

УДК519.95

519.85 + 621.391

А.А. Засядько, к.т.н., доц.
Черкаський інженерно-технологічний інститут**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ
МЕТОДОМ ДИФЕРЕНЦІЙНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ**

Розглянуті питання застосування диференційних тейлорівських перетворень для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Побудована диференційно-тейлорівська модель задачі відновлення. Наведений обчислювальний алгоритм розв'язку рівнянь і проаналізовані його переваги в порівнянні з відомими.

Для моделювання задач відновлення сигналів використовується інтегральне рівняння Фредгольма першого роду [1]. У цьому рівнянні залежність між вхідним і вихідним сигналами описується інтегральним оператором, ядро якого повністю визначається характеристиками вимірювального приладу, представляючи собою реакцію системи на типові вхідні сигнали. Процес вимірювання спектральним приладом представимо у вигляді математичної моделі на основі інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, що дозволяє побудувати на її основі ефективні алгоритми розв'язку задачі відновлення у спектроскопії [1, 2]:

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x); \quad c < x < d, \quad (1)$$

де $K(x, s) = e^{-a(x-s)^2}$ або $K(x, s) = e^{-a(x^2+s^2)}$, $f(x) = re^{-bx^2}$.

Нехай розв'язок рівняння (1) можна представити у вигляді степеневого багаточлена:

$$y(s) = \sum_{m=0}^{m=n} C_m s^m, \quad (2)$$

де степінь багаточлена m вибирається з особливості конкретної задачі; C_m – невідомі коефіцієнти. Розв'язок (1) у такій постановці зводиться до знаходження коефіцієнтів C_m .

Оскільки для розв'язку (1) необхідно знайти функцію $y(s)$ (2), то наведена задача – некоректна і потребує застосування регуляризуючих алгоритмів. Але мати інформацію про функцію $y(s)$ можна лише після відповідної обробки спостережуваних величин $f(x)$, тому сигнали, отримані на спектрометричному вимірювачі, через пристрій сполучення надходять в ЕОМ, оснащену програмно-алгоритмічним забезпеченням, орієнтованим на обробку спектрометричних даних. Відомі методи розв'язку (2) орієнтовані на використання регуляризуючих параметрів. Проте при цьому виникає проблема знаходження оптимального значення параметра регуляризації, від якого залежить точність одержуваного розв'язку. Як показали дослідження, метод нев'язки для задач спектроскопії на практиці виявляється неприйнятним, тому що не забезпечує знаходження оптимального значення параметра регуляризації [2]. Цю проблему може вирішити метод модельних прикладів [1], для реалізації якого необхідно побудувати модельний приклад з відомим розв'язком, враховуючи відому інформацію, тобто побудувати сигнал $y(s)$ і ядро $K(x, s)$ за допомогою моделей, що описують фізичні процеси. Метод виправдав себе при виконанні великої кількості однотипних обчислень [1, 2], під час обробки даних спектрометричного аналізу. Проте не використовувалася можливість побудови на основі диференційних тейлорівських перетворень (ДТ-перетворень) точної моделі (1), на основі якої можливо побудувати більш ефективні наближені методи і алгоритми розв'язку задачі відновлення у спектроскопії. Ця модель дозволяє побудувати обчислювальні схеми, що характеризуються високою точністю, простотою і наочністю алгоритму і які можуть застосовуватися для більш широкого класу функцій, ніж у [1, 2].

При математичному моделюванні фізичних об'єктів і процесів, що описуються інтегральними рівняннями, диференційні перетворення дозволяють замінити операції інтегрування еквівалентними алгебраїчними операціями як у чисельному, так і в аналітичному вигляді. Диференційні перетворення розширюють область застосування операційних методів на дослідження стану фізичних об'єктів і процесів, що описуються інтегральними рівняннями [3–5]. Диференційними тейлорівськими перетвореннями називаються функціональні перетворення вигляду [3–5]:

$$X(k) = \underline{x}(k) = \frac{H^k}{t^k} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right] \quad \text{Ex}(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{t}{t} \right)^k X(k). \quad (3)$$

