УДК 681.51:519.95

О.Г. Фролова, аспір.
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ КЕРУВАННЯ ЗМІЩЕНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

(Представлено д.т.н., проф. Б.Б. Самотокіним)

Запропоновано метод моделювання оптимальних процесів, що побудований на зміщених диференційних перетвореннях. Наведено приклад моделювання.

Математичний апарат диференціальних перетворень широко використовується для моделювання динамічних об’єктів і процесів у різноманітних областях науки і техніки [2, 7–9]. Найбільше поширення в області моделювання одержали основні диференціальні перетворення [9]. Цей вид диференціальних перетворень розглядався в [6, 13] для моделювання оптимальних процесів керування. Відповідно до класифікації, наведеної в [9], поряд із основними диференціальними перетвореннями з метою моделювання можуть використовуватися також зміщені перетворення, що отримані шляхом переносу центра розкладу оригіналу в степеневий ряд Тейлора з точки $t = 0$ у зміщену точку $t = t_v$.

У даній роботі пропонується метод моделювання оптимальних процесів керування, заснований на зміщених диференціальних перетвореннях. У порівнянні з основними перетвореннями, зміщені перетворення дозволяють спростити процес синтезу оптимального керування та істотно підвищити точність моделювання.

Розглянемо задачу оптимального керування, що описується такою математичною моделлю. Задано опис руху динамічного об’єкта у вигляді векторного диференціального рівняння:

$$\dot{x} = f(t, x, u); \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $x = x(t)$ – n-вимірний вектор стану; u – m-вимірний вектор керування ($m < n$); f – неперервна і неперервно-диференційована за сукупністю змінних t, x, u вектор-функція узагальненої сили; $t \in [t_0, T]$ – час, граничне значення якого в одних задачах задається, а в інших – не фіксується.

Задачу оптимального керування розглянемо разом із задачею термінального керування, що полягає в переведенні динамічного об’єкта із заданого початкового стану (1) у кінцевий (термінальний), який визначений в момент часу $t = T$ q-вимірним ($q \le n$) векторним рівнянням:

$$S[x(T), T] = 0. \tag{2}$$

Якість процесу керування оцінюється таким функціоналом:

$$I = G[x(T), T] + \int_{t_0}^{T} Ц(t, x, u)\,dt, \tag{3}$$

де задані функції G і Φ мають неперервні часткові похідні за x та u. Вважаємо, що обмеження на вектори стану і керування враховані у процесі вибору виду функціонала (3).

Мета моделювання полягає у визначенні вектора оптимального керування $u^*(t)$, що при заданих диференціальних зв’язках (1) і граничних умовах (2) оптимізує функціонал (3).

Поставлена задача розв’язувалася в [6, 13] на основі диференціальних перетворень із центром розкладу оригіналу в ряд Тейлора у точці $t_0 = 0$. Основні диференціальні перетворення ефективно розв’язують задачу моделювання оптимальних процесів керування тільки на порівняно невеликому інтервалі часу.

У тих випадках, коли інтервал моделювання не заданий або займає відрізок часу, що перевищує радіус збіжності рядів Тейлора в околі точки $t_0 = 0$, основні диференціальні перетворення при обмеженій кількості дискрет диференціального спектра можуть не забезпечити задану точність моделювання. У цих випадках пропонується використовувати зміщені диференціальні перетворення [9] функції часу $x(t)$ у довільній точці t_v:

$$X(k, t_v) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t_v + \tau)}{d\tau^k}\right]_{\tau=0}; \tag{4}$$

$$\overline{X}(k, t_v) = \frac{(-H)^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t_v - \tau)}{d\tau^k}\right]_{\tau=0}, \tag{5}$$

де $X(k, t_v)$ і $\overline{X}(k, t_v)$ – дискретні функції цілочисельного аргумента $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$; τ – локальний аргумент, значення якого вибирається в межах $H \ge \tau \ge 0$; H – відрізок часового аргумента, на якому розглядаються функції $x(t_v + \tau)$ та $x(t_v - \tau)$, значення H повинно бути менше за радіус збіжності рядів Тейлора в околі точки t_v.

Вираз (4) визначає пряме перетворення оригіналу $x(t_v + \tau)$ у зображення $X(k, t_v)$. Аналогічно, пряме перетворення функції часу $x(t_v - \tau)$ в область зображень $\overline{X}(k, t_v)$ задається виразом (5). Величини дискретних функцій $X(k, t_v)$ та $\overline{X}(k, t_v)$ при цілочисельних значеннях аргументу k називаються дискретами відповідних диференціальних спектрів.

