УДК 681.51:519.95

С.В. Ковбасюк, к.т.н., с.н.с.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

РОЗРОБКА Й АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА

Запропоновано метод моделювання руху космічного апарата, що заснований на диференціальних перетвореннях. Досліджено ефективність запропонованих варіантів побудови моделі руху, в порівнянні з відомими.

Безупинне підвищення вимог до обсягу та якості радіолокаційної інформації, перешкодозахищеності й живучості радіолокаційних засобів змушує фахівців, поряд із пошуком нових технічних рішень у створенні основних технологічних компонентів радіолокаційних станцій, вдосконалювати існуючі та розвивати нові напрямки і методи радіолокації. Точність визначення положення космічного апарата (КА) на орбіті польоту є одним з факторів, що визначають ефективність космічної інфраструктури в цілому. Так помилки розрахунків координат елементів навігаційної системи призведуть до значних похибок визначення положення об'єктів на суші, воді й у повітрі. Важливими також є точність прогнозу положення КА на визначений момент часу, що впливає на оптимальну побудову системи з декількох апаратів, розрахунок сеансів зв'язку тощо.

Інформація про КА, що отримана в результаті спостереження за об'єктом за допомогою РЛС, може бути описана такою схемою:

спостереження = модель + похибки вимірювань.

Таким чином, сумарні похибки визначення параметрів орбіти КА складаються з похибок опису моделі руху об'єкта і похибок вимірювання. Традиційно більше уваги приділяють зменшенню похибок виміру. Однак неточності при побудові моделі можуть призвести до значно гірших наслідків.

Ефективним підходом до розв'язання проблеми моделювання процесів у реальному та прискореному часі є застосування математичного апарата диференціальних перетворень, за допомогою якого в процесі моделювання в області зображень виключається часовий аргумент. Достоїнством методу диференціальних перетворень є виконання моделювання в аналітичному, числово-аналітичному і числовому виглядах [1]. Вперше моделі динамічних систем із застосуванням апарата диференціальних перетворень були отримані Пуховим Г.Е. [1–3], тому умовимося називати їх Р-моделями.

В даній статті пропонується підхід до моделювання процесу незбуреного руху космічного апарата (КА) у навколоземному просторі. Запропонований підхід дозволяє на основі диференціальних перетворень одержувати в області зображень точні Р-моделі випадкових процесів у рамках кореляційної теорії. Розрізняють два основних види диференціальних перетворень – тейлорівскі та нетейлорівскі.

У випадку диференціально-тейлорівских перетворень задачі аналізу розв'язуються за такою схемою. Задана математична модель об'єкта у формі диференціальних рівнянь, що можуть бути лінійними і нелінійними, перетворюється в так звану спектральну модель шляхом заміни диференціальними спектрами вхідних у математичну модель функцій та дій над ними, а також та звичайних операцій над функціями – відповідними операціями над диференціальними спектрами. Спектральна Р-модель являє звичайну систему кінцевих рівнянь рекурентного типу, за допомогою якої легко знаходять дискрети диференціальних спектрів шуканих величин. На останньому етапі практично без всяких обчислень знаходять шукані функції у вигляді відрізків степеневих рядів Тейлора.

Диференціальними тейлорівскими перетвореннями називаються функціональні перетворення вигляду [1, 2]:

$$\underline{z}(t) = Z(K) = \frac{H^k}{K!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t=0}; \tag{1}$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k Z(K), \tag{2}$$

де $Z(K)$ – дискретна функція цілочислового аргументу k = 0, 1, 2, 3,... і заданої випадкової величини V; H – відрізок часового аргументу, на якому розглядається функція $z(t)$; значення H повинне бути менше за радіус збіжності рядів Тейлора в околі точки t = 0.

Вираз (1) визначає пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $z(t)$ знайти зображення $Z(K)$. Риска знизу функції $z(t)$ у виразі (1) означає диференціальне перетворення цієї функції.

Зворотне перетворення, що відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді ряду Тейлора з центром у точці t = 0, визначається виразом (2). Аналогічно термінології, прийнятій в [1, 2], диференціальні зображення $Z(K)$

будемо називати диференціальним спектром, а значення функції $Z(K)$ при конкретних значеннях аргументу $K = 0, 1, 2, \ldots$ назвемо дискретами диференціального спектра.

