УДК 519.67

А.М. Іваницький, студ.
С.І. Яремчук, доц., к.ф.-м.н.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ МЕТОДОМ МОЖЛИВИХ НАПРЯМКІВ

Застосовано метод можливих напрямків для розташування прямокутників в прямокутній області таким чином, щоб сума відстаней від полюсів прямокутника до обраної точки була якнайбільшою. Наведено відповідний алгоритм. Також розроблено метод пошуку початкового наближення.

Нехай є n прямокутників, що потрібно розмістити в області з координатами несуміжних кутових точок $(0,0)$ – (a,b). Розміри i-го прямокутника – l_i та h_i (відповідно довжина і ширина), його полюс – (ξ_i, η_i) для $i = 1,.., n$. В області задана точка (C_x, C_y).

Потрібно розмістити зазначені фігури в області таким чином, щоб сума відстаней між їх полюсами і заданою точкою з координатами (C_x, C_y) була найбільшою.

При розв'язанні цієї задачі необхідно враховувати дві умови:

1) усі прямокутники не повинні виходити за межі області;

2) усі прямокутники не повинні попарно перетинатися.

Дані дві умови можна представити у вигляді нерівностей, які й будуть являти собою обмеження, що накладаються на параметри розташування прямокутників.

Запишемо ці нерівності.

Для першої умови:

$$\xi_i - l_i / 2 \ge 0; \quad \xi_i + l_i / 2 \le a; \quad \eta_i - h_s / 2 \ge 0; \quad \eta_i + h_s / 2 \le b \text{ для } i = 1,..., n.$$

Для другої умови:

$$|\xi_i - \xi_j| \le (l_i + l_j) / 2 \text{ або } |\eta_i - \eta_j| \ge (h_i + h_j) / 2, \text{ для } i, j = 1,..., n \text{ та } i \ne j.$$

Функція цілі для даної задачі:

$$\chi(x) = -(\sum_{i=1}^{n} (C_x - \xi_i)^2 + \sum_{j=1}^{n} (C_y - \eta_j)^2).$$

Тобто задача оптимізації має вигляд:

$$\chi(x) = -(\sum_{i=1}^{n} (C_x - \xi_i)^2 + \sum_{j=1}^{n} (C_y - \eta_j)^2) \to \min.$$

$$\begin{cases} \xi_i - l_i / 2 \ge 0 \\ \xi_i + l_i / 2 \le a \\ \eta_i - h_i / 2 \ge 0 \\ \eta_i + h_i / 2 \le b \\ \xi_i - \xi_j \ge (l_i + l_j) / 2 \end{cases} \text{ чи } \begin{cases} \xi_i - l_i / 2 \ge 0 \\ \xi_i + l_i / 2 \le a \\ \eta_i - h_i / 2 \ge 0 \\ \eta_i + h_i / 2 \le b \\ \eta_i - \eta_j \ge (h_i + h_j) / 2 \end{cases} \text{ чи } \begin{cases} \xi_i - l_i / 2 \ge 0 \\ \xi_i + l_i / 2 \le a \\ \eta_i - h_i / 2 \ge 0 \\ \eta_i + h_i / 2 \le b \\ \xi_j - \xi_i \ge (l_i + l_j) / 2 \end{cases} \text{ чи } \begin{cases} \xi_i - l_i / 2 \ge 0 \\ \xi_i + l_i / 2 \le a \\ \eta_i - h_i / 2 \ge 0 \\ \eta_i + h_i / 2 \le b \\ \eta_j - \eta_i \ge (h_i + h_j) / 2 \end{cases},$$

де $i, j = 1,..., n$ та $i \ne j$.

Для того, щоб у розв'язанні даної задачі можна було застосувати метод можливих напрямків, потрібно, щоб функція цілі й обмеження були неперервно диференційовані й множина припустимих розв'язків була опуклою. Множина ж припустимих розв'язків поставленої задачі не є опуклою, але вона може бути представлена як об'єднання певної кількості підмножин, що є опуклими, так як описуються системою лінійних нерівностей.

Метод можливих напрямків можна застосувати при будь-якій підмножині множини припустимих розв'язків, так як кожна з них є опуклою і замкнутою. Тому початкову задачу можна розбити на підзадачі оптимізації розташування прямокутників в області, але в кожній підзадачі існує своя підмножина припустимих розв'язків. Виходячи з викладеного вище, поставлену задачу можна розв'язати таким чином:

1) розв'язується кожна підзадача;

2) за розв'язок поставленої задачі приймається той з розв'язків підзадач, який відповідає найменшому значенню функції цілі (1).

