

УДК 519.67

Л.А. Рудюк, магістр  
№ 2. Вддддддд, к.т.н., доц.

Житомирський інженерно-технологічний інститут

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИК ДЖЕРЕЛ  
ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ В ПРЯМОКУТНИКУ

*Розглядається задача оптимізації розміщення джерел фізичного поля у випадку, коли область розміщення та джерела мають форму n-вимірних прямокутників, наводиться модифікація методу проєкції градієнта Розена для розв'язання цієї задачі. Описуються алгоритми повного та спрямованого перебору розв'язання задачі оптимізації розміщення джерел, наводяться порівняльні характеристики цих алгоритмів, такі як точність та часова складність.*

При проектуванні складних технічних систем в багатьох випадках виникає необхідність оптимального розміщення дискретних джерел фізичного поля. Поля можуть мати різноманітну природу (бути тепловими, силовими, електромагнітними та ін.).

Розглянемо наступну задачу.

Нехай фізичне поле, що індукується джерелами та навколишнім середовищем, описується крайовою задачею виду:

$$\Delta u - \beta^2 u = -f(x, Z), \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

де

$$f(x, Z) = \begin{cases} A^i(x - Z^i), & \text{якщо } x \in D_i \\ 0, & \text{якщо } x \notin \bigcup_{i=1}^m D_i \end{cases}$$

$Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  – параметр розміщення джерел;

$Z^i(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_n^i)$  – координати полюса  $i$ -го джерела;  $x \in R^n$ .

Необхідно знайти таке розміщення джерел – вектор  $Z(Z^1, Z^2, \dots, Z^m)$ , – щоб досягти екстремуму заданої функції цілі.

Як функція цілі або критерій якості можуть виступати різні характеристики фізичного поля. На практиці найчастіше зустрічаються наступні задачі розміщення джерел фізичного поля [3]:

- 1) розмістити в обмеженій області задане число джерел так, щоб досягти екстремального значення результуючого поля в заданій точці;
- 2) здійснити розміщення джерел поля в обмеженій області так, щоб максимальне значення поля в області було найменшим;
- 3) розмістити в обмеженій області на задані посадкові місця задану кількість джерел фізичного поля таким чином, щоб досягти екстремального значення деякої характеристики поля;
- 4) здійснити розміщення джерел так, щоб об'єм займаної області був мінімальним;
- 5) розмістити в обмеженій області задане число з'єднаних між собою деякою мережею джерел поля таким чином, щоб довжина єдиної мережі була мінімальною;
- 6) в обмеженій області здійснити розміщення заданого числа джерел поля так, щоб максимальне зі значень поля в полюсах джерел було найменшим;
- 7) розмістити задане число джерел поля в обмеженій області так, щоб різниця між максимальним і мінімальним значеннями поля в області була мінімальною.

На розміщення джерел накладаються геометричні обмеження, які являють собою [1]:

– умови взаємного неперетинання джерел поля;

– умови належності джерел області  $\Omega$ .

Якщо між джерелами  $D_i$  і  $D_j$  задана мінімально можлива відстань  $l_{ij}$ , а між джерелом  $D_i$  і кордоном  $\Gamma$  області  $\Omega$  –  $l_i$ , то наведені геометричні обмеження мають вигляд наступних співвідношень:

$$\rho_{ij}(D_i, D_j) - l_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad j = i+1, \dots, m,$$

$$\rho_i(\Gamma, D_i) - l_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Положення  $i$ -го джерела у просторі визначається координатами його полюса  $Z^i$ . Таким чином, обмеження на розміщення джерел в області  $\Omega$  представляються у загальному випадку системою відповідних нерівностей:

$$\begin{cases} \varphi_{ij}(Z^i, Z^j, I_{ij}) \leq 0 & i = 1, \dots, m-1; \quad j = i+1, \dots, m. \\ \psi_i(Z^i, I_i) \leq 0 & i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (1)$$

Система обмежень (1) задає  $G$  – область зміни параметра  $Z$ , який визначає розміщення  $m$  джерел.