Перехід із області зображень в область часу здійснюється за допомогою обернених диференціальних перетворень:

$$x(t_v + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{H}\right)^k X(k, t_v); \tag{6}$$

$$x(t_v - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{H}\right)^k \overline{X}(k, t_v). \tag{7}$$

Надалі вважаємо, що функції часу, які описують процеси оптимального керування в задачі (1)–(3) є аналітичними. Вектор оптимального керування, що забезпечує розв'язання задачі (1)–(3), будемо шукати в класі аналітичних функцій $U(t, A)$, де $A = (a_1, a_2,\ldots, a_N)$ – вектор вільних параметрів, що підлягає визначенню.

Застосувавши диференціальні перетворення (4), (5) до функції $U(t, A)$ з обраною аналітичною структурою, одержимо її диференціальний спектр у таких двох формах:

$$U(k, t_v, A) = \frac{H_1^k}{k!}\left[\frac{d^k u(t_v + \tau, A)}{d\tau^k}\right]_{\tau=0}; \tag{8}$$

$$\overline{U}(k, t_v, A) = \frac{(-H_2)^k}{k!}\left[\frac{d^k u(t_v - \tau, A)}{d\tau^k}\right]_{\tau=0}. \tag{9}$$

Переведемо векторне диференціальне рівняння (1) в область зображень диференціальними перетвореннями вигляду (4) і (5). В результаті одержимо дві моделі рівняння (1):

$$X(k+1, t_v, x_v, A) = \frac{H_1}{k+1} F\left[\tau(k, t_v), X(k, t_v, x_v, A), U(k, t_v, A)\right]; \tag{10}$$

$$\overline{X}(k+1, t_v, x_v, A) = -\frac{H_2}{k+1} F\left[\tau(k, t_v), \overline{X}(k, t_v, x_v, A), \overline{U}(k, t_v, A)\right]; \tag{11}$$

$$X(0) = \overline{X}(0) = x(t_v) = x_v,$$

де функція F представляє зображення оригіналу функції f.

Моделі рівняння (1) в області зображень, що вперше отримані Пуховим Г.Є. у [7–9], домовимося називати Р-моделями. Модель вигляду (10) визначимо як пряму Р-модель, а модель (11) будемо називати оберненою Р-моделлю. Пряма Р-модель (10) представляє рівняння (1) на відрізку часу $H_1 = T - t_v$. Обернена Р-модель (11) призначена для опису рівняння (1) на відрізку часу $H_2 = t_v - t_0$.

Послідовно присвоюючи цілочисельні значення аргументу k = 0, 1, 2, 3,…, за рекурентним виразом (10) від початкової умови $X(0) = x_v$ визначаємо дискрети диференціального спектра $X(k, t_v, x_v, A)$ розв'язку $x(t)$ рівняння (1) на відрізку $H_1 = T - t_v$. Аналогічно, за виразом (11) знаходимо дискрети диференціального спектра $\overline{X}(k, t_v, x_v, A)$, що представляють в області зображень розв'язок $x(t)$ рівняння (1) на відрізку $H_2 = t_v - t_0$.

Обернені перетворення (6), (7) дозволяють знайти граничні значення розв'язку рівняння (1):

$$x(T) = x(T, x_v, A) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k, t_v, x_v, A); \tag{12}$$

$$x(t_0) = x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{X}(k, t_v, x_v, A). \tag{13}$$

Вираз (13) представимо у вигляді n-вимірного векторного рівняння:

$$x_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{X}(k, t_v, x_v, A) = 0. \tag{14}$$

В окремих випадках із рівняння (14) вдається знайти в явному вигляді вектор $x_v(t_v, \text{A}, x_0)$ і виключити його з виразу (12). Тоді підстановка (12) у рівняння (2) перетворить термінальну умову у q-вимірне векторне рівняння:

$$S[x(T, A), T] = 0. \tag{15}$$

Якщо розмірність N вектора A вибирається рівною $q - 1$, то рівняння (15) визначає граничний час T і всі компоненти вектора A, який формує закон керування $u(t, A)$, що розв’язує задачу термінального керування (1), (2). У загальному випадку задача термінального керування (1), (2) зводиться до системи рівнянь, що складається з термінальної умови (2) вигляду

$$S[x(T, x_v, A), T] = 0 \tag{16}$$

і рівняння (14) при $N = q - 1$. Система рівнянь (14), (16) має розмірність $n + q$ і дозволяє знайти n-вимірний вектор x_v, граничне значення часу T та $N = q - 1$ компонент вектора вільних параметрів A.

