УДК 681.3

А.В. Панішев, д.т.н., проф.
Житомирський інженерно-технологічний інститут
О.М. Подоляка, асист.
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
О.О. Подоляка, к.т.н.
Харківський Національний автомобільного-дорожний університет

ЕФЕКТИВНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО РЕДАКТОРА

Пропонується алгоритм розв'язання узагальнення задачі про редактора. Алгоритм реалізує метод послідовної побудови локальних оптимальних рішень.

Узагальненням задач про оптимальне призначення, задачі про призначення з обмеженнями на час виконання робіт, мінімаксної задачі про призначення є задача побудови оптимального за швидкодією розкладу з n двоетапних робіт, що виконуються дворівневою системою машин, в якій перший рівень представлено єдиною машиною, а другий рівень складається з m паралельно діючих неідентичних машин [1].

Кожна робота i спочатку виконується на машині першого рівня протягом часу γ_i, а потім на паралельній машині j, $j=\overline{1,m}$, протягом часу β_{ij}^0, тому тривалості інших етапів робіт задаються матрицею $\left[\beta_{ij}^0\right]_{n\times m}$, де $\beta_{ij}^0=\infty$, якщо машина j не може виконати роботу i. В будь-який момент часу кожна машина зайнята виконанням лише однієї роботи. Початком розкладу є момент часу, коли всі n робіт готові до виконання на машині першого рівня.

У випадку $n>m$ задача побудови розкладу мінімальної довжини відноситься до класу NP-складних проблем навіть тоді, коли другий рівень системи представлено ідентичними машинами [2].

Розглянемо спочатку випадок $n=m$. Представивши кожну двоетапну роботу парою $\left(\gamma_i, \beta_{ij}^0\right)$, визначимо допустимий розклад виконання робіт як перестановку $\pi=\left(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(k), \ldots, \pi(m)\right)$ з m рядків матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$. Розклад π має довжину, що дорівнює

$$L(\pi)=\max_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le s\le m}}\left(\sum_{l=1}^{k}\gamma_{\pi(l)}+\beta_{\pi(k)s}\right), \tag{1}$$

де

$$\beta_{\pi(k)s}=\begin{cases}\beta_{ij}^0, \text{ якщо } \pi(k)=i \text{ та } s=j;\\ \infty \quad else\end{cases}$$

Необхідно знайти розклад π^* мінімальної довжини

$$L\left(\pi^*\right)=\min_{\pi} L(\pi).$$

Доповнимо дані задачі (1) рядком $\left[\eta_j\right]_{1\times m}$ чи стовпцем $\left[\eta_i\right]_{m\times 1}$ цілих невід'ємних чисел і оцінимо допустиме рішення, представлене перестановкою $\pi=(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m))$, штрафом

$$R(\pi)=\max_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le s\le m}}\left(\sum_{l=1}^{k}\gamma_{\pi(l)}+\beta_{\pi(k)s}+\sum_{l=k}^{m}\eta_{\pi(l)}\right).$$

Поставимо задачу знаходження на множині всіх перестановок елементів $\{1, 2,\ldots, m\}$ таку перестановку π^*, що

$$R\left(\pi^*\right)=\min_{\pi} R(\pi). \tag{2}$$

Послідовність π^* задає перестановочний розклад мінімальної довжини $R\left(\pi^*\right)$ в моделі упорядкування, ресурси якої складаються з $1+m+1$ машин трьох рівнів. На першому й третьому рівнях міститься по одній машині, а другий рівень представлений m паралельно діючими машинами, у загальному випадку різними як за функціональними можливостями, так і за швидкодією.

Система завдань для розглядуваного набору ресурсів визначається множиною з m триетапних робіт. Перший етап роботи i виконується на машині першого рівня протягом часу γ_i. Тривалість другого етапу дорівнює β_{ij}^0, якщо робота i призначена на машину j. В противному разі покладаємо, що час виконання другого етапу дорівнює ∞. Третій етап роботи i виконується на машині третього рівня. Його тривалість дорівнює η_j, якщо час роботи *i* залежить від машини *j*, і дорівнює η_i в противному разі. Тривалості інших етапів робіт задаються матрицею $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$, в котрій $\beta_{ij}^0 = \infty$, якщо робота *i* не може бути виконана на машині *j*.

В кожний момент часу робота виконується не більше, ніж на одній машині. Всі роботи готові до виконання в заданий момент часу $t = 0$, що визначає початок розкладу.

Якщо другий рівень системи ресурсів представлений ідентичними машинами, то робота *i*, $i = \overline{1, m}$, виконується на будь-якій з паралельних машин *j*, $j = \overline{1, m}$, протягом часу β_i. У цьому випадку множина завдань складається з робіт $(\gamma_i, \beta_i, \eta_i)$, $i = \overline{1, m}$, і необхідно побудувати на множині всіх перестановок з *m* робіт π розклад $\pi^*=(\pi^*(1), \pi^*(2),\ldots, \pi^*(m))$, що доставляє мінімум функції:

$$R^0(\pi) = \max_{1 \le k \le m}\left(\sum_{l=1}^{k} \gamma_{\pi(l)} + \beta_{\pi(k)} + \sum_{l=k}^{m} \eta_{\pi(l)}\right). \tag{2.1}$$

Задача пошуку $R^0(\pi)$ відома як задача про редактора і ефективно розв'язується за час O($mlog_2m$). Доведено, що функція $R^0(\pi)$ досягає мінімуму, якщо в π^* спочатку йдуть роботи з $\gamma_i \le \eta_i$ в порядку неубування величин $\gamma_i + \beta_i$, а потім роботи з $\eta_i \le \gamma_i$ у порядку незростання $\eta_i + \beta_i$ [3].