Отже, поставлена задача зводиться до відшукування екстремуму функції цілі  $\chi(Z)$  на множині  $G$ .

Тобто задача має наступний вигляд:

$$\chi(Z) = u(x_0, Z) \rightarrow \text{extr}, \quad (2)$$

$$Z \in G. \quad (3)$$

Ця задача має вимірність  $n \cdot m$  ( $n$  – вимірність простору, що містить  $\Omega$ ,  $m$  – кількість джерел), складну множину припустимих розв’язків та багатоекстремальну функцію цілі.

Розглянемо випадок, коли область  $\Omega$  і джерела фізичного поля  $D_1, D_2, \dots, D_m$  мають вигляд  $n$ -вимірних прямокутників, а функція цілі  $\chi(Z)$  являє собою значення поля в заданій точці області  $\Omega$ .

Айааааіі, уі аеу аеіаае³а едаеіаеө çааа÷ ае³іоè÷ííаі оа іадааіе³÷ííаі оеі³а діçа³ үçеè оèð çааа÷ іаіадааіі аèððаіа³еіааі³ çа іадаіадааіе діçі³уаііу аæадае [2]. Іоæа, оіоіè³у іаòè (2) оаеіае іаіадааіі аèððаіа³еіааіа іі Z.

Докладніше розглянемо множину припустимих розв’язків задачі  $G$ . Як було зазначено раніше, ця множина задається умовами неперетинання джерел і умовами належності джерел області розміщення  $\Omega$ .

Умови взаємного неперетинання джерел  $D_1, D_2, \dots, D_m$  у випадку, що розглядається, можна записати так:

якщо розмір  $k$ -го ( $k = 1, \dots, m$ ) джерела задається вектором  $L^k(l_1^k, l_2^k, \dots, l_n^k)$ , то для кожної пари  $D_s, D_p$  джерел існує хоча б одне  $i$  таке, що

$$|\xi_i^s - \xi_i^p| \geq \frac{l_i^s + l_i^p}{2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, m, \quad p = 1, \dots, m, \quad s \neq p. \quad (4)$$

Умови належності джерела поля області  $\Omega$  мають наступний вигляд:

нехай розмір області  $\Omega$  визначається вектором  $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , тоді для кожного джерела  $D_j$  виконується:

$$\frac{l_i^j}{2} \leq \xi_i^j \leq a_i - \frac{l_i^j}{2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Наведені обмеження (4), (5) описують множину припустимих розв’язків поставленої задачі оптимізації розміщення джерел фізичного поля  $G$ , яка має складну багатозв’язну структуру. Це робить неможливим застосування відомих методів умовної оптимізації до розв’язання наведеної задачі.

Але множину припустимих розв’язків  $G$  можна представити у вигляді об’єднання опуклих  $n$ -вимірних багатогранників  $G_i$ :

$$G = \bigcup_{i=1}^r G_i,$$

аа  $r = (2n)^{C_m^2}$  – кількість багатогранників.

Еіаеіеè ааааоіадаііеè інеñó³оуну інеñаіір е³і³еіеð іаð³аііñоае, е³еуè³ñоу уеèð çаеаæеòу а³а е³еуèіñо³ аæадае ð³çè÷íаі ііеу та діçі³ðíñò³ іðíñòíðò³ ñоаііаеòу

$$N = C_m^2 + 2 \cdot m \cdot n.$$

Оаèèè ÷еíіі, розв’язання задачі ііòèі³çаò³çі неперервно диференційованої функції цілі  $\chi(Z)$  на складній множині припустимих розв’язків можна замінити розв’язанням  $r$  і³çааа÷ оптимізації тієї ж функції цілі на еіаеі³е ç і³аііаеі  $G_i$ , уè³ уаеурòу ііаір ііоèè³ ааааоіадаііеèè:

$$\chi(Z) = u(x_0, Z) \rightarrow \text{extr}, \quad Z \in G_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (6)$$

До розв’язку кожної з таких задач можна застосувати різні методи умовної оптимізації. Один з них – метод проекції градієнта Розена.