Задача термінального керування (1), (2), яка за допомогою диференціальних перетворень (4), (5) зведена до розв’язання рівняння (15) або в загальному випадку – до системи рівнянь (14), (16), має важливе практичне значення для керування рухомими об’єктами [3].

Розглянемо інший окремий випадок, що часто зустрічається в практичних додатках. Розв’яжемо задачу оптимального керування (1), (3) без термінальних умов (2). Спочатку виразимо функціонал (3) через диференціальні спектри (8)–(11). З цією метою відрізок інтегрування $t\in [t_0, T]$ розіб’ємо на два інтервали $[t_0, t_v]$ та $[t_v, T]$. Підінтегральну функцію в (3) переведемо диференціальними перетвореннями (4), (5) в область зображень. Тоді функціонал (3) перетвориться у функцію такого вигляду:

$$\begin{aligned} I(T, x_v, A) = G[x(T, x_v, A), T] + H_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi[\tau(k, t_v), X(k, t_v, x_v, A), U(k, t_v, A)]}{k+1} + \\ + H_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi[\tau(k, t_v), \overline{X}(k, t_v, x_v, A), \overline{U}(k, t_v, A)]}{k+1}, \end{aligned} \tag{17}$$

де $H_1 + H_2 = T - t_0$; $H_1 = T - t_v$; $H_2 = t_v - t_0$; Φ – зображення оригіналу функції φ.

Розглянемо окремий випадок, в якому рівняння (14) дозволяє знайти в явному вигляді вектор $x_v(t_v, \text{A}, x_0,)$ і виключити його з виразу (17). У цьому випадку необхідні умови оптимальності функції $I(T, A)$ дають систему рівнянь для визначення граничного значення часу T і невідомих компонент вектора A вільних параметрів:

$$\frac{\partial I(T, A)}{\partial T} = 0; \tag{18}$$

$$\frac{\partial I(T, A)}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1, N}, \tag{19}$$

де $t_0 = 0,\ H_1 = H_2 = \dfrac{T}{2} = t_v$.

Питання існування максимуму або мінімуму функції $I(T, A)$ з’ясовують за достатніми умовами мінімуму або максимуму функції багатьох змінних [5]. В задачах оптимального керування (1), (3), в яких заданий інтервал часу $[0, T]$, рівняння (18) виключається, а вектор A визначається із системи рівнянь (19).

У більш загальному випадку задача оптимізації функції (17) із обмеженням (14) розв’язується методом множників Лагранжа [5, 10]. У цьому випадку функція (17) і умова (14) об’єднуються множниками Лагранжа $\lambda_x = (\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}, ..., \lambda_{x_n})$ в нову функцію:

$$J(T, x_v, A, \lambda_x) = I(T, x_v, A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i} \Psi_i(t_v, x_v, A, x_0),$$

де

$$\Psi(t_v, x_v, A, x_0) = x_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{X}(k, t_v, x_v, A) = 0;$$

$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$.

Задача оптимізації функції (17) за умови (14) зводиться до безумовної оптимізації функції $J(T, x_v, A, \lambda_x)$, необхідні умови екстремуму якої разом із рівнянням (14) дають систему кінцевих рівнянь щодо невідомих компонент векторів x_v, A, λ_x і часу T:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J(T, x_v, A, \lambda_x)}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial J(T, x_v, A, \lambda_x)}{\partial x_{v_i}} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ &\frac{\partial J(T, x_v, A, \lambda_x)}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{20}$$

В результаті виконаних диференціальних перетворень задачі оптимального керування (1), (3) отримана модель у вигляді системи кінцевих рівнянь (14), (20). Розв'язок цієї системи варто перевірити за достатніми умовами мінімуму або максимуму функції $J(T, x_v, A, \lambda_x)$ [5].

Аналогічно розв'язується задача оптимального керування (1)–(3) із термінальною умовою (2). Функція (17) і умови (14), (16) об'єднуються множниками Лагранжа λ_x і $\lambda_s = (\lambda_{s_1}, \lambda_{s_2}, ..., \lambda_{s_q})$ у функцію $J^*(T, x_v, A, \lambda_x, \lambda_s)$, необхідні умови екстремуму якої разом із рівняннями (14), (16) складають систему кінцевих рівнянь для визначення векторів x_v, A, λ_x, λ_s і граничного значення часу T:

$$\begin{gathered}\frac{\partial J^*(T, x_v, A, \lambda_x, \lambda_s)}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial J^*(T, x_v, A, \lambda_x, \lambda_s)}{\partial x_{v_i}} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial J^*(T, x_v, A, \lambda_x, \lambda_s)}{\partial a_l} = 0, \quad l = \overline{q+1, N}.\end{gathered} \tag{21}$$

З розв'язку системи кінцевих рівнянь (14), (16), (21) знаходять невідомі вектори x_v, A, λ_x, λ_s і значення часу T, а потім перевіряють достатні умови максимуму або мінімуму функції $J^*(T, x_v, A, \lambda_x, \lambda_s)$ [5].

Дослідимо ефективність застосування зміщених диференціальних перетворень у порівнянні з основними, що застосовані в [6, 13]. Зміщені диференціальні перетворення (4), (5), як і основні [9], дозволяють аналітично точно виконувати математичні операції в області зображень. Похибка розв'язку задачі з'являється при використанні обмеженої кількості дискрет диференціального спектра в процесі обернених перетворень (6), (7) в область часу. Якщо в рядах Тейлора (6), (7) обмежити кількість членів, що враховуються, то похибка, спричинена відкиданням членів вищого порядку, оцінюється залишками цих рядів. Вважаємо, що в (6) враховується r_1 членів ряду, а в (7) – r_2 членів. Тоді залишки рядів Тейлора (6) та (7) можна точно виразити у формах Лагранжа та Ейлера–Лагранжа [12]:

$$R_c = \frac{H^{r_1+1}}{(r_1+1)!} x^{(r_1+1)}(t_c^*) = \frac{H^{r_1+1}}{r_1!} \int_0^1 (1-\Theta)^{r_1} x^{(r_1+1)}(t_v + \Theta H) d\Theta; \tag{22}$$

$$\overline{R}_c = \frac{(-H)^{r_2+1}}{(r_2+1)!} x^{(r_2+1)}(\overline{t}_c^*) = \frac{(-H)^{r_2+1}}{r_2!} \int_0^1 (1-\Theta)^{r_2} x^{(r_2+1)}(t_v - \Theta H) d\Theta, \tag{23}$$

де $t_c^* \in [t_v, T], \overline{t}_c^* \in [t_0, t_v], 1 \ge \Theta \ge 0$.

Аналогічно визначається в основних обернених перетвореннях:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H}\right)^k X(k), \tag{24}$$

залишок ряду Тейлора (24) при врахуванні тільки r членів цього ряду:

$$R_0 = \frac{H_0^{r+1}}{(r+1)!} x^{(r+1)}(t^*) = \frac{H_0^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-\Theta)^r x^{(r+1)}(\Theta H_0) d\Theta, \tag{25}$$

де $t^* \in [0, T]$, $1 \ge \Theta \ge 0$.

Виберемо крок за часом так, щоб $H_0 = 2H = T$. Такому вибору кроку $H = \frac{T}{2}$ відповідає точка зміщення $t_v = \frac{T}{2}$. Припустимо також, що $r = r_1 = r_2$.

З метою наближеної оцінки ефективності зміщених перетворень запишемо:

$$x^{(r+1)}(t_c^*) \approx x^{(r+1)}(\overline{t}_c^*) \approx x^{(r+1)}(t^*).$$

Сформуємо відношення залишку (25) до залишків (22), (23) зміщених перетворень:

$$\frac{R_0}{R_c} \approx \frac{R_0}{\overline{R}_c} \approx 2^{r+1}.$$

Звідси випливає, що застосування зміщених диференціальних перетворень (4), (5) замість основних дозволяє зменшити похибку основних перетворень (24) у 2^{r+1} рази, де r – кількість дискрет диференціального спектра, що враховуються при переході з області зображень у область часу (6), (7).

Недоліком зміщених перетворень є збільшення кількості невідомих у системі кінцевих рівнянь на n компонент вектора $x(t_v) = x_v$. Цей недолік компенсується в системі кінцевих рівнянь зменшенням на N невідомих компонент вектора A вільних параметрів. Збільшення кількості невідомих за вектором A для основних диференціальних перетворень пояснюється тим, що на двох інтервалах часу в основних перетвореннях N-вимірні вектори A_1 та A_2 різні, а при зміщених перетвореннях обидва сусідні інтервали часу покриваються одним вектором A, що має розмірність N.