Зауважимо, що умови задачі про редактора допускають переривання робіт $(\gamma_i, \beta_i, \eta_i)$, $i = \overline{1, m}$, на момент завершення другого етапу, і тому послідовність перших етапів робіт, взагалі кажучи, відрізняється від послідовності третіх етапів. А значить, область пошуку розв'язку задачі не може обмежуватися множиною перестановочних розкладів. Очевидно, що зауваження стосується розглядуваного узагальнення у постановці (2).

З позицій теорії розкладів задачу можна віднести до маловивченої проблеми послідовно-паралельного упорядкування робіт в системах з неідентичними машинами [4]. Більшість задач, що стосуються проблеми оптимального розпаралелення робіт, містять наявні ознаки NP-складної комбінаторної задачі, які вказують на безперспективність знаходження ефективного способу мінімізації того чи іншого функціонала.

Покажемо, що задача (2) ефективно розв'язується. Пропонований тут метод виходить за межі способів рішення задачі про призначення і відрізняється від звісних алгоритмів оптимального розподілення робіт лише незначним збільшенням обсягу обчислень.

Метод міститься в послідовному покращенні допустимого рішення $\pi^0 = (\pi^0(1), \pi^0(2), \ldots, \pi^0(m))$, для побудови якого знадобиться матриця $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$, в котрій

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \gamma_i + \beta_{ij}^0, & \text{якщо } \gamma_{i \le} \eta_i, \\ \beta_{ij}^0 + \eta_j, & \text{якщо } \eta_j < \gamma_i. \end{cases}$$

Побудуємо послідовність $(\beta_{\pi^0(1)}, \beta_{\pi^0(2)}, \ldots, \beta_{\pi^0(m)})$ елементів з матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$ за допомогою наступних дій.

S1′. – вхідна матриця для знаходження допустимого рішення $\pi^0 = (\pi^0(1), \pi^0(2),\ldots, \pi^0(m))$; $l = m$.

S2′. В матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_l$ знайти мінімальний елемент β_{pq}. Якщо $\beta_{pq} = \gamma_p + \beta_{pq}^0$, то в шуканій послідовності $\beta_{pq}^0 = \beta_{\pi^0(m-l+1)}$. Якщо $\beta_{pq} = \beta_{pq}^0 + \eta_q$, то $\beta_{pq}^0 = \beta_{\pi^0(l)}$.

S3′. Видалити з матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_l$ рядок і стовпець, на перетині яких розташовується мінімальний елемент; покласти $l = l - 1$.

S4′. Якщо $l = 1$, то побудовано допустиме рішення π^0, інакше перейти до кроку S2′.

Не важко переконатися, що запропонована процедура практично не відрізняється від алгоритму Джонсона для розв'язання задачі двох верстатів [5]. Пов'язуючи з кожним елементом β_{pq}^0, вибраним з матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$, компоненту $(\gamma_p, \beta_{pq}^0, \eta_q)$, стає очевидною справедливість нерівності $R(\pi^0) \le R(\pi^{0'})$ на множині всіх послідовностей $\pi^{0'}$ з *m* компонент $(\gamma_p, \beta_{pq}^0, \eta_q)$.

Наведені процедури побудови допустимих рішень задачі являють собою першу фазу схеми побудови оптимальних розкладів.

На другій завершальній фазі схеми рішення задачі виконується процес перетворення послідовності $\pi^0 = (\pi^0(1), \pi^0(2),\ldots, \pi^0(m))$ у множину всіх оптимальних розкладів.

Елементу $\beta_{\pi^0(1)}$ послідовності $(\beta_{\pi^0(1)},\ \beta_{\pi^0(2)},\ \ldots,\ \beta_{\pi^0(m)})$ поставимо у відповідність матрицю $B_m = \left[\beta^0_{ij}\right]_m$, а елементу $\beta_{\pi^0(l)}$, $l = \overline{1, m}$ – матрицю B_{m-l+1} порядка $m - l + 1$, одержану з B_m виключенням всіх рядків і стовпців, що містять елементи $\beta_{\pi^0(1)},\ \beta_{\pi^0(2)},\ \ldots,\ \beta_{\pi^0(l-1)}$. В результаті з кожною підпослідовністю $(\beta_{\pi^0(l)},\ \beta_{\pi^0(l+1)},\ \ldots,\ \beta_{\pi^0(m)})$ можна розглядати послідовність матриць $B_{m-l+1},\ B_{m-l},\ \ldots,\ B_2,\ B_1$, де матриця B_k є підматрицею B_{k+1}, $k = \overline{1, m-l}$.

У запропонованій обчислювальній схемі рішення класу задач, що розглядаються, реалізовано ідею поетапної побудови всіх оптимальних перестановок $\pi^*_l = (\pi^*(l),\ \pi^*(l+1),\ \ldots,\ \pi^*(m))$ рядків матриці B_{m-l+1} з множини оптимальних перестановок $\pi^*_{l+1} = (\pi^*(l+1),\ \ldots,\ \pi^*(m))$ рядків матриці B_{m-l}. Процес такої побудови починається з розгляду матриці B_1, пов'язаної з послідовністю $(\beta_{\pi^0(m)})$, $\beta_{\pi^0(m)} = \beta^0_{i_1 j_1}$. Очевидно, матриця B_2 містить два допустимих рішення, одне з яких містить елементи $(\beta_{\pi^0(m-1)}) = \beta^0_{i_2 j_2},\ \beta_{\pi^0(m)}$, а в друге включено елементи $\beta^0_{i_1 j_2}$ і $\beta^0_{i_2 j_1}$.