Як було сказано вище, розташування прямокутників на будь-якій підмножині можна виконувати за допомогою методу можливих напрямків. Розглянемо підзадачу, що складається з мінімізації заданої функції цілі на одній із підмножин множини припустимих розв'язків, із застосуванням методу можливих напрямків.

Для методу можливих напрямків потрібно задати початкову точку x^0, яка б задовольняла вище описаним обмеженням. Розглянемо, як буде здійснюватися вибір початкової точки.

У цілому від вибору початкової точки залежить і розв'язок задачі, тому що функція цілі багатоекстремальна. Але метод можливих напрямків призначений для розв'язання задач з одним екстремумом. Тому застосування цього методу можливо за такою схемою:

1. На обраній підмножині множини припустимих розв'язків визначається сукупність точок.
2. Точка сукупності приймається за початкову точку для методу можливих напрямків. Методом можливих напрямків розв'язується поставлена задача (задача розташування прямокутників в обраній підмножині). Ця процедура повторюється для всіх точок сукупності. Локальні мінімуми та відповідні їм розв'язки задачі запам'ятовуються.
3. Визначається найменше зі значень функції цілі, отриманих у попередньому пункті. Відповідний йому розв'язок і обирається як розв'язок задачі.

Перший пункт цієї схеми являє собою пошук множини початкових наближень для методу. Але хотілося б сформувати цю множину таким чином, щоб розбіжність значень функції цілі в розв'язках із другого пункту була якнайбільшою, тому що збільшується можливість того, що одне з цих значень – глобальний мінімум. Для того, щоб досить добре підібрати множину початкових наближень, потрібно вловити зв'язок між початковим розташуванням кожного прямокутника і значенням мінімуму функції цілі при такому початковому положенні. У нашому випадку ця залежність проявляється в розташуванні прямокутника щодо точки (C_x, C_y). Розглянемо, чому ж це так.

Точка (C_x, C_y) ділить вихідну прямокутну область на чотири прямокутні підобласті з координатами несуміжних кутових точок $((0,0) - (C_x, C_y))$, $((a,0) - (C_x, C_y))$, $((0,b) - (C_x, C_y))$, $((a,b) - (C_x, C_y))$. Нехай прямокутник, точніше його полюс, потрапив в одну з цих підобластей. Тоді при максимізації відстані від точки (C_x, C_y) до полюса прямокутника даний прямокутник буде неможливо перемістити з обраної підобласті в іншу. Це легко довести. Нехай, наприклад, полюс прямокутника лежить у підобласті $((0,0) - (C_x, C_y))$. Тоді, щоб зменшити функцію цілі (1) на даному кроці, потрібно зменшити ординату й абсцису. При збільшенні однієї з координат полюса збільшується і функція цілі – координати полюса прямокутника не можуть переміститися в іншу підобласть. Тобто для даного випадку ξ не може бути більше, ніж C_x, а η – ніж C_y.

З описаного вище випливає, що множина початкових наближень повинна обиратися таким чином, щоб усі точки цієї множини відрізнялися одна від одної розташуванням прямокутників щодо чотирьох прямокутних підобластей, на які точка (C_x, C_y) ділить початкову прямокутну область. Для того, щоб розмістити прямокутник в одну з прямокутних підобластей, скористаємося такою ідеєю:

1) для того, щоб розмістити прямокутник у прямокутну підобласть $((0,0) - (C_x, C_y))$, потрібно мінімізувати координати його полюса – тобто координати центра будуть наближатися до $(0,0)$;

2) для того, щоб розмістити прямокутник у прямокутну підобласть $((a,0) - (C_x, C_y))$, потрібно максимізувати абсцису і мінімізувати ординату полюса прямокутника – тобто координати полюса будуть наближатися до $(a,0)$;

3) для того, щоб розмістити прямокутник у прямокутній підобласті $((0,b) - (C_x, C_y))$, потрібно мінімізувати абсцису і максимізувати ординату полюса прямокутника – тобто координати полюса будуть наближатися до $(0,b)$;

4) для того, щоб розмістити прямокутник у прямокутну підобласть $((a,b) - (C_x, C_y))$, потрібно максимізувати координати полюса прямокутника – тобто координати полюса будуть наближатися до (a,b).