В задачах оптимального керування траєкторним рухом рухомих об'єктів $N > n$, тому що вимога високої точності наведення потребує врахування значної кількості дискрет диференціального спектра вектора керування $u(k, A)$, що перевищує розмірність n вектора стану $x(t)$. В задачах оптимального керування, в яких $N > n$, розмірність системи кінцевих рівнянь для зміщених перетворень менша, ніж для основних.

Збільшення розмірності системи кінцевих рівнянь при застосуванні зміщених перетворень, у порівнянні з основними, виявляється для об'єктів керування високої розмірності, керування якими не потребує високої точності визначення оптимального закону керування і тому $n > N$. Цей випадок може мати місце в процесі розв'язування задач запобігання зіткнення судів, літальних апаратів та інших рухомих об'єктів [4]. Але в задачах такого типу потрібне обов'язкове визначення в прискореному більш, ніж у 10 разів часі вектора $x(t_v)$ прогнозованого стану рухливого об'єкта, з метою визначення небезпеки зіткнення з іншими об'єктами. У цих випадках обчислення вектора $x(t_v)$ є обов'язковим, а застосування зміщених перетворень дає додаткові переваги, в порівнянні з основними, тому що вектор прогнозованого стану $x(t_v)$ обчислюється за системою кінцевих рівнянь одночасно з вектором поточного оптимального керування $u^*(t_0, A)$.

Переваги застосування усунутих диференціальних перетворень, у порівнянні з основними, збільшуються в задачах оптимального керування на значних інтервалах часу $[0, T]$, наприклад, в процесі синтезу алгоритмів оптимального керування аерокосмічними літальними апаратами [11]. У цьому випадку застосування основних диференціальних перетворень потребує розбиття великого інтервалу часу $[0, T]$ на L підінтервалів [7–9]. Використання зміщених диференціальних перетворень зменшує вдвічі кількість підінтервалів розбиття інтервалу $[0, T]$ за умови однакової точності розв'язку, одержаної зміщеними та основними перетвореннями.

Зміщені диференціальні перетворення також дозволяють реалізувати в реальному і прискореному часі адаптивне керування динамічними і рухомими об'єктами із врахуванням обмежень на вектор керування і фазову траєкторію руху об'єкта керування [1].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Баранов В.Л.* Дифференциально-тейлоровская модель оптимальных процессов управления // Электронное моделирование. – 2000. – № 5. – С. 3–11.
2. *Баранов В.Л.* Моделирование задач оптимального управления на графах и спектральных моделях // Электронное моделирование. – 1990. – № 5. – С. 3–8.
3. *Батенко А.П.* Системы терминального управления. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.
4. *Батенко А.П.* Управление конечным состоянием движущихся объектов. – М.: Сов. радио, 1977. – 256 с.
5. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
6. Моделирование задач терминального управления методом дифференциальных преобразований / В.Л. Баранов, О.С. Уруский, Г.Л. Баранов, Е.Ю. Комаренко // Там же. – 1995. – № 2. – С. 12–16.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 419 с.
8. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
9. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наук. думка, 1988. – 216 с.
10. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.* Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
11. Синтез алгоритмів оптимального керування аерокосмічними літальними апаратами / Г.Л. Баранов, В.Л. Баранов, О.С. Уруський, О.Ю. Комаренко // Космічні і земні орбіти Ю.В. Кондратюка (О.Г. Шаргея). – Дніпропетровськ: Січ, 1996. – С. 374–375.
12. *Трухаев Р.И.* Методы инфлюентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.
13. *Уруский О.С., Баранов В.Л.* Синтез замкнутых законов терминального управления на основе дифференциальных преобразований // Там же. – 1996. – № 3. – С. 3–8.

ФРОЛОВА Олена Геннадіївна – аспірантка Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.

Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– диференціальні перетворення.

Подано 5.06.2001

УДК 681.51:519.95

Моделирование оптимальных процессов управления смещенными дифференциальными преобразованиями / Е.Г. Фролова

Предложен метод моделирования оптимальных процессов управления, построенный на смещенных дифференциальных преобразованиях. Приведен пример моделирования.

УДК 681.51:519.95

Simulation of optimal control processes by displacement differential transforms / E.G. Frolova

The simulation method of optimal control problems is proposed. It is based on the displacement differential transforms of mathematical models. The simulation example is presented.

Фролова О.Г. Моделювання оптимальних процесів керування зміщеними диференціальними перетвореннями

Фролова Е.Г. Моделирование оптимальных процессов управления смещенными дифференциальными преобразованиями

Frolova E.G. Simulation of optimal control processes by displacement differential transforms