У перетвореннях (3) ліворуч від символу Ξ знаходиться пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $x(t)$ знайти зображення $X(k)$, а праворуч – обернене перетворення, що дозволяє по зображенню $X(k)$ одержати оригінал $x(t)$ у формі степеневого ряду, що є інакше записаним рядом Тейлора з центром у точці $t = 0$. Перетворення (3) називаються диференційними тейлорівськими перетвореннями (ДТ-перетвореннями). Диференційні зображення $X(k)$ називаються диференційними T -спектрами, а значення T -функції $X(k)$ при конкретних значеннях аргумента k називаються дискретами, наприклад, $X(0)$ – нульова дискрета, $X(1)$ – перша дискрета, $X(2)$ – друга дискрета і т. д.

В області ДТ-зображень зображення шуканого розв'язку (2):

$$Y(k) = \sum_{i=0}^{i=k} C_i H^i \varphi(k-i). \quad (4)$$

Таким чином, дискрети шуканого розв'язку будуть визначатися як

$$Y(0) = C_0, Y(1) = C_1 H, Y(2) = C_2 H^2, Y(3) = C_3 H^3, \dots$$

Дане інтегральне рівняння будемо розглядати в різноманітних перетинах змінного x . Тоді фіксоване значення змінного x позначимо як x_c . Таким чином, ядро $K(x, s)$ можна подати як функцію одного змінного s . Позначимо

$$u(s) = e^{v(s)}, v(s) = -a(x_c - s)^2 = -a(x_c^2 - 2x_c s + s^2). \quad (5)$$

Зображення $v(s)$:

$$V(k) = -a[x_c^2 \varphi(k) - 2x_c H \varphi(k-1) + H^2 \varphi(k-2)]. \quad (6)$$

Тоді дискрети визначаються як

$$V(0) = -a x_c^2, V(1) = 2a x_c H, V(2) = -a H^2; V(k \geq 3) = 0.$$

Для визначення дискрет T -функції $\exp(x)$ у припущенні, що дискрети T -функції $X(k)$ відомі, скористаємося рекурентною формулою [3-5]:

$$\exp X(k+1) = \sum_{l=0}^{l=k} \frac{l+1}{k+1} X(l+1) \exp(k-l),$$

яка дозволяє послідовно визначати дискрети функції $\exp X(k) \Xi e^{x(k)}$, починаючи з дискрети $\exp X(0) = e^{x(0)}$. Тоді для (5)

$$U(k+1) = \sum_{l=0}^{l=k} \frac{l+1}{k+1} V(l+1) U(k-l), \quad (7)$$

і окремі дискрети ядра

$$U(0) = e^{-a x_c^2}, U(1) = V(1) U(0), U(2) = 0,5 V(1) U(1) + V(2) U(0);$$

$$U(3) = \frac{1}{3} V(1) U(2) + \frac{2}{3} V(2) U(1) + V(3) U(0).$$

Добуток в області зображень (T -добуток) представить зображення підінтегральної функції (1). Для цього введемо позначення $z(s) = u(s) y(s)$ – підінтегральна функція – функція одного змінного s . Тоді T -добуток дискрет

$$Z(k) = U(k) * Y(k) = \sum_{l=0}^{l=k} U(k-l) Y(l). \quad (8)$$

Окремі дискрети підінтегральної функції

$$Z(0) = U(0) Y(0);$$

$$Z(1) = U(1) Y(0) + U(0) Y(1); Z(2) = U(2) Y(0) + U(1) Y(1) + U(0) Y(2); \dots$$

Знайдемо визначений інтеграл за відомою T -функцією $Z(k)$, що зображує оригінал $z(s)$ по змінній s у межах від a до b , використовуючи лише дискрети $Z(0), Z(1), Z(2), \dots, Z(\infty)$ ДТ-функції $Z(k)$ в області зображень [3-5]:

$$\int_{a_c}^{b_c} z(s) ds = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{b_c^{k+1} - a_c^{k+1}}{k+1} \right) \frac{Z(k)}{H^k} = \frac{b-a}{1} Z(0) + \frac{b^2 - a^2}{2H} Z(1) + \dots, \quad (9)$$

де $a_c = a - s_0$, $b_c = b - s_0$, s_0 – центр розкладання в ряд Тейлора. В окремому випадку $s_0 = 0$.