Зазначену процедуру мінімізації та максимізації потрібно проводити так, щоб прямокутники не перетиналися і не виходили за межі області.

Тобто, фактично має місце задача максимізації або мінімізації координат полюса кожного прямокутника на одній із підмножин множини допустимих розв'язків. Для розв'язку цієї підзадачі будемо використовувати сиплекс-метод, тому що функція цілі приймає вигляд:

$$\chi(x) = CZ \to \min,$$

де Z – вектор $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n)$; C – вектор $(c_{1x}, c_{1y}, \ldots, c_{nx}, c_{ny})$ і c_{1x}, c_{1y} – може приймати значення -1 або 1, що вибирається випадково.

А обмеження ті ж, що і для поставленої підзадачі.

З вигляду функції цілі випливає, що мінімізація або максимізація координати ξ_i і залежить від значення c_{1x}, а координати η_i – від значення c_{1x}, c_{1y} (якщо їх значення дорівнюють –1, то відбувається максимізація, якщо ж 1 – мінімізація). Таким чином, розв'язок задачі пошуку початкового наближення зводиться до мінімізації функції $\chi(x) = CZ$ на одній з підмножин множини припустимих розв'язків.

Розв'язок даної задачі – z^0 – і буде початковим наближенням для методу можливих напрямків, що орієнтований на розв'язок поставленої підзадачі. У нашому випадку (при максимізації суми відстаней від полюсів прямокутників до заданої точки) початкове наближення призводить до розв'язку задачі з розташування прямокутників у прямокутній області на обраній підмножині множини припустимих розв'язків. Даний метод пошуку початкового наближення можна застосовувати і для задач з іншими функціями цілі.

Тепер розглянемо сам метод можливих напрямків.

Дамо визначення можливого напрямку.

Нехай X – деяка множина з R_n та $\bar{x} \subset X$. Напрямок вектора h називається можливим у точці $\bar{x}$, якщо існує таке $\bar{a}$, що для всіх $\alpha \in [0, \bar{a})$ точка $x = \bar{x} + \alpha h$ належить множині X, де $\alpha > 0$.

Якщо точка $\bar{x}$ є внутрішньою точкою X, то всі напрямки в цій точці можливі; якщо ж точка $\bar{x}$ лежить на межі множини X, то можливі випадки, коли в ній немає жодного можливого напрямку.

Основна ідея методу полягає в тому, щоб із усіх можливих напрямків у точці $\bar{x} \subset X$ вибрати такий напрямок, в якому функція цілі швидше усього спадає, і зробити спуск уздовж цього напрямку з максимально можливим кроком, що обмежується множиною припустимих розв'язків.

У даному методі є свої переваги та недоліки. Перерахуємо їх.

Переваги методу:

1) на кожній ітерації розв'язується задача лінійного або квадратичного програмування, у той час, як в інших методах умовної оптимізації, а саме до цих методів і відноситься метод можливих напрямків, на кожному кроці розв'язується задача в загальному випадку тієї ж складності, що і вихідна;

2) напрямок спуску вибирається таким чином, щоб уздовж нього функція цілі зменшувалася з максимально можливою швидкістю і спуск по цьому напрямку можна було зробити с максимально можливим кроком, що обмежується множиною припустимих розв'язків.

Недоліки:

1) повільна збіжність;

2) велика кількість розрахунків на кожному кроці.

Розглянемо загальну схему роботи даного методу.

Нехай є задача умовної оптимізації:

$$\chi(x) \to \min,\ x \in X = \{\, x \in Y \subset R_n : \varphi_i(x) \le 0, i = 1,..., m \,\},$$

де $\chi(x)$ і $\varphi_i(x), i = 1,..., m$ – неперервно диференційовані на Y. Нехай x – деяка точка X; ε – досить мале число більше нуля.