Знаходження оптимальних рішень задачі пов'язане не тільки з вибором потрібних значень в матриці B_{m-l+1}, але й з побудовою з вибраних величин перестановок π^*_l, які мінімізують функціонали для вхідних даних, котрі визначає матриця B_{m-l+1}.

Локальне оптимальне рішення π^*_{m-1} в задачі (2) знаходиться після побудови перестановок π'_{m-1} та π''_{m-1}. Перестановка π'_{m-1} містить компоненти $(\gamma_{i_1}, \beta^0_{i_1 j_1}, \eta_{j_1})$, $(\gamma_{i_2}, \beta^0_{i_2 j_2}, \eta_{j2})$, а перестановка π''_{m-1} складається з компоненти $(\gamma_{i_1}, \beta^0_{i_1 j_2}, \eta_{j_2})$ та компоненти $(\gamma_{i_2}, \beta^0_{i_2 j_1}, \eta_{j_1})$. Елементи перестановок π'_{m-1} та π''_{m-1} упорядковані так, що кожна з них є рішенням задачі про редактора. Таким чином, локальному оптимальному рішенню π^*_{m-1} ставиться у відповідність величина

$$R^0(\pi_{m-1}) = \min\left(R^0(\pi'_{m-1}), R^0(\pi''_{m-1})\right).$$

Повний дводольний граф [6], побудований для матриці B_2, містить два досконалих зважених паросполучення, і, таким чином, дві перестановки, одержані в результаті оптимального упорядкування компонент, що в ній містяться.

Викладені міркування дозволяють розвинути ідею побудови сукупності всіх оптимальних локальних рішень $\pi^*_l = (\pi^*(l), \pi^*(l+1), \ldots, \pi^*(m))$ з множини всіх послідовностей $\pi^*_{l+1} = (\pi^*(l+1), \ldots, \pi^*(m))$, l=1, 2,…, m, співставляючи кожен раз матрицю B_{m-l+1} і її підматрицю B_{m-l}.

Розглянемо досконале паросполучення $\prod^*_{m-l}$ з m-l ребрами, що відповідає локальній оптимальній послідовності π^*_{l+1} значень $\beta_{\pi^*_{l+1}(k)}$, $k = \overline{l+1, m}$, вибраних з матриці B_{m-l}. Для кожного паросполучення $\prod^*_{m-l}$ побудуємо всі досконалі паросполучення $\prod_{m-l+1}$ з m-l+1 ребрами та вагами, взятими з матриці B_{m-l+1}. Побудову паросполучень $\prod_{m-l+1}$ будемо виконувати за допомогою наступних трьох способів:

а) безпосереднє додавання до $\prod^*_{m-l}$ ребра з вагою, що дорівнює $\beta_{\pi^0(l)} = \beta^0_{i_{m-l+1} j_{m-l+1}} \in \left\{i \middle| i = \overline{1, m}\right\}$, $j_{m-l+1} \in \left\{j \middle| j = \overline{1, m}\right\}$; (рис. 1):

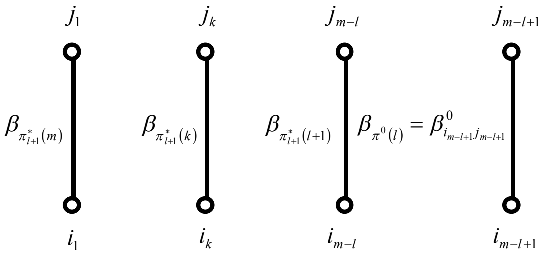

Рис. 1

б) додавання до $\prod^*_{m-l}$ двох ребер з вагами $\beta^0_{i_{m-l+1} q}$ і $\beta^0_{r j_{m-l+1}}$, $r \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{m-l}\}$, $q \in \{j_1, j_2, \ldots, j_{m-l}\}$, та виключення з паросполучення $\prod^*_{m-l}$ ребра з вагою $\beta_{\pi^*_{l+1}(k)} = \beta^0_{rq}$, $k = \overline{l+1, m}$; (рис. 2):

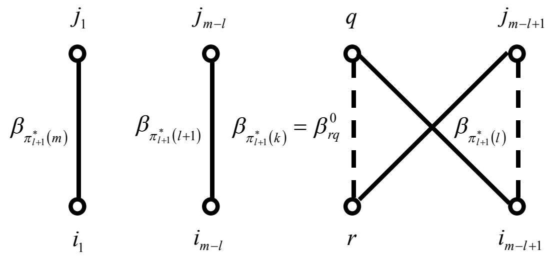

Рис. 2

в) додавання ребер з вагами $\beta^0_{i_{m-l+1}j_s}$ і $\beta^0_{i_p j_{m-l+1}}$, $\beta^0_{i_s j_p} \neq \beta_{\pi^*_{l+1}(k)}$, $k = \overline{l+1, m}$, та видалення ребер з вагами $\beta_{\pi^*_{l+1}(p)} = \beta^0_{i_p j_p}$, $\beta_{\pi^*_{l+1}(s)} = \beta^0_{i_s j_s}$; (рис. 3):

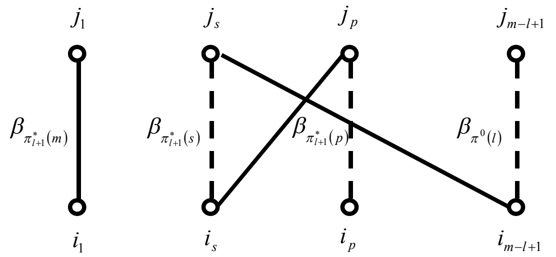

Рис. 3

Спосіб а) приводить до побудови $\pi^0_{l_1} = (\pi^0_{l_1}(l), \pi^0_{l_1}(l+1), ..., \pi^0_{l_1}(m))$ – перестановки, що одержуємо додаванням зліва до послідовності π^*_{l+1} елемента $\beta_{\pi^0(l)}$.