Розглянемо докладніше процес побудови підмножини множини припустимих розв’язків [5], на якій буде розв’язуватись задача оптимізації розміщення джерел фізичного поля методом Розена.

Як було сказано вище, два джерела  $D_s$  і  $D_p$  не перетинаються між собою, якщо для них хоча б по одній координаті  $\xi_i$  виконується умова (4).

Цю нерівність можна представити в наступному вигляді:

$$\left( \xi_i^s - \xi_i^p \geq \frac{l_i^s + l_i^p}{2} \right) \vee \left( \xi_i^p - \xi_i^s \geq \frac{l_i^s + l_i^p}{2} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Можна сказати, що перша нерівність з (7) визначає, що джерело  $D_s$  повинно знаходитися “справа” від джерела  $D_p$  по відповідній осі і не перетинати його, а друге – відповідно “зліва”.

Таким чином, існує всього  $2n$  типів нерівностей, що визначають умови неперетинання двох джерел. Кожній такій нерівності можна поставити у відповідність число з інтервалу  $0 \dots 2n - 1$ .

Отже, умову неперетинання всіх джерел можна задати вектором розміреності  $r = (2n)^{c_m}$  ( $r$  – кількість підзадач), кожен елемент якого – це число з інтервалу  $0 \dots 2n - 1$ .

Для побудови підмножини  $G_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) множини припустимих розв'язків необхідно перевести число  $i$  в  $2n$  – річну систему числення, а потім реалізувати механізм перетворення його запису в побудову відповідних нерівностей, що визначають умови неперетинання джерел.

Потім до побудованих умов додаються нерівності, що визначають умову приналежності джерел області  $\Omega$ .

Наведемо схему методу проекції градієнта Розена для випадку, коли множина припустимих розв'язків – опуклий багатогранник  $G_i$ , що задається лінійними нерівностями [6].

Як відомо, напрямком найшвидшого спуску є антиградієнт функції цілі. Але при наявності обмежень рух вздовж напрямку найшвидшого спуску може привести в неприпустимі точки. В методі проекції градієнта Розена антиградієнт проектується на множину припустимих розв'язків у вектор, при русі вздовж якого значення функції цілі покращується і водночас зберігається припустимість точок траєкторії.

Введемо наступні позначення:

$A$  – матриця коефіцієнтів системи лінійних нерівностей, які задають підмножину  $G_i$ ;

$b$  – матриця-стовпчик вільних членів системи лінійних нерівностей, які задають підмножини  $G_i$ ;

$E$  – одинична матриця;

$d_k$  – вектор спуску;

$P$  – матриця проектування<sup>1</sup>.

### Алгоритм методу проекції градієнта Розена

*Початковий етап*

Задається точка  $Z^0 \in G_i$ . Представимо матриці  $A$  і  $b$  у вигляді  $(A_1, A_2)$  і  $(b_1, b_2)$  відповідно, де  $A_1 Z^0 = b_1, A_2 Z^0 < b_2$ . Приймемо  $k = 1$  та перейдемо до основного етапу.

*Основний етап*

*Крок 1.* Якщо  $A_1$  пуста (не містить жодного стовпчика), то покладемо  $P = E$ . В іншому випадку приймемо  $P = E - A_1^{-1}(A_1 A_1^T)^{-1}A_1$ . Знайдемо вектор спуску  $d_k = -P \nabla \chi(Z^k)$ . Якщо  $d_k \neq 0$ , то перейдемо до кроку 2. Якщо  $d_k = 0$  і  $A_1$  пуста, то зупинитися –  $Z^k$  – точка Кунна-Таккера. В іншому випадку ( $A_1$  не пуста) приймемо  $u = -(A_1 A_1^T)^{-1}A_1 \nabla \chi(Z^k)$ . Якщо  $u \geq 0$ , то зупинитися;  $Z^k$  – точка Кунна-Таккера. В іншому випадку виберемо від'ємну компоненту  $u_j$  цього вектора і перевизначимо матрицю  $A_1$ , викресливши рядок, який відповідає  $u_j$  і повторимо крок 1.

*Крок 2.* Сіадіаеодіуї іапдоііа іааеааііу  $Z^{k+1} = Z^k + \beta_k \cdot d_k$ , уеа іаеааеоді ідоіаір, уі аеодіаеоді с ді-еа  $Z^k$  іа° іаідоуііе ааеодіа  $d_k$ .  $\beta_k$  знаходиться з умови:

$$\beta_k = \arg \min \chi(Z^k + \beta d_k), \quad 0 \leq \beta \leq \beta_{max},$$

де

$$\beta_{max} = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } d^{\epsilon} \leq 0 \\ \min \left\{ \frac{\epsilon}{d_i} : d_i > 0 \right\}, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (8)$$

$$\epsilon = b_2 - A_2 Z^k, \quad d^{\epsilon} = A_2 d_k$$

Особливої уваги заслуговує проблема визначення кроку при спуску в наступне наближення до розв'язку задачі в п.2 алгоритму методу проекції градієнта Розена.

Для знаходження оптимального  $\beta$  на кожному кроці фактично необхідно розв'язувати задачу одновимірної оптимізації функції цілі.

Варто відзначити, що функція цілі задачі – це функція загального виду. Тобто немає сенсу знаходити  $\beta$  стандартними методами, такими як метод дихотомії чи симетричні методи, тому що вони розроблені для одноекстремальної функції цілі.

Для випадку функції цілі загального виду був запропонований наступний алгоритм знаходження оптимального кроку спуску:

- 1)  $k$ -ий крок, є наближення до розв'язку задачі  $x^k$ , вектор спуску –  $d_k$ ;
- 2) за формулою (8) знаходиться  $\beta_{max}$  – максимальний крок, який можна зробити по вектору спуску і не вийти за область припустимих розв'язків;
- 3) відрізок  $[0, \beta_{max}]$  розбивається на  $p$  інтервалів, обчислюється значення функції цілі в кожній із точок  $[x^k + j \cdot (\beta_{max}/p)]$ , де  $j = 1, \dots, p$ ;

<sup>1</sup> Матриця  $P$  порядку  $n \times n$  називається матрицею проектування, якщо  $P = P^T$  та  $PP = P$ .

4)обирається значення  $j = t$ , для якого значення функції цілі мінімальне; знаходиться крок спуску як  $\beta = t*(\beta_{max}/p)$ .

Як було показано вище, множина припустимих розв'язків поставленої задачі оптимізації має складну структуру і може бути представлена як об'єднання підмножин, кожна з яких являє собою випуклий багатогранник. Таке розбиття зробило можливим використання методу проекції градієнта Розена для розв'язання поставленої задачі оптимізації. Формально для того, щоб розв'язати задачу оптимального розміщення джерел на всій множині припустимих розв'язків, необхідно розв'язати на кожній з підзадач (6).

Точний алгоритм представляє собою розв'язання кожної з одержаних вище підзадач – розв'язання задачі повним перебором. Цей алгоритм практично непридатний для використання з ось яких міркувань.

Наведемо приклад розрахунку кількості підзадач оптимізації, які необхідно розв'язати для отримання оптимального розв'язку на всій множині припустимих розв'язків задачі в цьому випадку (табл. 1):

Таблиця 1

| Вимірність простору $n$ | 2  |      |         |          |
|-------------------------|----|------|---------|----------|
|                         | 3  | 4    | 5       | 6        |
| Кількість джерел $m$    | 3  | 4    | 5       | 6        |
| Кількість підзадач $r$  | 64 | 4096 | 1048576 | $2^{30}$ |

Як бачимо, вже у випадку 6 джерел кількість підзадач вже настільки велика, що їх всі розв'язати за якийсь прийнятний відрізок часу неможливо.

Цей алгоритм був реалізований з чисто наукових міркувань для порівняння його роботи з роботою алгоритму спрямованого перебору.

Алгоритм спрямованого перебору розв'язання задачі оптимізації розміщення джерел фізичного поля полягає в спрямованому переборі підмножин множини припустимих розв'язків: наступна підзадача для розв'язування обирається таким чином, щоб до її множини припустимих розв'язків  $G_k$  належав би розв'язок  $Z^{k-1*}$  попередньої підзадачі.

Спочатку знаходиться розв'язок першої підзадачі –  $Z^{1*}$ , тобто знаходиться розв'язок задачі оптимізації на першій підмножині множини припустимих розв'язків  $G_1$ , що задана системою лінійних нерівностей. Наступна підмножина множини припустимих розв'язків, на якій буде проводитись подальша оптимізація, визначається як підмножина, до якої належить розв'язок  $Z^{1*}$  і яка не співпадає з  $G_1$ . Якщо в результаті пошуків не знайдено жодної підмножини, відмінної від вихідної  $G_1$ , то процес розв'язання припиняється, оскільки знайдена точка не належить ніякій іншій підмножині області припустимих розв'язків. Точка  $Z^{1*}$  обирається розв'язком задачі. Інакше відшукується розв'язок задачі на знайденій  $G_i$ . За початкову точку при розв'язуванні цієї підзадачі обирається розв'язок попередньої підзадачі.

Якщо отриманий розв'язок підзадачі співпадає з розв'язком попередньої підзадачі, і всі підмножини, яким належить даний розв'язок, вже розглядалися, то процес розв'язання припиняється, і знайдений розв'язок останньої підзадачі обирається розв'язком задачі оптимізації. В іншому випадку знаходиться наступна підмножина, і процес розв'язування повторюється.

На основі вищенаведеного алгоритм модифікованого методу проекції градієнта Розена для розв'язання задачі оптимізації розміщення дискретних джерел фізичного поля має наступний вигляд:

1. Задається початкова точка  $Z^0 \in G_j$ ;  $i$  присвоюється значення 1.
2. Методом Розена знаходиться розв'язок задачі на підмножині  $G_i$ . Отримаємо точку  $Z^{i*}$ .
3. Знаходиться номер  $k$  підмножини припустимих розв'язків, якій належав би знайдений розв'язок  $Z^{i*}$  і виконувалася б умова  $k \neq i$ .
4. Якщо розв'язок  $Z^{i*}$  належить тільки підмножині  $G_i$ , то процес розв'язання припиняється, і знайдене наближення  $Z^{i*}$  приймається за розв'язок задачі. У противному випадку  $Z^{i*}$  вважається початковою точкою,  $i$  присвоюється значення  $k$  і здійснюється перехід до пункту 2 алгоритму.

Для підвищення ефективності роботи алгоритму спрямованого перебору можна робити кілька проб оптимізації, обираючи за початкову  $G_i$  різні підмножини з  $G_i, i = 1, \dots, r$ , а потім за розв'язок обрати найкращий.

В ході досліджень шляхом експерименту було проведено порівняння таких характеристик роботи алгоритмів, як часова складність і точність.

*Часова складність алгоритмів*

Максимальний час (в секундах) роботи алгоритмів розв'язку задачі розміщення джерел наведено в табл. 2.

Таблиця 2

| Алгоритм       | Кількість джерел |      |       |        |
|----------------|------------------|------|-------|--------|
|                | 1                | 2    | 3     | 4      |
| Повний перебір | 0,006            | 0,03 | 2,039 | 218,46 |

|                     |       |       |       |       |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| Спрямований перебір | 0,011 | 0,042 | 0,079 | 0,135 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|

*Графічні результати*

На рис. 1 представлені криві, які описують часову складність алгоритму повного та спрямованого переборів розв'язку задачі.