Складемо множину індексів обмежень, що виконуються в точці $\bar{x}$ з запасом, який не перевищує $\varepsilon > 0$:

$$-\varepsilon < \varphi(\bar{x}) \le 0 .$$

Цю множину будемо позначати так:

$$I(\bar{x}, \varepsilon) = \{ i \in \{1,2,..., m\} : -\varepsilon < \varphi(\bar{x}) \le 0 \} .$$

Розглянемо принцип вибору можливого напрямку h у точці $\bar{x}$. Очевидно, що для того, щоб напрямок h був можливий, необхідно, щоб виконувалася умова:

$$(\nabla\varphi_i(\bar{x}), h) < 0 \text{ для всіх } i \in I(\bar{x}, \varepsilon). \quad (1.1)$$

Для того ж, щоб функція цілі в напрямку h спадала, потрібно, щоб виконувалася така умова:

$$(\nabla\chi_i(\bar{x}), h) < 0 . \quad (1.2)$$

Таким чином, можливий напрямок h повинний задовольняти двом умовам (1.1), (1.2). Тому h обирається таким чином, щоб мінімізувати максимальну із величин:

$$(\nabla\varphi_i(\bar{x}), h) \text{ для всіх } i \in I(\bar{x}, \varepsilon) \text{ і } (\nabla\chi_i(\bar{x}), h),$$

причому умови (1.1), (1.2) повинні виконуватися.

Для такого вибору h необхідно розв'язати задачу:

$$\tilde{\chi}(h_1, h_2, h_3, ..., h_n, z) = z + 0 * (h_1 + h_2 + h_3 + ... + h_n) \to \min;$$

$$\begin{cases} (\nabla \chi(\bar{x}),\ h) \le z; \\ (\nabla \varphi_i(\bar{x}),\ h) \le z, \end{cases}$$

де $i \in I\ (\bar{x}, \varepsilon)$.

Оскільки множина допустимих розв'язків h не обмежена і не замкнута, то вводяться обмеження типу $|h_i| \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$ або $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \le 1$.

Отримана таким чином задача є задачею лінійного або квадратичного програмування $n+1$ змінної: $h_1, h_2, h_3, .., h_n, z$. Розв'язавши її, одержимо: $h_1^*, h_2^*, h_3^*, \ldots, h_n^*, z^*$.

Якщо при цьому виявилося, що $z^* > -\varepsilon$, то перевіряється виконання однієї з таких умов:

1) якщо ε не більше заданої точності розв'язку, то точка $\bar{x}$ є наближеним розв'язком вихідної задачі з точністю ε;

2) якщо ε більше заданої точності, то ε зменшується $\varepsilon = \varepsilon\gamma$, де $0 < \gamma < 1$. І процедура повторюється зі складання $I\ (\bar{x}, \varepsilon)$.

Якщо ж $z^* \le -\varepsilon$, то знайдений можливий напрямок $h^* = (h_1^*, h_2^*, h_3^*, \ldots, h_n^*)$.

Розглянемо як проводиться спуск на k-му кроці, коли був знайдений можливий напрямок h^*. Тобто для k-го кроку x^k – точка k-го наближення, h^k – можливий напрямок із даної точки. Тоді наближення $(k+1)$ має вигляд:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_k h^k,$$

де β_k задовольняє умові:

$$\chi\ (x^k) - \chi\ (x^k + \beta_k h^k) \ge \lambda_k\ (\chi\ (x^k) - \omega_k),$$

в якій $0 < \lambda_k < 1$ і $\omega_k = \min\limits_{\beta \in (0, \beta_{\max}\}} \chi\ (x^k + \beta_k h^k)$, де $\beta_{\max}$ – максимальне значення β, при якому точка $x^k + \beta_k h^k$ належить множині X.

β_k може знаходитися методом найскорішого спуску, методом подрібнення кроку або будь-яким іншим методом.

ІВАНИЦЬКИЙ Андрій Миколайович – студент Житомирського інженерно-технологічного інституту.
Наукові інтереси:
– математичні методи оптимізації;
– програмування на сучасних мовах програмування.

ЯРЕМЧУК Світлана Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри ПЗОТ Житомирського інженерно-технологічного інституту.
Наукові інтереси:
– математичні методи оптимізації;
– дослідження операцій;
– математична фізика.

Подано 20.05.2001

Іваницький А.М., Яремчук С.І. Оптимізація розташування прямокутників у прямокутній області методом можливих напрямків

Иваницкий А.Н., Яремчук С.И. Оптимизация размещения прямоугольников в прямоугольной области методом возможных направлений

Ivanitsky A.N., Yaremchuk S.I. Optimization of allocation of rectangulars in square region by a method of possible directions

УДК 519.67

Оптимизация размещения прямоугольников в прямоугольной области методом возможных направлений / А.Н. Иваницкий, С.И. Яремчук

Использован метод возможных направлений для размещения прямоугольников в прямоугольной области таким образом, чтобы сумма расстояний от полюсов прямоугольника к выбраной точке була наибольшей. