ОБРОБКА МАТЕРІАЛІВ В МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 539.3

А.Є. Бабенко, д.т.н., проф.
О.О. Боронко, к.т.н, доц.
В.С. Парненко, аспір.
Національний технічний університет України “КПІ”

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ДИСКОВОЇ ФРЕЗИ

Запропонований загальний метод розв’язку задачі про вимушені коливання дискової фрези, коли зубці фрези паралельні її осі. Отримані результати розв’язку задачі дозволяють встановити залежність амплітуди коливань фрези від параметрів, які характеризують процес різання.

В процесі експлуатації дискової фрези виникають вимушені коливання, що обумовлено ударами зуба фрези в моменти врізання зуба фрези в деталь та його виходу з процесу різання.

Диференціальне рівняння вимушених коливань дискової фрези в полярних координатах має вигляд (1):

$$D\Delta_\rho \Delta_\rho w + \gamma h \ddot{w} = q(\rho, \varphi, t), \tag{1}$$

де $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ – циліндрична жорсткість;

E – модуль Юнга;

h – товщина фрези;

γ – густина матеріалу;

υ – коефіцієнт Пуассона;

$\Delta_\rho = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – оператор Лапласа.

Розв’язок рівняння (1) шукаємо за методом головних координат (МГК) (1):

$$w(\rho, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(\rho, \varphi)\eta_{mn}(t), \tag{2}$$

де W_{mn} – власні форми коливань, які визначаються з рівняння;

$$D\Delta_\rho \Delta_\rho W - \gamma h \omega^2 W = 0\,; \tag{3}$$

$\eta_{mn}(t)$ – шукані головні координати.

Введемо позначення $k^4 = \dfrac{\gamma h \omega^2}{D}$, тоді рівняння (3) прийме вигляд:

$$\Delta_\rho \Delta_\rho W - k^4 W = 0\ . \tag{4}$$

До цього рівняння додаються по дві граничні умови (зовнішній край вільний, внутрішній – жорстко закріплений), що дозволяє знайти значення характеристичних чисел k_{mn} та визначити власні частоти дискової фрези за формулою:

$$\omega_{mn}^2 = k_{mn}^4 \frac{D}{\gamma h}\,. \tag{5}$$

Спектр власних частот та власних форм коливань дискової фрези може бути знайдений також за допомогою чисельних або інших аналітичних методів.

В даному випадку на дискову фрезу діє гармонійне розподілене навантаження $q(\rho,\varphi,t) = q(\rho,\varphi)\cos pt$, оскільки коливання фрези доцільно розглядати в системі координат, яка є нерухомою відносно фрези, то в цій системі координат сила, яка діє на фрезу, рухається по колу з кутовою швидкістю □, тому рівняння (1) приймає вигляд:

$$D\Delta_\rho \Delta_\rho \omega + \gamma h \ddot{\omega} = q(\rho, \varphi)\cos pt\ . \tag{6}$$

Розв’язок рівняння (6) шукаємо за МГК, алгоритм МГК дозволяє вилучити змінні □ ρ та □ φ, що приведе до системи незалежних звичайних рівнянь:

$$M_{mn}(\ddot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2 \eta_{mn}) = \cos pt \int_0^a \int_0^{2\pi} q W_{mn}\, d\rho\, d\varphi = q_{mn} \cos pt\,, \tag{7}$$

$$q_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} q(\rho,\varphi) W_{mn}(\rho,\varphi) d\rho d\varphi, \qquad M_{mn} = \gamma h \int_0^a \int_0^{2\pi} W_{mn}^2(\rho,\varphi) d\rho d\varphi.$$

Частковий розв'язок рівняння (7) знаходимо за виглядом правої частини:

$$\eta_{mn}(t) = \frac{q_{mn}\cos pt}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 - p^2)}. \tag{8}$$

Цей розв'язок рівняння (6) за тривіальних початкових умов за відсутності резонансу має вигляд:

$$W(\rho,\varphi,t) = \cos pt \sum_{m=1}^{I} \sum_{n=1}^{I} W_{mn}(\rho,\varphi) \frac{q_{mn}}{M_{mn}(\omega^2 - p^2)}. \tag{9}$$

Таким чином, розв'язок задачі про згинні вимушені коливання дискової фрези зводиться до визначення власних частот та відповідних власних форм коливань фрези, а також до розкладання збуджуючої сили в ряд Фур'є. В подальшому будемо вважати товщину фрези рівною одиниці, а товщину пластини позначимо через h.

Вважаємо, що сили різання прикладені до вершин зубів і є зосередженими. Координата прикладання сили дорівнює кутовій координаті вершини m-го зуба $\alpha_m = 2\pi m / z$.,де z – кількість зубів. В подальшому через конструктивні вимоги вважаємо, що число зубців парне.

Час дії сили різання листа m-им зубом дорівнює часу руху дуги обхвату фрези пластиною $2\psi = 2\arcsin(h/d)$

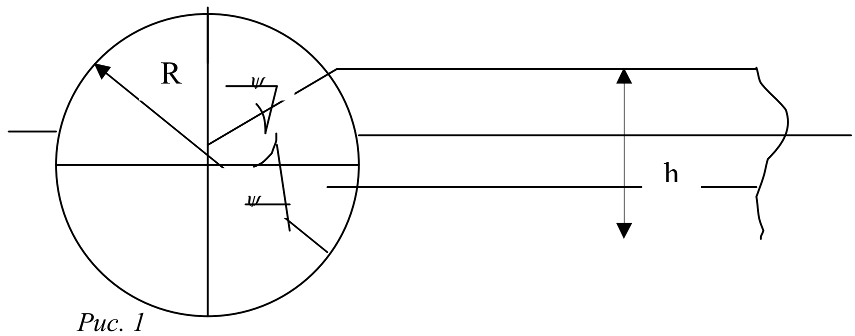

Рис. 1

Дана дуга ковзає по зубу з кутовою швидкістю ρ ρ. За цих припущень сила, яка діє на зуб може бути записана у вигляді:

$$q_m(\rho,\varphi,t) = A\delta(\rho - a)\delta(\varphi - a_m)H_m(t)., \tag{10}$$

де A – амплітудне значення сили, яка діє на зуб;
$\delta(\varphi - a_m)$ – дельта функція Дірака, яка визначає радіальну координату точки прикладання сили;
$H_m(t)$ – функція, яка визначає час різання;
$a=R$ – зовнішній діаметр фрези;

Радіальні координати всіх зубів однакові, тому сили, які діють на різні зуби, відрізняються лише як функції часу та їх кутові координати.

Сила, яка діє на зуб, дорівнює амплітудній величині тоді, коли точка з координатами (t,φ) знаходиться в області:

$$\varphi = a_m.; (\alpha_m / p) \le t \le (\alpha_m / p + 2\psi / p),$$

і її можна задати у вигляді добутку функції часу $f(t)$ та дельта функції Дірака $\delta(\varphi - a_m)$ (рис. 2).

Щоб проаналізувати силу, яка діє на зуб, представимо її у вигляді подвійного ряду Фур'є.

Оскільки сила, прикладена до зубу, може бути подана у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної, то подвійний ряд може бути представлений у вигляді добутку рядів Фур'є від кожної функції окремо.

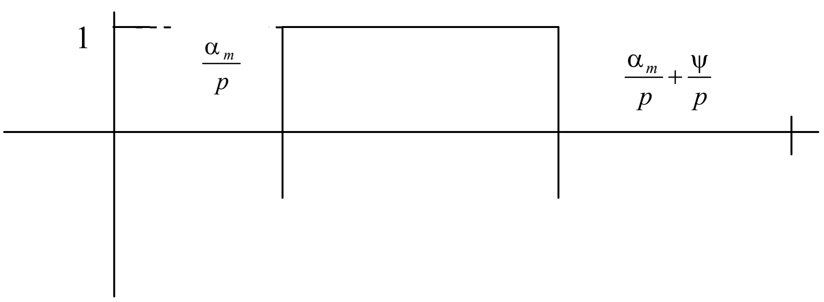

Рис. 2

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<\dfrac{\alpha_m}{p}\\ 1 \quad \dfrac{\alpha_m}{p} & \le t\le \dfrac{\alpha_m}{p}+\dfrac{2\psi}{p}\\ 0 & t>\dfrac{\alpha_m}{p}+\dfrac{2\psi}{p}\end{cases}$$

Розкладання *f(t)* в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(t)=\frac{\psi}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\psi}{n\pi}\left[\cos n(\alpha_m+\psi)\cos npt+\sin n(\alpha_m+\psi)\sin npt\right].$$

Для подальшої роботи представимо функцію у вигляді:

$$f(t)=\frac{\psi}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\psi}{n\pi}\left[\cos n\alpha_m\cos n(pt-\psi)+\sin n\alpha_m\sin n(pt-\psi)\right];$$

$$f(t)=\frac{\psi}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\psi}{n\pi}\cos n(pt-\psi-\alpha_m).$$

Координата точки прикладання сили, яка діє на m-й зуб, подана дельта функцією Дірака *δ(φ-a$_m$)* і може бути розкладена в ряд Фур'є:

$$F(\varphi)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos k\alpha_m\cos k\varphi+\sin k\alpha_m\sin k\varphi\right)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos k(\varphi-\alpha_m).$$

Сила, яка діє на *m*-й зуб, при різанні пластинки є функцією кутової координати і часу,тому представимо її у вигляді:

$$A_m=F(\varphi)f(t).;$$

$$A_m(t,\varphi)=\frac{\psi}{2\pi^2}+\frac{\psi}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos k\alpha_m\cos k\varphi+\sin k\alpha_m\sin k\varphi\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\psi}{n}\left[\cos n(pt-\psi)\cos k\alpha_m+\sin n(pt-\psi)\sin k\alpha_m\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}\sum_{n=1}\frac{\sin n\psi}{n}\cdot\cos k\left(\varphi-\alpha_m\right)\cos n(pt-\psi-\alpha_m).$$

Сила, яка прикладена до фрези при різанні пластинки дорівнює сумі сил від усіх зубів.

$$A(\varphi,t)=\sum_{m=1}^{z}A_m(\varphi,t)$$

або

$$A(t,\varphi)=\frac{\psi}{2\pi^2}+\frac{\psi}{\pi^2}\sum_{m=1}^{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos k\alpha_m\cos k\varphi+\sin k\alpha_m\sin k\varphi\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\psi}{n}\left[\cos n\alpha_m\cos n(pt-\psi)+\sin n\alpha_m\sin n(pt-\psi)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{z}\sum_{k=1}\sum_{n=1}\frac{\sin n\psi}{n}\cdot\{\cos[k(\varphi-\alpha_m)-n(pt-\psi-\alpha_m)]+\cos[k(\varphi-\alpha_m)+n(pt-\psi-\alpha_m)]\},$$

або

$$A(t,\varphi)=\frac{\psi}{2\pi^2}+\frac{\psi}{\pi^2}\sum_{m=1}^{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos k\alpha_m\cos k\varphi+\sin k\alpha_m\sin k\varphi\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\psi}{n}\left[\cos n\alpha_m\cos n(pt-\psi)+\sin n\alpha_m\sin n(pt-\psi)\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{z}\sum_{k=1}\sum_{n=1}\frac{\sin n\psi}{n}\cdot\{\cos[n(pt-\psi)-k\varphi-(n-k)\alpha_m]+$$
$$+\cos[n(pt-\psi)+k\varphi-(n+k)\alpha_m]\}.$$

Змінюючи порядок сумування та враховуючи:

$$\sum_{m=1}^{z}\cos n\alpha_{vm}=\begin{cases} z & при\ \ n\equiv 0(\operatorname{mod} z)\\ 0 & при\ \ n\neq 0(\operatorname{mod} z)\end{cases}, \sum_{m=1}^{z}\sin n\alpha_m=0. \tag{11}$$

отримаємо:

$$A(\varphi,t)=\frac{\psi}{2\pi^2}z+\frac{\psi}{\pi^2}z\sum_{j=1}^{\infty}\cos jz\varphi+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}\frac{\sin nz\varphi}{n}\cos nz(pt-\psi)+$$
$$+\frac{z}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin(jz+k)\psi}{(jz+k)}\cos[(jz+k)(pt-\psi)-k\varphi]+$$
$$+\frac{z}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(jz-k)\psi}{(jz-k)}\cos[(jz-k)(pt-\psi)+k\varphi] \tag{12}$$