Розглянемо випадок, коли $s_0 \neq 0$. Тоді ДТ-перетворення (3) буде зміщеним.

Нехай за (2) $y(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + C_4 s^4$. Позначимо $s = s_0 + \tau$. Тоді

$$y(\tau) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1\tau + \bar{C}_2\tau^2 + \bar{C}_3\tau^3 + \bar{C}_4\tau^4,$$

$$y(\tau) = C_0 + C_1s_0 + C_1\tau + C_2(s_0^2 + 2s_0\tau + \tau^2) + C_3(s_0^3 + 3s_0^2\tau + 3s_0\tau^2 + \tau^3) + \dots$$

Звідси, групуючи C_i при однакових степенях змінного τ , одержимо:

$$\bar{C}_0 = C_0 + C_1s_0 + C_2s_0^2 + C_3s_0^3 + C_4s_0^4, \tag{10}$$

$$\bar{C}_1 = C_1 + 2C_2s_0 + 3C_3s_0^2 + 4C_4s_0^3,$$

$$\bar{C}_2 = C_2 + 3C_3s_0 + 6C_4s_0^2, \bar{C}_3 = C_3 + 4C_4s_0, \bar{C}_4 = C_4.$$

Аналогічно можна одержати коефіцієнти (10) для зміщених ДТ-перетворень для іншого максимального степеня багаточлена (2). При $s_0 = 0$ у (10) $\bar{C}_i = C_i$.

Представимо алгоритм розв'язку інтегрального рівняння (1) на основі його ДТ-моделі. Як уже вказувалося раніше, для цього необхідно знайти невідомі коефіцієнти C_i .

1. Розв'язок (1) шукається у вигляді степеневого багаточлена:

$$y(s) = \sum_{m=0}^{m=n} C_m s^m.$$

2. За початковим рівнянням на основі формул (4-10) складається ДТ-модель рівняння (1).

3. Накладається сітка перетинів по параметру x в залежності від числа невідомих коефіцієнтів C_i .

4. У кожному перетині для $x = A$ вибирається декілька точок розкладання s_0 (не менше 2-3-х точок).

5. Для кожної точки розкладання в кожному обраному перетині $x = A$ знаходиться площа фігури, що представляє собою інтеграл на відповідному інтервалі. Наприклад, для рис. 1 можна скласти рівність:

$$\int_a^{a'} F(x,s) ds + \int_a^b F(x,s) ds + \int_b^{b'} F(x,s) ds = f(x). \tag{11}$$

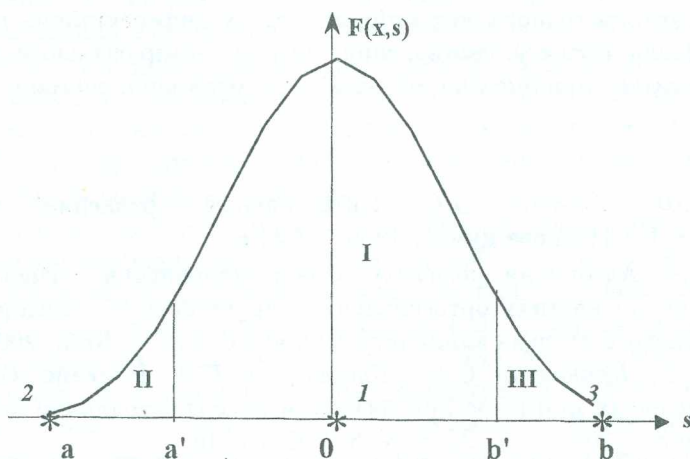


Рис. 1. Розбиття підінтегральної функції $F(x,s)$ при $x=0$ для апроксимації рядами Тейлора

Для фігури I точка розкладання - 1, для фігур II і III - точки 2 і 3 відповідно. Для точки 1 зсув $s_0 = 0$, для точок 2 і 3 $s_0 \neq 0$. Отже, для цих точок необхідно виконувати перерахунок коефіцієнтів C_i за формулою (10). Зрозуміло, розбиття на фігури I-III виконується з розумінням найкращої апроксимації рядом Тейлора на відповідному відрізку змінної s . На рис. 2 показана апроксимація в точці розкладання $s = 0$ для четвертого степеня ряду Тейлора. Значить, правильний вибір інтервалів розбиття підінтегральної функції має велике значення, тому що, наприклад, на інтервалі $[a'', b'']$, на відміну від інтервалу $[a', b']$, будуть значні похибки апроксимації для даного степеня ряду Тейлора через великі заходи у від'ємну область. Інакше необхідно збільшувати степінь ряду Тейлора, що ускладнює ДТ-модель рівняння (1).

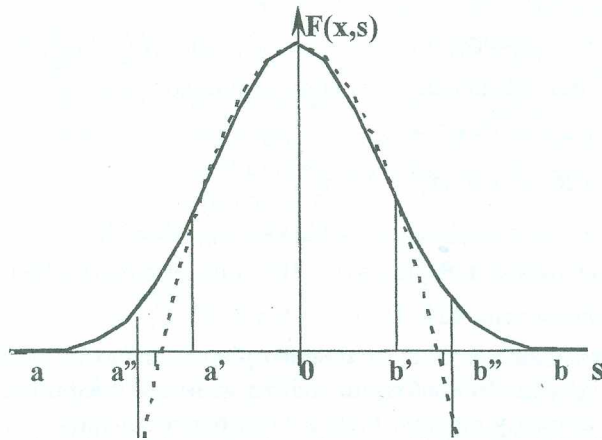


Рис. 2. Вибір інтервалів інтегрування для найкращої апроксимації локальними рядами Тейлора

6. На основі формули (11) з урахуванням (4)–(10) складається система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), де невідомими є коефіцієнти C_i . Кількість невідомих залежить від степеня багаточлена (2).

7. Розв'язується отримана СЛАР щодо C_i . Знайдені C_i дозволяють зробити висновок про вигляд невідомої функції (2).

Таким чином, наведена ДТ-модель дозволяє побудувати обчислювальні схеми розв'язку задачі відновлення у спектроскопії на основі інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду [1–2]. Використання локальних рядів Тейлора дозволяє регулювати точність обчислень не тільки кількістю дискрет, а й кількістю точок розкладання. Отже, можливе розширення класу розв'язуваних задач і розв'язку задач із широкими ядрами, що є важливим для розв'язку задачі відновлення для малопотужних спектральних приладів із широкою апаратною функцією [2].

На закінчення відзначимо основні особливості диференційно-тейлорівської моделі задачі відновлення. Застосування точного операційного методу диференційних перетворень дозволяє отримати точну модель процесу спотворення сигналу вимірювальним приладом у вигляді СЛАР. Похибка вноситься при чисельному розв'язку отриманої системи.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
2. Засядько А.А. Алгоритми розв'язку задачі відновлення сигналів у спектроскопії з використанням дискретних ортогональних перетворень // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Київ, 2000. – 17 с.
3. Засядько А.А., Краюшкин С.Б., Дубровская Г.Н. Решение задачи восстановления методом модельных примеров при лазерном масс-спектральном анализе // Электрон. моделирование. – 2000. – Т. 22. – № 5. – С. 31–40.
4. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 419 с.
5. Пухов Г. Е. Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наук. думка, 1988. – 216 с.
6. Пухов Г. Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.

ЗАСЯДЬКО Аліна Анатоліївна – кандидат технічних наук, доцент кафедри інформатики Черкаського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- моделювання;
- цифрова обробка сигналів;
- некоректні задачі.

Подано 21.09.2001