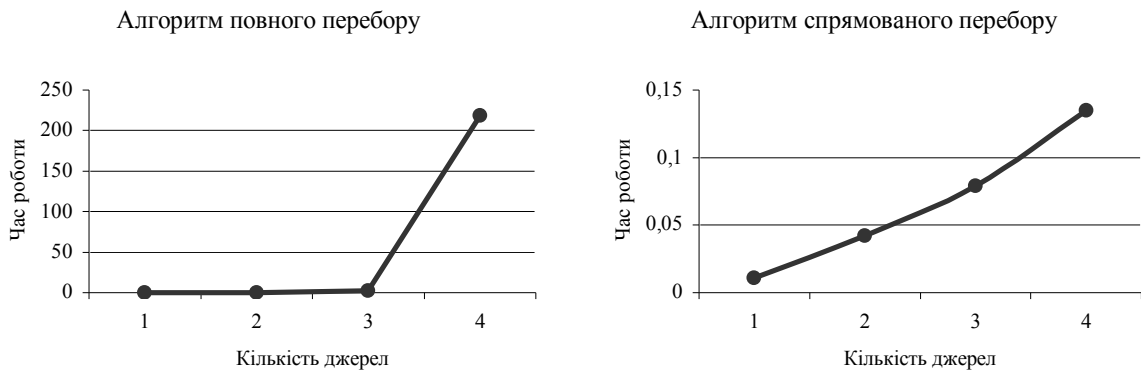


Рис. 1

Як бачимо, часова складність алгоритму повного перебору описується експоненціальним законом, в той час як часова складність алгоритму спрямованого перебору являє собою поліноміальну залежність.

*Точність роботи алгоритмів*

Максимальні відносні похибки (у відсотках) результатів розв'язку, отриманих алгоритмом спрямованого перебору, відносно результатів, отриманих алгоритмом повного перебору, наведено в табл. 3.

Таблиця 3

|                                | Кількість джерел |       |       |       |
|--------------------------------|------------------|-------|-------|-------|
|                                | 1                | 2     | 3     | 4     |
| Алгоритм спрямованого перебору | 0                | 16,81 | 18,41 | 19,73 |

*Графічні результати*

На рис. 2 наведена крива, що описує залежність відносної похибки результатів розв'язку, отриманих алгоритмом спрямованого перебору, відносно результатів, отриманих алгоритмом повного перебору (у відсотках), від розмірності задачі.

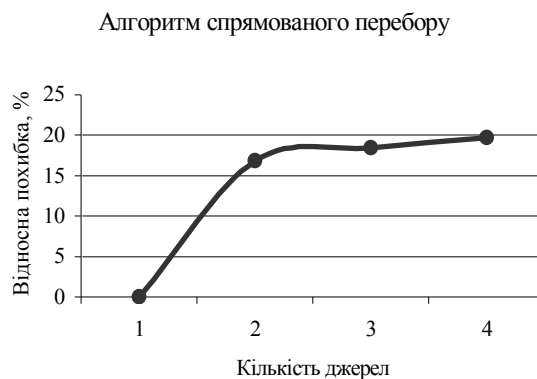


Рис. 2

Аналізуючи отримані результати, можна сказати, що алгоритм спрямованого перебору представляється цілком придатним для використання і за часовим, і за точнісним результатами.

**БІБЛІОГРАФІЯ:**

1. *Нодієв Д.А., Ісодуєв А.І.* Діагностика аварійних процесів в енергетичній системі. – Е.: Інститут енергетики, 1981. – 184 с.
2. *Нодієв Д.А., Бодієв Н.Е., Едієв А.А.* Аварійна ситуація в енергетичній системі // Вісник ЖІТІ. – 1995. – 10. – №. 38–40.
3. *Чувашева С.И.* Численные методы решения одного класса оптимизационных задач размещения источников физических полей. Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1984. – 107 с.

4. Жовновський Д.О., Співак А.В., Яремчук С.І. Модифікація методу умовного градієнта для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 9. / Технічні науки. – С. 248–253.

5. Агаєва І., Овдов'єва Е. Інженерія і інформаційні системи. – І.: Ієд, 1982. – 583 н.

РУДЮК Лідія Василівна – магістр, випускниця Аграрного університету імені Степана Бандери.

Інформація:

– інформація про автора;

– електронна адреса.

ВАНДЕР ПУТЕНДОРП – інженер з інформаційних систем, спеціаліст з інформаційних систем, спеціаліст з інформаційних систем, спеціаліст з інформаційних систем.

Інформація:

– інформація про автора;

– інформація про автора.

Подано 13.09.2001

