УДК 656.61.052

В.В. Сєнакосов, наук. співр.
НДІ «Квант – Навігація»

СИСТЕМОАНАЛОГОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ СУДНА

(Представлено д.т.н. В.Л. Барановим)

Запропонована системоаналогова модель руху судна, заснована на концепції системоаналогового моделювання і математичному апараті диференціальних перетворень. Показано, що системоаналогова модель встановлює точний зв'язок між поточним і станом судна, що прогнозується, у вигляді системи кінцевих рівнянь.

Підвищення інтенсивн ості судноплавства, збільшення швидкості суден в умовах природних і навігаційних обмежень вимагають підвищення точності математичного моделювання в процесі руху судна. Спрощені моделі, засновані на лінеаризації рівнянь руху, не задовольняють сучасним вимогам автоматизації судноводіння.

Нелінійні моделі руху судна найбільш адекватно описують маневрування суден в процесі судноводіння та при рішенні задач попередження зіткнень.

У процесі рішення задач судноводіння моделювання нелінійної динаміки руху судна необхідно реалізувати в реальному часі. Автоматизація рішення попередження зіткнень суден вимагає моделювати рух суден в прискореному часі з метою прогнозування динаміки ситуацій, що виникають при маневруванні суден [1]. Вимога моделювання в реальному і прискореному часі складної нелінійної системи диференціальних рівнянь, що описує рух судна і зовнішньої обстановки, що включає навігаційні обмеження і траєкторії руху зустрічних суден, можуть перевищувати можливості суднових ЕОМ, що мають обмежені характеристики щодо швидкодії і об'єму пам'яті.

У роботі пропонується вирішити проблему моделювання нелінійних диференціальних рівнянь руху суден в реальному часі на основі концепції системоаналогового моделювання [2] і математичного апарату диференціальних перетворень [3–5].

Системоаналогова модель будується на основі декількох моделей руху одного і того ж об'єкта моделювання. Кожна модель описує рух судна на основі різної інформації. Об'єднання декількох моделей з урахуванням взаємозв'язків в рамках системоаналогової моделі дозволяє значно підвищити швидкість і точність моделювання.

У даній статті для побудови системоаналогової моделі використовуються дві математичні моделі руху судна. Одна модель у формі нелінійних диференціальних рівнянь записується в прямому, а інша – в зворотному часі. Використання математичного апарату диференціальних перетворень дозволяє виключити з обох моделей параметр часу і встановити точний зв'язок між поточним і станом судна, що прогнозується, у формі системи кінцевих рівнянь. Ця система може бути зведена методом Ньютона до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, рішення яких не викликає обчислювальних труднощів для ЕОМ.

З метою побудови системоаналогової моделі початкова математична модель руху судна, яка описується нелінійними диференціальними рівняннями, переводиться в область зображень, де відсутній аргумент часу. Переклад функцій часу $x(t)$ в область зображень здійснюється диференціальними перетвореннями [3–5]

$$\underline{x}(t) = X(K, t_{i-1}) = \frac{H^K}{K!}\left[\frac{d^K x(t_{i-1}+\tau)}{d\tau^K}\right]_{\tau=0}, \qquad (1)$$

де $X(K,t_{i-1})$ – позначення диференціального зображення оригіналу, у вигляді дискретної функції цілочисельного аргумента $K = 1, 2, \ldots$;

t_{i-1} – фіксований момент часу;

τ – локальний аргумент часу, значення якого вибирають в межах $0 \le \tau \le H$;

H – масштабна постійна, що має розмірність часу та визначає відрізок аргумента часу, на якому розглядається функція $x(t_{i-1}+\tau)$, величина H повинна бути меншою радіуса збіжності рядів Тейлора в околиці точки t_{i-1}:

У виразі (1) риска під функцією часу $x(t)$ означає пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $x(t)$ знайти зображення $X(K,t_{i-1})$. Зворотне перетворення відновлює оригінал $x(t_{i-1}+\tau)$ у вигляді ряду Тейлора з центром в точці $t = t_{i-1}$

$$\underline{x}(t_{i-1}+\tau) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{H}\right)^K X(K, t_{i-1}). \qquad (2)$$

Зображення $X(K,t_{i-1})$ складають диференціальний спектр. Значення $X(K,t_{i-1})$ при конкретних значеннях аргумента $K = 1, 2, \ldots$ називаються дискретами диференціального спектру. Зворотне перетворення (2) встановлює зв'язок між диференціальним спектром $X(K,t_{i-1})$, $K = 1, 2, \ldots$ і оригіналом у вигляді функції часу $x(t_{i-1}+\tau)$.