Дії способу б) виконуються для кожної пари значень $(\beta_{\pi^0(l)}, \beta_{\pi^*_{l+1}(k)})$, $k = \overline{l+1, m}$ і містяться в заміні в матриці B_{m-l+1} елементів $(\beta_{\pi^0(l)}, \beta^0_{rq})$ на відповідні елементи $\beta^0_{i_{m-l+1}q}$ і $\beta^0_{rj_{m-l+1}}$. Значення функціонала задачі визначається після виконання відповідної процедури оптимального упорядкування компонент, які містять значення отриманої сукупності.

Спосіб в) міститься в зіставленні кожній парі $(\beta_{\pi^0(l)}, \beta^0_{i_p j_s})$, $(i_p, j_s) \notin \Pi^*_{m-l}$, відповідній їй пари $(\beta^0_{i_{m-l+1}j_s}, \beta^0_{i_p j_{m-l+1}})$ для знаходження елемента $\beta^0_{i_s j_p}$, $(i_s, j_p) \notin \Pi^*_{m-l}$, і в розгляданні в матриці B_{m-l+1} кожного допустимого рішення, яке складається з елементів $\beta^0_{i_s j_p}$, $\beta^0_{i_{m-l+1}j_s}$, $\beta^0_{i_p j_{m-l+1}}$ та всіх елементів, що належать π^*_{l+1}, за винятком компоненти $\beta_{\pi^*_{l+1}(s)} = \beta^0_{i_s j_s}$, $\beta_{\pi^*_{l+1}(p)} = \beta^0_{i_p j_p}$.

Для побудови наборів способами а), б) і в) розглядається кожне рішення $\pi^*_{(l+1)\mu}$ і матриця B_{m-l+1}. В матриці B_{m-l+1} виділяються рядок і стовпець, які містять елемент $\beta_{\pi^0(l)} = \beta^0_{i_{m-l+1}j_{m-l+1}}$ і позначаються всі *m–l* елементів рішення $\pi^*_{(l+1)\mu}$.

У наборі, одержанім способом а), позначається елемент $\beta_{\pi^0(l)}$, що додається. В кожному наборі, побудованому способом б), виявляються поміченими додаючі елементи $\beta^0_{i_{m-l+1}q}$, $\beta^0_{rj_{m-l+1}}$ та всі елементи з $\pi^*_{(l+1)\mu}$ за винятком елемента β^0_{rq}. При побудові набору способом в) для знаходження елемента $\beta^0_{i_s j_p}$, що відповідає елементу $\beta^0_{i_p j_s}$, необхідно позначити компоненти $\beta^0_{i_{m-l+1}j_s}$, $\beta^0_{i_p j_{m-l+1}}$, які включаються до набору, та видалити мітки елементів $\beta^0_{i_p j_p}$, $\beta^0_{i_s j_s} \in \Pi^*_{m-l}$, розташованих у тому ж рядку і в тому ж стовпцю, де знаходиться $\beta^0_{i_p j_s}$. Тоді шуканий позначений елемент $\beta^0_{i_s j_p}$ буде розташовуватися на перетині рядка і стовпця матриці B_{m-l+1}, у яких не містяться позначені елементи.

У випадку мінімізації функціонала (2) перестановка $\pi^*_{l_\mu}$ будується оптимальним упорядкуванням компонент в задачі про редактора. Кожній послідовності $\pi^*_{l_\mu}$ ставиться у відповідність величина:

$$R\left(\pi^0_{l_t}\right) = \max_{l \le k \le m}\left(\sum_{r=l}^{k}\gamma_{\pi^0_{l_t}(r)} + \beta_{\pi^0_{l_t}(k)} + \sum_{r=k}^{m}\eta_{\pi^0_{l_t}(r)}\right), \quad t = \overline{1,(m-l)^2+1}, \qquad (2.2)$$

а потім знаходяться всі перестановки, що доставляють величину:

$$R_l = \min_t R\left(\pi^0_{l_t}\right). \qquad (2.3)$$

Викладені думки дозволяють перейти до розглядання алгоритму рішення задачі.

Алгоритм описує ітераційний процес побудови локальних оптимальних послідовностей $\pi^*_{l_\mu}$, починаючи з послідовності, що представлена єдиним елементом $\beta_{\pi^0(m)}$, і завершуючи знаходженням всіх оптимальних перестановок довжини *m*. Алгоритм складається з $m-1$ ітерацій. На черговій ітерації алгоритму для кожного оптимального локального рішення $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ довжини $m-l$, одержаного на попередній ітерації, знаходиться множина з $(m\text{-}l)^2+1$ послідовностей $\pi^0_{l_t}$ довжини $m-l+1$, побудованих способами а), б), в). Очевидно, що для N_l оптимальних локальних рішень $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ необхідно побудувати $((m-l)^2+1)N_l$ допустимих послідовностей $\pi^0_{l_t}$. Далі, на множині всіх побудованих послідовностей необхідно вибрати всі перестановки, які доставляють мінімум цільовому функціоналу задачі із вхідними даними, що визначаються матрицею B_{m-l+1}.

Представимо алгоритм рішення задачі у вигляді послідовностей таких дій.

S0^0. Нехай $\pi^0 = \left(\pi^0(1), \pi^0(2), \ldots, \pi^0(m)\right)$ – допустиме рішення, побудоване за допомогою кроків S1′-S4′. Перестановці π^0 відповідає послідовність матриць $B_m = \left[\beta^0_{ij}\right]_m, B_{m-1}, \ldots, B_2, B_1$. Вхідні дані задачі доповнені стовпцем $\left[\gamma_i\right]_{m\times 1}$ і рядком $\left[\eta_i\right]_{m\times 1}$, $k = 2$, $l = m-1$.

S1^0. В матриці B_k знайти всі оптимальні локальні рішення $\pi^*_{l_\mu}$.

S2^0. $k = k+1$; якщо $k > m$, то кінець: побудовано всі оптимальні локальні рішення $\pi^*_{1_\mu}$.

S3^0. $l = l-1$. Виділити в матриці B_k підматрицю B_{k-1} та елемент $\beta_{\pi^0(l)}$. Для кожного локального оптимального рішення $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ побудувати за допомогою способів а), б), в) $(m\text{-}l)^2+1$ наборів значень з матриці B_k.

S4^0. Побудувати послідовності $\pi^0_{l_t}$, знайти значення, що визначаються відповідно з (2.2), (2.3) і одержати всі локальні оптимальні рішення $\pi^*_{l_\mu}$; перейти до кроку S5^0.

S5^0. Перейти до кроку S2^0.

Покажемо, що запропонований алгоритм коректно знаходить оптимальні рішення задачі за поліноміальний час.

Для доведення коректності алгоритму достатньо показати, що локальні оптимальні рішення $\pi^*_{l_\mu}$ задачі із вхідними даними, які визначаються матрицею B_{m-l+1}, містяться у множині всіх рішень $\pi^0_{l_t}$, одержаній на кроці S3^0 з локальних оптимальних рішень $\pi^*_{(l+1)_\mu}$.

Алгоритм оптимальний при $m = 2$. Доведемо, що він оптимальний при $m > 2$.

Нехай на кроці S3^0 для матриці B_{m-l} побудовано локальні оптимальні рішення $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ довжини *m–l*. Розглянемо допустиме рішення π'_{l+1} задачі, у вхідних даних якої міститься та ж матриця B_{m-l}. Оптимальність алгоритму витікає з того, що будь-яке допустиме рішення π'_l довжини $m-l+1$, одержане для матриці B_{m-l+1} з π'_{l+1}, задає цільовій функції більше значення, аніж будь-яке рішення $\pi^*_{l_\mu}$. Інакше кажучи, при знаходженні всіх наборів значень з матриці B_{m-l+1} способами а), б), в) множина всіх допустимих рішень, що породжуються матрицею B_{m-l}, можна звузити до множини, яка містить лише рішення $\pi^*_{(l+1)_\mu}$.

Розглянемо досконале паросполучення, яке відповідає π'_{l+1}. Воно містить не менше двох компонент, які не входять до паросполучення, що відповідає оптимальному локальному рішенню $\pi^*_{(l+1)_\mu}$. Без втрати спільності можна вважати, що π'_{l+1} та $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ відрізняються рівно двома компонентами. Нехай це будуть в $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ елементи $\beta_{\pi^*(l+1)_\mu(r)}$ та $\beta_{\pi^*(l+1)_\mu(s)}$, а в π'_{l+1} – елементи β^0_{pt} і β^0_{uv}.

Включення компоненти $\beta_{\pi^0(l)} = \beta^0_{i_{m-l+1}j_{m-l+1}}$ до π'_{l+1} і до $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ для побудови допустимих рішень π'_l та π''_l не порушують нерівності у задачі

$$R(\pi''_l) \le R(\pi'_l),$$

де π'_l і π''_l упорядковані так, що в них компонента $\beta_{\pi^0(l)}$ завжди розташовується на першій зліва позиції.

Нерівність, можливо, порушується, якщо π'_l не містить елемент $\beta_{\pi^0(l)}$ і елемент з B_{m-l} містить замість них пару компонент, одна з яких знаходиться у рядку i_{m-l+1}, а друга – у стовпці j_{m-l+1}.

Якщо замінити $\beta_{\pi^0(l)}$ і компоненту $\beta_{\pi^*_{l+1}(k)} = \beta^0_{rq}$, яка належить π'_{l+1}, на елементи $\beta^0_{rj_{m-l+1}}$ і $\beta^0_{i_{m-l+1}q}$ та додати їх спочатку до $\pi^*_{(l+1)_\mu}$, а потім до π'_{l+1}, то одержимо допустимі локальні рішення π''_{l1}, π'_{l1}, які зберігають відповідні нерівності.