Розглянемо методику моделювання процесів на основі диференціальних перетворень на прикладі задачі оцінювання положення космічного апарата (КА). Незбурений рух КА описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}(t) + K_з \frac{\bar{\mathbf{r}}(t)}{r^3(t)} = 0,$$

де $\bar{\mathbf{r}}(t)$ – радіус-вектор, що визначає положення КА в обраній системі координат; $K_з$ – постійна поля земного тяжіння (гравітаційна стала Землі), яка дорівнює $3{,}986 * 10^{14}$ м^3/с^2, що еквівалентно системі трьох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dfrac{K_з x(t)}{r^3(t)} = 0, \\ \ddot{y}(t) + \dfrac{K_з y(t)}{r^3(t)} = 0, \\ \ddot{z}(t) + \dfrac{K_з z(t)}{r^3(t)} = 0, \end{cases}$$

де $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$, або системі шести диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t), & \dfrac{d\dot{x}(t)}{dt} = -\dfrac{K_з x(t)}{r^3(t)}, \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t), & \dfrac{d\dot{y}(t)}{dt} = -\dfrac{K_з y(t)}{r^3(t)}, \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t), & \dfrac{d\dot{z}(t)}{dt} = -\dfrac{K_з z(t)}{r^3(t)}. \end{cases} \tag{3}$$

Традиційний розв'язок системи (3) є сукупністю шести незалежних між собою частинних розв'язків, до знаходження яких і зводиться задача інтегрування даних рівнянь.

Ми ж розв'яжемо поставлену задачу за допомогою диференціальних перетворень. Розглянемо хід розв'язання на прикладі однієї координати x та з одним припущенням. Приймемо, що орбіта КА кругова і $r(t) = \text{const}$. У цьому випадку система рівнянь для координати x запишеться у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = g(t), \qquad \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} = -\frac{K_з x(t)}{r^3} \tag{4}$$

за початкових умов $t = 0, x(0) = x_0, g(0) = g_0$. Потрібно побудувати диференціальний спектр моделі руху КА з прийнятими обмеженнями. В області зображень (з огляду на властивості диференціально-тейлорівских перетворень [3]) система рівнянь (4) набуде вигляду:

$$X(k+1) = \frac{H}{k+1} G(k),$$

$$G(k+1) = -\frac{HK_з}{(k+1)r^3} X(k).$$

Відповідно до виразу (1) визначаємо дискрети диференціального спектра для положення і швидкості за координатою x:

$$
\begin{aligned}
&X(0) = x_0; && G(0) = g_0;\\
&X(1) = g_0 H; && G(1) = -\frac{K_з H}{r^3} x_0;\\
&X(2) = -\frac{K_з H^2}{2!\, r^3} x_0; && G(2) = -\frac{K_з H^2}{2!\, r^3} g_0;\\
&X(3) = -\frac{K_з H^3}{3!\, r^3} g_0; && G(3) = \frac{K_з^{\,2} H^3}{3!\, r^6} x_0;\\
&X(4) = \frac{K_з^{\,2} H^4}{4!\, r^6} x_0; && G(4) = \frac{K_з^{\,2} H^4}{4!\, r^6} g_0;\\
&X(5) = \frac{K_з^{\,2} H^5}{5!\, r^6} g_0; && G(5) = -\frac{K_з^{\,3} H^5}{5!\, r^9} x_0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Говорячи взагалі, диференціальний спектр (5) обох рівнянь системи (4) нескінченний, ми ж у своїх дослідженнях обмежилися шістьма дискретами. Для одержання розв'язку в часовій області треба зробити зворотне перетворення, що відновлює оригінал $x(t)$ у вигляді ряду Тейлора з центром у точці $t = 0$, що обумовлено виразом (2).

Якщо в рядах Тейлора обмежити кількість членів, що враховуються, то похибка, яка спричинена відкиданням членів вищого порядку, оцінюється залишками цих рядів. Для оцінки випадкової похибки визначення положення і швидкості КА за координатою x визначимо дисперсію випадкових процесів при вихідних похибках оцінки початкових умов σ_{v_1}, σ_{v_2} для координати і швидкості її зміни відповідно:

