коефіцієнтів.

Застосовуючи до $\varepsilon(t)$ пряме диференційне перетворення, а до інтегралу (9) – зворотне, отримаємо систему скінчених рівнянь виду:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{t_\nu}{H}\right)^k \frac{E(k)}{k+1} = 0, \qquad (10)$$

де диференційний спектр $E(k)$ нев'язки $\varepsilon(t)$ знаходиться шляхом підстановки апроксимуючої функції в спектральну модель нелінійного диференціального рівняння Ріккаті (3).

Аналіз результатів

Розроблена модель фільтра Калмана на основі диференційних перетворень відрізняється від відомих тим, що нелінійне диференціальне рівняння Ріккаті замінене його абсолютно точним алгебраїчним квазіаналогом в області зображень.

Враховуючи, що точний розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь знайти складно, запропонована методика наближеного розв'язку на основі його апроксимації методом підобластей. При цьому вдається значним чином скоротити порядок апроксимуючої функції при збереженні достатньої точності на інтервалі визначення.

За результатом розв'язку тестового завдання показана висока точність розрахунку матричного коефіцієнта підсилення фільтра Калмана, висока якість фільтрації та перехідного процесу. При цьому забезпечується невисока обчислювальна складність процедури калманівської фільтрації, що особливо важливо в системах оцінювання реального часу.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Тутубалин В.Н.* Статистическая обработка рядов наблюдения. – М.: Знание, 1973. – 64 с.
2. *Ефимов А.Н.* Предсказание случайных процессов. – М.: Знание, 1976. – 64 с.
3. *Тенг Л., Фиппс П.Л.* Применение теории нелинейной фильтрации к задаче наведения ракеты малой дальности. // Вопросы ракетной техники. – 1969. – № 4. – С. 76–91.
4. *Александров В.В., Локшин Б.Я.* Математика и управление системами. – М.: Знание, 1976. – 64 с.
5. *Венгеров А.А., Щаренский В.А.* Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. – М.: Энергоиздат, 1982. – 192 с.
6. *Сейдж Э., Мэлс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении: Пер. с англ / Под ред. проф. Б.Р. Левина. – М.: Связь, 1976. – 495 с.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.

ВОДОП'ЯН Сергій Васильович – кандидат технічних наук, начальник відділу наукового центру Житомирського військового орденів Жовтневої Революції і Червоного Прапора інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– алгоритми автоматичних систем управління та оцінювання.

П'ЯСКОВСЬКИЙ Дмитро Володимирович – заслужений працівник народної освіти України, кандидат технічних наук, доцент, начальник Житомирського військового орденів Жовтневої Революції і Червоного Прапора інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– методи та алгоритми підвищення ефективності систем дистанційного моніторингу;

– автоматичні системи управління та оцінювання.

УМІНСЬКИЙ Володимир Вікторович – ад'юнкт Житомирського військового орденів Жовтневої Революції і Червоного Прапора інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– алгоритми автоматичних систем управління та оцінювання.

Подано 14.09.2001

Водоп'ян С.В., П'ясковський Д.В., Умінський В.В. Моделювання фільтра Калмана на основі диференційних перетворень

Водопьян С.В., Пясковский Д.В., Уминский В.В. Моделирование фильтра Калмана на основе дифференциальных преобразований

Vodop'yan S.V., P'yaskovski D.V., Uminskiy V.V. Modelling of Kalman's filter on the basis of differential transformations.

УДК 621.396.96

Моделирование фильтра Калмана на основе дифференциальных преобразований / С.В. Водопьян, Д.В. Пясковский, В.В. Уминский

Разработана модель фильтра Калмана на основе дифференциальных преобразований, которая позволяет повысить точность и снизить вычислительную сложность процедуры калмановской фильтрации.

УДК 621.396.96

Modelling of Kalman's filter on the basis of differential transformations / S.V. Vodop'yan, D.V. P'yaskovski, V.V.Uminskiy

The model of Kalman's filter is developed on the basis of differential transformations which allows to raise accuracy and to lower computing complexity of procedure of Kalman's filtration.