Заміна $\beta_{\pi^0(l)}$ і компоненти $\beta^0_{pt} \notin \pi^*_{(l+1)_\mu}$, $\beta^0_{pt} \in \pi'_{l+1}$ приводить до побудови тільки одного допустимого набору для матриці B_{m-l+1}. Цей набір містить компоненти $\beta^0_{pj_{m-l+1}}$, β^0_{uv}, $\beta^0_{i_{m-l+1}}$, і *m–l–*2 компонент з $\pi^*_{(l+1)_\mu}$. Але такий же набір будується з $\pi^*_{(l+1)_\mu}$ способом в) для пари $(\beta_{\pi^0(l)}, \beta^0_{pt})$, і коректність алгоритму доведено.

Оцінимо час роботи алгоритму, який залежить, в першу чергу, від порядку вхідної матриці $\left[\beta^0_{ij}\right]_m$. Побудова оптимальних рішень задачі завершується після *m*–1 основних кроків S3^0, в результаті яких формується $\sum_{k=2}^{m} N_{k-1}\left((k-1)^2+1\right)$ локальних оптимальних послідовностей довжини 2, 3, …, *k,* …, *m*, де N_{k-1} – кількість оптимальних локальних рішень, одержуваних з матриці B_{k-1}. Оскільки $\sum_{k=2}^{m} N_{k-1}\left((k-1)^2+1\right) = \sum_{k=1}^{m-1} k^2 + m - 1 = \frac{1}{3}(m-1)^3 + \frac{1}{2}(m-1)^2 + \frac{1}{6}(m-1) + m - 1$, а час на побудову такого локального рішення пропорційний величині, то в гіршому випадку трудомісткість пошуку оптимальних рішень задачі можна оцінити величиною $N_{\max} m^4 \log_2 m$. Тут $N_{\max}$ – найбільша кількість оптимальних локальних рішень, що розглядаються на кроці S3^0.

Таким чином, задача складання оптимальних за швидкодією розкладів робіт (2) відноситься до класу поліноміально розв'язних задач. Відзначимо, що задача оптимального розпаралелення двоетапних робіт в постановці (2) є варіантом звісних задач теорії розкладів для випадку, коли роботи призначаються на неідентичні машини.

Застосуємо запропоновану схему для розв'язання задачі з числовими даними, що представлені матрицею $\left[\beta^0_{ij}\right]_5$, стовпцем $[\gamma]_{5\times1}$, а також рядком $\left[\eta_j\right]_{1\times5} = [1,\ 6,\ 2,\ 5,\ 3]$.

$$\left[\beta^0_{ij}\right]_5 = \begin{bmatrix} 3 & 14 & 8 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 10 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\gamma]_{5\times1} = [2,\ 4,\ 5,\ 11,\ 3].$$

Для побудови початкового допустимого рішення $\left(\beta_{\pi^0(1)}, \beta_{\pi^0(2)}, \beta_{\pi^0(3)}, \beta_{\pi^0(4)}, \beta_{\pi^0(5)}\right)$ складемо з матриці $\left[\beta^0_{ij}\right]_5$, стовпця $[\gamma]_{5\times1}$ і рядка $\left[\eta_j\right]_{1\times5}$ матрицю

$$\left[\beta_{ij}\right]_5 = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 10 & \underline{11} & 11 \\ 3 & 7 & \underline{4} & 6 & 6 \\ \underline{2} & 8 & 6 & 13 & 13 \\ 6 & \underline{9} & 7 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & 9 & 9 & \underline{4} \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи кроки S1′–S4′ процедури побудови перестановки π^0, одержимо послідовність з таких компонент: $\beta_{\pi^0(1)} = \beta_{55}^0 = 1$, $\beta_{\pi^0(2)} = \beta_{14}^0 = 9$, $\beta_{\pi^0(3)} = \beta_{42}^0 = 3$, $\beta_{\pi^0(4)} = \beta_{23}^0 = 2$, $\beta_{\pi^0(5)} = \beta_{31}^0 = 1$. Побудована перестановка π^0 доставляє функціоналу (2) значення

$$R(\pi^0) = \gamma_5 + \gamma_1 + \beta_{14}^0 + \eta_4 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_1 = 3 + 2 + 9 + 5 + 6 + 2 + 1 = 28.$$

Наступні дії розглядуваного методу дають можливість визначити, чи мінімізує одержане рішення π^0 функціонал (2). Для більшої наочності подальших обчислень представимо кожний елемент матриці B_m, упорядкованої трійкою $(\gamma_i, \beta_{ij}^0, \eta_j)$.

Елементу $\beta_{\pi^0(1)} = \beta_{55}^0 = 1$ і послідовності π^0 поставимо у відповідність матрицю

$$B_5 = \begin{bmatrix} (2,3,1) & (2,14,6) & (2,8,2) & (2,9,5) & (2,9,3) \\ (4,2,1) & (4,3,6) & (4,2,2) & (4,2,5) & (4,3,3) \\ (5,1,1) & (5,3,6) & (5,4,2) & (5,8,5) & (5,10,3) \\ (11,5,1) & (11,3,6) & (11,5,2) & (11,7,5) & (11,3,3) \\ (3,1,1) & (3,1,6) & (3,7,2) & (3,6,5) & (3,1,3) \end{bmatrix}.$$

Для елемента $\beta_{\pi^0(2)} = \beta_{14}^0 = 9$ і послідовності $(\beta_{\pi^0(2)}, \ldots, \beta_{\pi^0(5)})$ визначимо матрицю

$$B_4 = \begin{bmatrix} (2,3,1) & (2,14,6) & (2,8,2) & (2,9,5) \\ (4,2,1) & (4,3,6) & (4,2,2) & (4,2,5) \\ (5,1,1) & (5,3,6) & (5,4,2) & (5,8,5) \\ (11,5,1) & (11,3,6) & (11,5,2) & (11,7,5) \end{bmatrix}.$$