$$
\begin{aligned}
D_x(t) &= \sigma_{v_1}^{\;2} + (\sigma_{v_2}^{\;2} - \frac{K_з}{r^3}\sigma_{v_1}^{\;2})t^2 + (\frac{K_з^{\;2}}{4r^6}\sigma_{v_1}^{\;2} - \frac{K_з}{3r^3}\sigma_{v_2}^{\;2})t^4 + \frac{K_з^{\;2}}{3!3!\,r^3}\sigma_{v_2}^{\;2}t^6,\\
D_g(t) &= \sigma_{v_2}^{\;2} - (\frac{K_з}{r^3}\sigma_{v_2}^{\;2} - \frac{K_з^{\;2}}{r^6}\sigma_{v_1}^{\;2})t^2 + (\frac{K_з^{\;2}}{4r^6}\sigma_{v_2}^{\;2} - \frac{K_з^{\;3}}{3!\,r^9}\sigma_{v_1}^{\;2})t^4 + \frac{K_з^{\;4}}{3!3!\,r^{12}}\sigma_{v_2}^{\;2}t^6.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Аналіз виразів (6) призводить до таких висновків. Точність визначення положення КА залежить від точності розрахунку (або вимірювання) початкових умов як за положенням, так і за швидкістю. Похибки в початкових умовах швидкості мають вирішальне значення з ростом t, тобто при екстраполяції положення космічного апарата на заданий час. Це видно з виразу для $D_x(t)$, тому що коефіцієнти при дисперсіях вимірювання швидкості КА для відповідних ступенів часу на кілька порядків більше, ніж при дисперсіях вимірювання положення.

Далі розглянемо загальний випадок побудови диференціального спектра процесу руху КА по орбіті без обмежень на її тип. Відстань від центру Землі до КА є функцією $r(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Зміна відстані від центру Землі (початок геоцентричної абсолютної системи координат) до космічного апарата r в часі можна описати поліномом першого ступеня на обмеженій ділянці:

$$r(t) = r_0 + \dot{r}t$$

або поліномом другого ступеня в загальному випадку:

$$r(t) = r_0 + \dot{r}t + \frac{\ddot{r}t^2}{2},$$

де $r_0 = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2}$;

$\dot{r} = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 + \dot{z}(0)^2}$;

$\ddot{r} = \sqrt{\ddot{x}(0)^2 + \ddot{y}(0)^2 + \ddot{z}(0)^2}$.

Побудуємо диференціальний спектр для випадку лінійної зміни відстані до КА, при цих умовах вираз (4) набуде вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = g(t), \qquad \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} = -\frac{K_з x(t)}{(r_0 + r_1 t)^3}.$$

Перші шість дискрет диференціального спектра моделі руху КА для координати та її похідної для лінійної зміни відстані будуть мати такий вигляд:

$$X(0) = x_0;$$
$$X(1) = g_0 H;$$
$$X(2) = -\frac{K_з H^2}{2!\, r_0^3} x_0;$$
$$X(3) = -\frac{K_з H^3}{3!\, r_0^3} g_0 + \frac{K_з r_1 H^3}{2 r_0^4} x_0;$$
$$X(4) = \frac{K_з{}^2 H^4}{4!\, r_0^6} x_0 + \frac{K_з\; r_1 H^4}{4 r_0^4} g_0 - \frac{K_з{}^2 r_1^2 H^4}{2 r_0^5} x_0;$$
$$X(5) = \frac{K_з{}^2 H^5}{5!\, r^6} g_0 - \frac{K_з{}^2 r_1 H^5}{10 r_0^7} x_0 - \frac{3K_з r_1^2 H^5}{10 r_0^5} g_0 + \frac{K_з\; r_1^3 H^5}{2 r_0^6} x_0;$$
$$G(0) = g_0;$$
$$G(1) = -\frac{K_з H}{r_0^3} x_0;$$
$$G(2) = -\frac{K_з H^2}{2!\, r_0^3} g_0 + \frac{3K_з r_1 H^2}{2 r_0^4} x_0;$$
$$G(3) = \frac{K_з{}^2 H^3}{3!\, r_0^6} x_0 + \frac{K_з r_1 H^3}{r_0^4} g_0 - \frac{2K_з r_1^2 H^3}{r_0^5} x_0;$$
$$G(4) = \frac{K_з{}^2 H^4}{4!\, r_0^6} g_0 - \frac{K_з{}^2 r_1 H^4}{2 r_0^7} x_0 - \frac{3K_з r_1^2 H^4}{2 r_0^5} g_0 + \frac{5K_з r_1^3 H^4}{2 r_0^6} x_0;$$
$$G(5) = -\frac{K_з{}^3 H^5}{5!\, r_0^9} x_0 - \frac{3K_з^2 r_1 H^5}{20 r_0^7} g_0 + \frac{K_з^2 r_1^2 H^5}{r_0^8} x_0 + \frac{2K_з r_1^3 H^5}{r_0^6} g_0 - \frac{3K_з r_1^4 H^5}{r_0^7} x_0.$$

У випадку ж квадратичної зміни відстані від центру Землі до космічного апарата вираз (4) перетвориться до вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = g(t), \qquad \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} = -\frac{K_з x(t)}{(r_0 + r_1 t + \frac{r_2^2 t^2}{2!})^3}.$$

Перші шість дискрет диференціального спектра моделі руху КА для координати x та швидкості її зміни при квадратичному законі зміни відстані до об'єкта описуються таким чином:

$$X(0) = x_0;$$
$$X(1) = g_0 H;$$
$$X(2) = -\frac{K_з H^2}{2!\, r_0^3} x_0;$$
$$X(3) = -\frac{K_з H^3}{3!\, r_0^3} g_0 + \frac{K_з r_1 H^3}{2 r_0^4} x_0;$$
$$X(4) = \frac{K_з{}^2 H^4}{4!\, r_0^6} x_0 + \frac{K_з\; r_1 H^4}{4 r_0^4} g_0 - \frac{K_з{}^2 r_1^2 H^4}{2 r_0^5} x_0 + \frac{K_з\; r_2 H^4}{8 r_0^4} x_0;$$
$$X(5) = \frac{K_з{}^2 H^5}{5!\, r^6} g_0 - \frac{K_з{}^2 r_1 H^5}{10 r_0^7} x_0 - \frac{3K_з r_1^2 H^5}{10 r_0^5} g_0 + \frac{K_з\; r_1^3 H^5}{2 r_0^6} x_0 + \frac{3K_з\; r_2 H^5}{40 r_0^4} g_0 +$$
$$+ \frac{3K_з\; r_1 r_2 H^5}{5 r_0^5} x_0;$$

$$G(0) = g_0;$$

$$G(1) = -\frac{K_з H}{r_0^3} x_0;$$

$$G(2) = -\frac{K_з H^2}{2! r_0^3} g_0 + \frac{3 K_з r_1 H^2}{2 r_0^4} x_0;$$

$$G(3) = \frac{K_з{}^2 H^3}{3! r_0^6} x_0 + \frac{K_з r_1 H^3}{r_0^4} g_0 - \frac{2 K_з r_1^2 H^3}{r_0^5} x_0 + \frac{K_з r_2 H^3}{2 r_0^4} x_0;$$

$$G(4) = \frac{K_з{}^2 H^4}{4! r_0^6} g_0 - \frac{K_з{}^2 r_1 H^4}{2 r_0^7} x_0 - \frac{3 K_з r_1^2 H^4}{2 r_0^5} g_0 + \frac{5 K_з r_1^3 H^4}{2 r_0^6} x_0 + \frac{3 K_з r_2 H^4}{8 r_0^4} g_0 +$$
$$+ \frac{3 K_з r_1 r_2 H^4}{r_0^5} x_0;$$

$$G(5) = -\frac{K_з{}^3 H^5}{5! r_0^9} x_0 - \frac{3 K_з^2 r_1 H^5}{20 r_0^7} g_0 + \frac{K_з^2 r_1^2 H^5}{r_0^8} x_0 + \frac{2 K_з r_1^3 H^5}{r_0^6} g_0 - \frac{3 K_з r_1^4 H^5}{r_0^7} x_0 -$$
$$- \frac{7 K_з^2 r_2 H^5}{40 r_0^7} x_0 - \frac{6 K_з r_1 r_2 H^5}{5 r_0^5} g_0 + \frac{0.15 K_з r_2^2 H^5}{4 r_0^5} x_0 - \frac{39 K_з r_1^2 r_2 H^5}{5 r_0^6} x_0.$$

Для відновлення оригіналу у випадку диференціально-тейлорівских перетворень завдання полягає в підсумовуванні дискрет спектра $X(K)$ й $G(K)$ у вигляді відрізка ряду Тейлора за ступенем функції $T = t / H$.

Недоліком тейлорівского ряду є те, що точне відновлення оригіналу можливе тільки в околі точки розкладання. У випадку повільно збіжних функцій з ростом t необхідно враховувати усе більшу кількість дискрет спектра. Тому при розгляді відновлених функцій на великих часових інтервалах доцільно застосовувати диференціальні перетворення нетейлорівского типу. Вони відрізняються від диференціально-тейлорівских лише тим, що відновлення функцій за їхніми диференціальними спектрами, які є певним чином нормалізованими похідними, здійснюється у вигляді апроксимуючих функцій з вільними коефіцієнтами. Останні підбираються шляхом прирівнювання диференціального спектра апроксимуючої функції та диференціального спектра, що одержаний зі спектральної моделі об'єкта. Диференціальні перетворення з прямим перетворенням вигляду (1) і зворотним у вигляді деякої функції $\varphi(t,c)$, що не є рядом Тейлора, будемо називати диференціальними перетвореннями нетейлорівского типу [3] і записувати їх у загальному випадку так:

$$\underline{z}(t) = Z(K) = \frac{H^k}{K!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \qquad \Xi \qquad x(t) = \varphi(t,c),$$

де с – сукупність вільних коефіцієнтів.

Якщо розглянути незбурений рух КА в геоцентричній абсолютній системі координат, то можна зробити висновок про періодичний коливальний рух об'єкта в часі. У цьому випадку оригінал доцільно розшукувати у вигляді відрізка ряду за добутками експонентних функцій на гармонічні. Відновлення оригіналу в цьому випадку будемо шукати у вигляді функції:

$$x(t) = e^{\lambda t}(a * \cos(wt) + b * \sin(wt)), \tag{7}$$

де визначенню підлягають коефіцієнти λ, a, b, w. Для цього досить чотирьох дискрет диференціального спектра моделі руху КА. Якщо взяті перші чотири дискрети і розглянути випадок кругового руху об'єкта $(r = \text{const})$, то шукані величини розраховуються таким чином:

$$\lambda = 0;\ a = x_0;\ b = \frac{g_0 r_0^2}{\sqrt{r_0 K_з}};\ w = \frac{\sqrt{r_0 K_з}}{r_0^2}.$$

Порівняльний аналіз ефективності традиційних і розроблених методів розв'язання рівняння руху КА наведений у таблиці 1, де представлені екстрапольовані значення положення КА за координатою x при початкових умовах $x(0) = 8258000$ м, $g(0) = 0$ м/с. Аналітичний розв'язок знаходився відповідно до виразу (7), як відомий метод був обраний метод Рунге–Кутти 4–5 порядку, Δt – період часового збільшення при ітераційному розрахунку положення КА.

Таблиця 1

	$T_э = 1000$ с	$T_э = 2000$ с	$T_э = 3000$ с	$T_э = 7000$ с

Аналітичний розв'язок	5533752,6 м	-841575,2 м	-6661645 м	7512794 м
Метод Рунне–Кутти ($\Delta t = 50$ с)	5533752,6 м	-841575,2 м	-6661645 м	7512794 м
Метод Рунне–Кутти ($\Delta t = 1000$ с)	5537631,2 м	-795330,1 м	-6580257 м	7336535 м
Ряд Тейлора (6 дискрет, $\Delta t = 1000$ с)	5537631,8 м	-837064,5 м	-6664215 м	7524072,5 м
Ряд Тейлора (10 дискрет, $\Delta t = 1000$ с)	5533753 м	-841574,7 м	-6661645,5 м	7512795 м

З результатів моделювання видно, що самим точним і таким, що не потребує великих обчислювальних витрат, є метод диференціально-нетейлорівских перетворень. Відомий метод числового розрахунку Рунне–Кутти показує таку ж точність розрахунку моделі руху КА при екстраполяції приблизно на один виток, але при рекурсивних розрахунках положення об'єкта з максимальним часовим інтервалом в 50 секунд. Тобто метод Рунне–Кутти є найбільш громіздким в обчислювальному плані. Диференціально-тейлорівский метод вимагає для точного відновлення функції руху КА більш 10 дискрет спектра і, щодо обчислювальних витрат, знаходиться між двома проаналізованими вище методами.

Таким чином, запропонований підхід розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою Р-моделей дозволяє знаходити аналітичний розв'язок задачі побудови моделі руху КА. Диференціально-нетейлорівскі перетворення мають найкращий результат за критерієм ефективність / вартість при відновленні оригіналу функції за диференціальним спектром.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Київ: Наук. думка, 1980. – 419 с.
2. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Київ: Наук. думка, 1988. – 216 с.
3. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Київ: Наук. думка, 1990. – 184 с.

КОВБАСЮК Сергій Валентинович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник науково-дослідного відділу Житомирського військового інституту радіоелектроніки імені С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– розробка та дослідження радіоелектронних інформаційних систем космічної інфраструктури.

т. 25-84-03

Подано 19.07.2001