Ефективність застосування диференціальних перетворень (1) до моделювання руху суден досягається тим, що в області зображень обчислення дискрет диференціальних спектрів здійснюється за рекурентними виразами, а відновлення функцій часу $x(t_{i-1} + \tau)$ в точках $\tau = H$ виконується згідно з (2) шляхом алгебраїчного підсумовування дискрет диференціального спектру $X(K, t_{i-1})$. У цьому випадку виключається чисельне інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, що описують динаміку руху суден.

Недолік відновлення параметрів руху суден в області часу за виразом (2) полягає у вимозі підсумовування нескінченної кількості дискрет диференціального спектру. На практиці кількість дискрет диференціального спектру, які враховуються, обмежується, виходячи з вимог заданої точності. Але у цьому випадку моделювання руху судна здійснюється приблизно.

Побудуємо на основі концепції системоаналогового моделювання точну модель руху судна на обмеженій кількості дискрет диференціального спектра.

Припустимо, що математична модель руху судна описується векторним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = f\left[x(t), u(t)\right], \quad x(t_0) = x_0, \; t \in [t_0, t_N], \tag{3}$$

де x – n-мірний вектор стану;

u – m-мірний вектор управління ($m < n$).

Інтервал часу $[t_0, t_N]$, на якому необхідно визначити j-у компоненту вектора стану $x_j(t)$, покриваємо сіткою із змінним кроком H_{ji}:

$$t_i = t_{i-1} + H_{ji}, \quad i = \overline{1, N} \; . \tag{4}$$

Кількість підінтервалів, на які розбивається інтервал $[t_0, t_N]$, вибирається парним. У околиці довільної точки t_i розглянемо окремо два підінтервали $[t_{i-1}, t_i]$ і $[t_i, t_{i+1}]$. На підінтервалі $[t_{i-1}, t_i]$ динаміка руху судна описується математичною моделлю (3), яка переводиться в область зображень диференціальними перетвореннями (1). На другому підінтервалі $[t_i, t_{i+1}]$ вводимо в диференціальне рівняння руху судна (3) замість t зворотний аргумент $\theta = t_{i+1} - t$. У результаті отримаємо нелінійне диференціальне рівняння руху судна (3) у вигляді моделі:

$$\frac{d\bar{x}}{d\theta} = -\bar{f}\left[\bar{x}(\theta), \; \bar{u}(\theta)\right], \quad x(\theta_0) = x(t_{i+1}), \tag{5}$$

де риска над символами означає, що відповідні змінні і функції розглядаються за зворотним аргументом θ. Математичну модель (5) переводимо в область зображень диференціальними перетвореннями наступного вигляду:

$$\bar{X}(K, t_{i+1}) = \frac{\bar{H}^K}{K!}\left[\frac{d^K \bar{x}(t_{i+1} - \theta)}{d\theta^K}\right]_{\theta=0} . \tag{6}$$

Відновлення функції $x(t_{i+1} - \theta)$ здійснюється за дискретами диференціального спектру $X(K,t_{i+1})$ згідно з виразом:

$$\bar{x}(t_{i+1} - \theta) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{\theta}{\bar{H}}\right)^K \bar{X}(K, t_{i+1}) . \tag{7}$$

Значення функції $x(t)$ в точці $t = t_i$ можна отримати зворотними перетвореннями (2) диференціального спектру $X(K, t_{i-1})$ при $\tau = H$ або за виразом (7) на основі диференціального спектру $\bar{X}(K, t_{i+1})$ при $\theta = \bar{H}$:

$$x(t_i) = \sum_{K=0}^{\infty} X(K, t_{i-1}) = \sum_{K=0}^{\infty} \bar{X}(K, t_{i+1}) . \tag{8}$$

Вираз (8) перетворюємо до вигляду:

$$\sum_{K=0}^{m_1} X(K, t_{i-1}) = \sum_{K=0}^{m_2} \bar{X}(K, t_{i+1}) ; \tag{9}$$

$$R_i = \bar{R}_i , \tag{10}$$

де $R_i = \sum\limits_{K=m_1+1}^{\infty} X(K, t_{i-1})$; $\bar{R}_i = \sum\limits_{K=m_2+1}^{\infty} \bar{X}(K, t_{i+1})$.