Аналогічним чином для елементів $\beta_{\pi^0(3)} = \beta_{42}^0 = 3$, $\beta_{\pi^0(4)} = \beta_{23}^0 = 2$, $\beta_{\pi^0(5)} = \beta_{31}^0 = 1$ і відповідних їм послідовностей одержимо матриці

$$B_3 = \begin{bmatrix} (4,2,1) & (4,3,6) & (4,2,2) \\ (5,1,1) & (5,3,6) & (5,4,2) \\ (11,5,1) & (11,3,6) & (11,5,2) \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} (4,2,1) & (4,2,2) \\ (5,1,1) & (5,4,2) \end{bmatrix}, \quad B_1 = [(5,1,1)].$$

Матриця B_2 породжує дві допустимі послідовності $(\beta_{23}^0, \beta_{31}^0)$ і $(\beta_{33}^0, \beta_{21}^0)$, упорядковані за правилом побудови оптимального рішення задачі про редактора.

Якщо $\max(\gamma_2 + \beta_{23}^0 + \eta_3 + \eta_1, \gamma_2 + \gamma_3 + \beta_{31}^0 + \eta_1) = \max(4 + 2 + 2 + 1, 4 + 5 + 1 + 1) = 11$,

а $\max(\gamma_3 + \beta_{33}^0 + \eta_3 + \eta_1, \gamma_3 + \gamma_2 + \beta_{21}^0 + \eta_1) = \max(5 + 4 + 2 + 1, 5 + 4 + 2 + 1) = 12$, то оптимальним локальним рішенням π_4^* є послідовність, в якій $\beta_{\pi^*(4)} = \beta_{23}^0$, $\beta_{\pi^*(5)} = \beta_{31}^0$.

Перейдемо до розглядання матриці

$$B_3 = \begin{bmatrix} (4,2,1) & (4,3,6) & \underline{(4,2,2)} \\ \underline{(5,1,1)} & (5,3,6) & (5,4,2) \\ (11,5,1) & (\mathbf{11},\mathbf{3},\mathbf{6}) & (11,5,2) \end{bmatrix}.$$

Безпосереднє додавання до π_4^* елемента β_{42}^0 дає послідовність $\pi_{31}^0 = (\beta_{42}^0, \beta_{23}^0, \beta_{31}^0)$, для котрої $R(\pi_{31}^0) = 23$. Способом б) з послідовним оптимальним упорядкуванням компонент в задачі про редактора одержимо такі послідовності елементів з матриці B_3 і відповідні їм значення цільової функції:

$\pi_{32}^0 = (\beta_{32}^0, \beta_{41}^0, \beta_{23}^0)$, $R(\pi_{32}^0) = 24$; $\pi_{33}^0 = (\beta_{22}^0, \beta_{43}^0, \beta_{31}^0)$, $R(\pi_{32}^0) = 23$.

Після упорядкування компонент в кожному наборі, одержаному способом в), маємо:

$\pi_{34}^0 = (\beta_{32}^0, \beta_{43}^0, \beta_{21}^0)$, $R(\pi_{34}^0) = 24$; $\pi_{35}^0 = (\beta_{22}^0, \beta_{33}^0, \beta_{41}^0)$, $R(\pi_{35}^0) = 26$.

В результаті виконаних дій з елементами матриці B_3 знайдено всі локальні оптимальні перестановки:

$\pi_{31}^* = (\beta_{42}^0, \beta_{23}^0, \beta_{31}^0)$, $\pi_{32}^* = (\beta_{22}^0, \beta_{43}^0, \beta_{31}^0)$.

При побудові локальних оптимальних рішень для матриці B_4 розглядається кожна локальна послідовність, одержана на попередньому етапі. Розглянемо перестановку π_{31}^* і матрицю

$$B_4 = \begin{bmatrix} (2,3,1) & (2,14,6) & (2,8,2) & (\mathbf{2},\mathbf{9},\mathbf{5}) \\ (4,2,1) & (4,3,6) & \underline{(4,2,2,)} & (4,2,5) \\ \underline{(5,1,1)} & (5,3,6) & (5,4,2) & (5,8,5) \\ (11,5,1) & \underline{(11,3,6)} & (11,5,2) & (11,7,5) \end{bmatrix}.$$

Послідовність $\pi_{21}^0 = \left(\beta_{14}^0, \beta_{42}^0, \beta_{23}^0, \beta_{31}^0\right)$, одержана з π_{31}^* додаванням до неї зліва компоненти β_{14}^0, задає значення $R\left(\pi_{21}^0\right) = 25$. Способом б) побудуємо перестановки $\pi_{22}^0 = \left(\beta_{24}^0, \beta_{13}^0, \beta_{42}^0, \beta_{31}^0\right)$, $\pi_{24}^0 = \left(\beta_{12}^0, \beta_{44}^0, \beta_{23}^0, \beta_{31}^0\right)$, $\pi_{23}^0 = \left(\beta_{34}^0, \beta_{42}^0, \beta_{23}^0, \beta_{11}^0\right)$ і знайдемо значення $R\left(\pi_{25}^0\right) = 27$. Виконуючи аналогічні дії з побудови способом в) п'яти послідовностей, що залишилися, можна переконатися, що $R\left(\pi_{2k}^0\right) > 27,\ k = \overline{6,10}$.

Тепер звернемося до другого оптимального рішення $\pi_{32}^* = \left(\beta_{22}^0, \beta_{43}^0, \beta_{31}^0\right)$ і до матриці

$$B_4 = \begin{bmatrix} (2,3,1) & (2,14,6) & (2,8,2) & (\mathbf{2},\mathbf{9},\mathbf{5}) \\ (4,2,1) & \underline{(4,3,6)} & (4,2,2) & (4,2,5) \\ \underline{(5,1,1)} & (5,3,6) & (5,4,2) & (5,8,5) \\ (11,5,1) & (11,3,6) & \underline{(11,5,2)} & (11,7,5) \end{bmatrix}.$$

Після виконання аналогічних дій з побудови всіх десяти послідовностей, породжуваних перестановкою π_{32}^*, виявляється, що єдиною оптимальною локальною послідовністю довжини 4 є $\pi_{21}^0 = \pi_{21}^* = \left(\beta_{14}^0, \beta_{42}^0, \beta_{23}^0, \beta_{31}^0\right)$, $R\left(\pi_{21}^*\right) = 25$.

Для пошуку оптимальних рішень прикладу скористаємося матрицею

$$B_5 = \begin{bmatrix} (2,3,1) & (2,14,6) & (2,8,2) & (2,9,5) & (2,9,3) \\ (4,2,1) & (4,3,6) & (4,2,2) & (4,2,5) & \underline{(4,3,3)} \\ \underline{(5,1,1)} & (5,3,6) & (5,4,2) & (5,8,5) & (5,10,3) \\ (11,5,1) & (11,3,6) & \underline{(11,5,2)} & (11,7,5) & (11,3,3) \\ (3,1,1) & \underline{(3,1,6)} & (3,7,2) & (3,6,5) & (3,1,3) \end{bmatrix}.$$

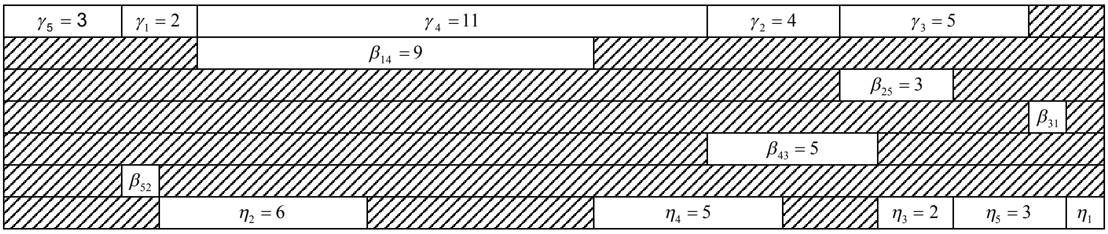

Рис. 4

Побудувавши всі допустимі рішення способами а), б), в), одержимо єдину перестановку $\pi_1^* = \left(\beta_{52}^0, \beta_{14}^0, \beta_{43}^0, \beta_{25}^0, \beta_{31}^0\right)$, що доставляє мінімум функціоналу, який дорівнює 27. Шуканий розклад π_1^* графічно представлено на рис. 4.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Панишев А.В., Подоляка О.А., Скакалина Е.В.* Эффективный алгоритм распараллеливания работ на неидентичных машинах // Авиационно-космическая техника и технология: Сб. науч. тр. – Вып. 13. – Харьков: Гос. аэрокосм. ун-т. "ХАИ", 1999. – № 13. – С. 136–146.
2. *Панишев А.В., Скрипина И.В., Фастовец В.И.* О вычислительной сложности составления непрерывного расписания задачи Джонсона // Радиоэлектроника и информатика. – 2000. – № 1. – С. 49–52.
3. *Данильченко А.М., Панишев А.В.* О частных случаях задачи трех станков // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 4. – С. 197.
4. *Титов В.В.* Оптимизация принятия решений в управлении производством. –Новосибирск: Наука, 1981. – 206 с.
5. *Свами М., Тхуласироман К.* Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 454 с.

ПАНІШЕВ Анатолій Васильович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики і комп’ютерного моделювання Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– математичне моделювання;
– теорія розкладів та її застосування.

ПОДОЛЯКА Олексій Миколайович – асистент кафедри інформатики Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського.

Наукові інтереси:
– дискретна математика і математичне моделювання;
– теорія розкладів та її застосування.

ПОДОЛЯКА Оксана Олександрівна – кандидат технічних наук, ст. викладач кафедри інформатики Харківського Національного автомобільно-дорожного університету.

Наукові інтереси:
– математичне моделювання;
– теорія розкладів та її застосування.

Подано 9.09.2001

Панішев А.В., Подоляка О.М., Подоляка О.О. Ефективна схема розв'язання узагальнення задачі про редактора

Панишев А.В., Подоляка А.Н., Подоляка О.А. Эффективная схема решения обобщения задачи о редакторе

Panishev A.V., Podolyaka A.N., Podolyaka O.A. Effective scheme of solution a redactor problem generalization

УДК 681.3

Эффективная схема решения обобщения задачи о редакторе / А.В. Панишев, А.Н. Подоляка, О.А. Подоляка

Предлагается алгоритм решения обобщения задачи о редакторе. Алгоритм реализует метод последовательного построения локальных оптимальных решений.

УДК 681.3

Effective scheme of solution a redactor problem generalization / Panishev A.V., Podolyaka A.N., Podolyaka O.A.

Algorithm of solution a redactor problem generalization are proposed. Algorithm realizes the sequential construction of a local optimal solutions.