В даній роботі розглядався ряд типорозмірів дискових фрез, власні частоти та відповідні їм власні форми коливань, що визначались шляхом формування функціоналів за допомогою варіаційно-сіткових методів та використання методу за координатним спуском для їх мінімізації (3), (4). Оскільки власні форми коливань нормовані, то співвідношення (10) буде мати вигляд:

$$W(\rho,\varphi,t)=\cos pt\sum_{m=1}^{I}\sum_{n=1}^{I}W_{mn}(\rho,\varphi)\frac{q_{mn}}{(\omega^2-p^2)}; \tag{13}$$

$$q_{mn}=\int_0^a\int_0^{2\pi}q(\rho,\varphi)W_{mn}(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi; \qquad M_{mn}=1. \tag{14}$$

Оскільки інтенсивність навантаження має вигляд:

$$q(\rho,\varphi)=\delta(\rho-a)q(\varphi).,$$

власні форми коливань можуть бути представлені у вигляді:

$$W_{mn}(\rho,\varphi)=W_{mn}(\rho)\cos n\varphi.$$

то отримаємо:

$$q_{mn}=aW_{mn}(a)\int_0^{2\pi}q(\varphi)\cos n\varphi d\varphi.. \tag{15}$$

Використовуючи співвідношення (7), (8), (9), знаходимо залежність амплітуди коливань як функції власних форм та частот збуджуючої сили. Отримані результати розв'язку задачі дозволяють встановити залежність амплітуди коливань фрези від параметрів, які характеризують процес різання.

1. Стала складова незалежна від часу:

$$\frac{\psi}{2\pi^2}z+\frac{\psi}{\pi^2}z\sum_{j=1}^{\infty}\cos jz\varphi. \tag{16}$$

2. Амплітуди вісесиметричних гармонійних складових:

$$\frac{a}{\pi}W_{m0}(a)\frac{\sin nz\psi}{n}\frac{1}{\omega_{m0}^2-(nzp)^2}. \tag{17}$$

3. Амплітуди невісесиметричних гармонійних складових:

$$\frac{z}{2\pi^2}\frac{\sin(jz+k)\psi}{(jz+k)}\frac{aW_{mk}(a)}{\omega_{mk}^2-[(jz+k)p]^2}, \tag{18}$$

де $j = 0, 1, 2, 3,\ldots$

$$\frac{z}{2\pi^2}\frac{\sin(jz-k)\psi}{(jz-k)}\frac{aW_{mk}(a)}{\omega_{mk}^2-[(jz-k)p]^2}, \tag{19}$$

де $j = 1, 2, 3,\ldots$ $jz-k>0$ – кількість окружних вузлових ліній, кількість діаметральних вузлових ліній.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Василенко Н.В.* Теория колебаний. – Киев: "Вища школа", 1992. – 429 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1–2. – М.: Наука, 1966.

3. *Бабенко А.Є., Равська Г.С., Боронко О.О., Трубачов С.І.* Визначення власних частот і власних форм коливань дискових пил // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. –1998. – № 3(4). – С. 62–65.
4. *Бабенко А.Е. , Боронко О.А.* Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированного состояния // Вестник НТУУ “КПИ”. – 1998.–– Вып. 33 / Машиностоение. – С. 241–252.

БАБЕНКО Андрій Єлисейович – доктор технічних наук, професор Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

– аналітичні та чисельні методи визначення напружено-деформованого стану .

БОРОНКО Олег Олександрович – кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

– аналітичні та чисельні методи визначення напружено-деформованого стану при вібраційних навантаженнях.

ПАРНЕНКО Валерія – аспірант Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

– аналітичні та чисельні методи визначення напружено-деформованого стану .

Подано 24.09.2001

/ A.Babenko, O.Boronko, V.Parnenko

Proposed general solution method of the task about forced oscillation of side milling cutter when the wiper of milling cutter is parallel to axis. The findings of solving task allow establish dependence between amplitude oscillations of milling cutter and parameter, which specify cutter process.

Вынужденные колебания дисковой фрезы / А.Е. Бабенко, О.А. Боронко, В.С. Парненко

Предложен общий метод решения задачи о вынужденных колебаниях дисковой фрезы, когда зубцы фрезы паралельны её оси. Полученные результаты решения задачи позволяют установить зависимость амплитуды колебаний фрезы от параметров, которые характеризуют процесс резания.