Представлення виразу (8) у вигляді системи рівнянь (9), (10) допустимо при умові однакових знаків залишків рядів Тейлора R_i і $\bar{R}_i$. Рівняння (9) визначає на кінцевому числі дискрет диференціальних спектрів $X(K,t_{i-1})$ і $\overline{X}(K,t_{i+1})$ точний математичний зв'язок між значеннями функцій $x(t)$ в точках t_{i-1} і t_{i+1}. Точний зв'язок встановлюється завдяки взаємній компенсації залишків R_i і $\overline{R}_i$ рядів Тейлора при виконанні умови (10).

Відомо, що залишки рядів Тейлора точно виражаються у формах Лагранжа і Ейлера–Лагранжа:

$$R_i = \frac{H^{m_1+1}}{(m_1+1)!} x^{(m_1+1)}(t_{i-1}^*) = \frac{H^{m_1+1}}{m_1!}\int_0^1 (1-\alpha)^{m_1} x^{(m_1+1)}(t_{i-1}+\alpha H)d\alpha\,; \tag{11}$$

$$\overline{R}_i = \frac{\overline{H}^{m_2+1}}{(m_2+1)!} x^{(m_2+1)}(t_{i+1}^*) = \frac{\overline{H}^{m_2+1}}{m_2!}\int_0^1 (1-\overline{\alpha})^{m_2} x^{(m_2+1)}(t_{i+1}+\overline{\alpha}\overline{H})d\overline{\alpha}\,, \tag{12}$$

де $t_{i-1}^* \in [t_{i-1}, t_i]$; $t_{i+1}^* \in [t_i, t_{i+1}]$.

З урахуванням виразів (11), (12) рівняння (10) дозволяє вибрати довжину підінтервалу H і $\overline{H}$, які забезпечують повну компенсацію залишків рядів Тейлора R_i і $\overline{R}_i$. Таким чином, системоаналогова модель (9), (10) дозволяє без інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь руху судна (3) або (5) за значенням вектора стану $x(t_{i-1})$ в точці t_{i-1} прогнозувати вектор стану $x(t_{i+1})$ в точці t_{i+1}, оскільки дискрети диференціального спектру $X(K,t_{i-1})$ залежать від вектора стану $x(t_{i-1})$, а $\overline{X}(K,t_{i+1})$ – від $x(t_{i+1})$. Якщо довжина інтервалів $H = t_i - t_{i-1}$ і $\overline{H} = t_{i+1} - t_i$ задовольняє рівнянню (10) і виразам (11), (12), то рівняння (9) є точною математичною моделлю, що описує зміни параметрів судна в процесі його руху. Рівняння (9) не містить аргумента часу і не завдає обчислювальних труднощів для рішення його на ЕОМ. Виконаємо побудову системоаналогової моделі руху судна.

Розглянемо рівняння руху судна в горизонтальній площині [7], записані у зв'язаній системі координат:

$$\begin{aligned}
&-\rho V(1+K_{11})\frac{d\upsilon}{dt} + \rho V(1+K_{11})\upsilon\beta\frac{d\beta}{dt} - \rho V(1+K_{22})\upsilon\omega\beta - \\
&-C_{x_0}\frac{\rho}{2}\upsilon^2 F_Д - C_{x_p}\frac{\rho}{2}\upsilon^2 S_П + T_x = 0;\\
&\rho V(1+K_{22})\beta\frac{d\upsilon}{dt} + \rho V(1+K_{22})\upsilon\frac{d\beta}{dt} - \rho V(1+K_{11})\upsilon\omega + \\
&+(C_y^\beta\beta + C_2\beta^2)\frac{\rho}{2}\upsilon^2 F_Д - \mu_k\left[\alpha - \chi_П(\beta + \frac{\varepsilon L}{\upsilon}\omega)\right]\frac{\rho}{2}\upsilon^2 S_П = 0;\\
&-I(1+K_{66})\frac{d\omega}{dt} + C_m^\beta\frac{\rho}{2}\upsilon^2 F_Д L\beta - C_m^\omega\frac{\rho}{2}\upsilon F_Д L^2\omega + \\
&+\mu_k l_p\left[\alpha - \chi_П(\beta + \frac{\varepsilon L}{\upsilon}\omega)\right]\frac{\rho}{2}\upsilon^2 S_П = 0;\\
&\upsilon(0) = \upsilon_0,\ \beta(0) = \beta_0,\ \omega(0) = \omega_0,
\end{aligned} \tag{13}$$

де α – кут перекладки стерна; $\chi_П$ – приведений коефіцієнт впливу корпусу і гвинта на стерно; $S_П$ – приведена площа стерна; C_{x_p} - коефіцієнт опору стерна; K_{11}, K_{22}, K_{66} – коефіцієнти приєднаної маси; ρ – щільність води; V – об'ємна водотоннажність судна; C_{x_0} – коефіцієнт опору води руху судна на прямому курсі; $F_Д$ – приведена площа зануреної частини діаметральної площини судна; C_y^β, C_2 – коефіцієнти нормальної сили корпусу; μ_k – коефіцієнт бічної сили стерна; ε – відносне відстояння стерна від мідель-шпангоута; C_m^β – коефіцієнт моменту корпусу; L – довжина судна по ватерлінії; C_m^ω – коефіцієнт демпферуючого моменту; l_p – відстояння стерна від мідель-шпангоута; T_x – тяга гребних гвинтів судна; l – момент інерції маси судна; υ – швидкість судна; β – кут дрейфу; ω – кутова швидкість обертання судна.

Математичну модель (13) руху судна перетворюємо з урахуванням введених позначень до вигляду:

$$\begin{aligned}
&-\frac{d\upsilon}{dt} + q\frac{d\beta}{dt} = a_1 q\omega + a_2 w + a_3 T_{x;};\\
&\beta\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{d\beta}{dt} = a_4\upsilon\omega - a_5\beta w - a_6 q^2 - a_7\omega\upsilon + a_8 w\alpha;\\
&\frac{d\omega}{dt} = a_9\beta w - a_{10}\upsilon\omega + a_{11}w\alpha;\\
&q = \upsilon\beta,\ w = \upsilon^2,\ \upsilon(0) = \upsilon_0,\ \beta(0) = \beta_0,\ \omega(0) = \omega_0,
\end{aligned} \tag{14}$$

де коефіцієнти рівнянь визначаються виразами:

$$a_1 = \frac{1+K_{22}}{1+K_{11}};\ a_2 = \frac{C_{x_0}F_Д + C_{x_p}S_П}{2V(1+K_{11})};\ a_3 = \frac{1}{\rho V(1+K_{11})};\ a_4 = \frac{1}{a_1};$$

$$a_5 = \frac{C_y^{\beta}F_Д + \mu_k \chi_П S_П}{2V(1+K_{22})};\ a_6 = \frac{C_2 F_Д}{2V(1+K_{22})};\ a_7 = \frac{\mu_k \chi_П \varepsilon L S_П}{2V(1+K_{22})};$$

$$a_8 = \frac{\mu_k S_П}{2V(1+K_{22})};\ a_9 = \frac{\rho(C_m^{\beta}F_Д L - \mu_k l_p \chi_П S_П)}{2I(1+K_{66})};$$

$$a_{10} = \frac{\rho(C_m^{\omega}F_Д L^2 + \mu_k l_p \chi_П \varepsilon L S_П)}{2I(1+K_{66})};\ a_{11} = \frac{\rho \mu_k l_p S_П}{2I(1+K_{66})}.$$

Застосувавши диференціальні перетворення (1) до системи рівнянь (14), отримаємо модель руху судна в формі рекурентних виразів:

$$\begin{aligned}
&-\frac{K+1}{H}\upsilon(k+1) + \sum_{l=0}^{l=K} q(K-l)\frac{l+1}{H}\beta(l+1) = a_1\sum_{l=0}^{l=K} q(K-l)\omega(l) + a_2 w(K) + a_3 T_x(K);\\
&\sum_{l=0}^{l=K}\beta(K-l)\frac{l+1}{H}\upsilon(l+1) + \sum_{l=0}^{l=K}\upsilon(K-l)\frac{l+1}{H}\beta(l+1) = a_4\sum_{l=0}^{l=K}\upsilon(K-l)\omega(l) -\\
&-a_5\sum_{l=0}^{l=K}\beta(K-l)w(l) - a_6\sum_{l=0}^{l=K}q(K-l)q(l) - a_7\sum_{l=0}^{l=K}\omega(K-l)\upsilon(l) + a_8\sum_{l=0}^{l=K}w(K-l)\alpha(l)\\
&\omega(K+1) = \frac{H}{K+1}\left[a_9\sum_{l=0}^{l=K}\beta(K-l)w(l) - a_{10}\sum_{l=0}^{l=K}\upsilon(K-l)\omega(l) + a_{11}\sum_{l=0}^{l=K}w(K-l)\alpha(l)\right];\\
&q(K) = \sum_{l=0}^{l=K}\upsilon(K-l)\beta(l),\ w(K) = \sum_{l=0}^{l=K}\upsilon(K-l)\upsilon(l);\\
&\upsilon(0) = \upsilon_0,\ \beta(0) = \beta_0,\ \omega(0) = \omega_0,\ q(0) = \upsilon_0\beta_0,\ w(0) = \upsilon_0^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Надаючи цілочисельні значення $K = 0, 1, 2, ...,$ за диференціально-тейлорівською моделлю (6) визначаємо диференціальні спектри швидкості судна $\upsilon(K,t_{i-1})$, кута дрейфу $\beta(K,t_{i-1})$ і кутової швидкості обертання судна $\omega(K, t_{i-1})$ в точці t_{i-1}.

Щоб знайти диференціальні спектри швидкості судна $\overline{\upsilon}(K,t_{i+1})$, кута дрейфу $\overline{\beta}(K,t_{i+1})$ і кутової швидкості $\overline{\omega}(K,t_{i+1})$ в точці t_{i+1}, необхідно в правих частинах перших трьох рівнянь (15) поміняти знаки на протилежні і замість довжини першого підінтервалу $H = t - t_{i-1}$ підставити довжину другого підінтервалу. Послідовно надаючи цілочисельні значення $K = 0, 1, 2, ...$ рекурентним засобом рахують диференціальні спектри, $\overline{\upsilon}(K,t_{i+1})$, $\overline{\beta}(K,t_{i+1})$ і $\overline{\omega}(K,t_{i+1})$ від початкових дискрет $\overline{\upsilon}(0) = \upsilon(t_{i+1})$, $\overline{\beta}(0) = \beta(t_{i+1})$, $\overline{\omega}(0) = \omega(t_{i+1})$. Системоаналогова модель руху судна формується шляхом підстановки диференціальних спектрів в точках t_{i-1} і t_{i+1} у вираз (9), яке являє собою систему кінцевих рівнянь, що зв'язує параметри руху судна, $\upsilon(t_{i-1})$, $\beta(t_{i-1})$ і $\omega(t_{i-1})$ в точці t_{i-1} з їх значеннями, що прогнозуються в точці t_{i+1}.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Радионов А.И., Сазонов А.Е.* Автоматизация судовождения. – М.: Транспорт, 1983. – 216 с.
2. *Баранов В.Л. Баранов Г.Л.* Системоаналоговое и квазианалоговое моделирование // Электрон. моделирование. – 1994. – 16. – № 4. – С. 9–16.
3. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 419 с.
4. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наук. думка, 1988. – 216 с.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
6. *Трухаев Р.И.* Методы инфлуентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.
7. *Войткунский Я.И., Першиц Р.Я., Титов И.А.* Справочник по теории корабля. Судовые движители и управляемость. – Л.: Судостроение, 1973. – 512 с.

СЄНАКОСОВ Віктор Вікторович – науковий співробітник науково дослідного інституту “Квант-Навігація”, Київ.

Наукові інтереси:
– моделювання.

Подано 12.09.01

Сєнакосов В.В. Системоаналогове моделювання руху судна
Сенакосов В.В. Системоаналоговое моделирование движения судна
Senakosov V.V. System-analog model motion of ship

УДК 656.61.052
Системоаналоговое моделирование движения судна / В.В. Сенакосов
Предложена системоаналоговая модель движения судна, основанная на концепции системоаналогового моделирования и математическом аппарате дифференциальных преобразований. Показано, что системоаналоговая модель устанавливает точную связь между текущим и состоянием судна судна, прогнозирующуюся в виде системы конечных уравнений.

УДК 656.61.052
System-analog model motion of ship / V.V. Senakosov
Proposed system-analog model motion of ship, based on differential transformation.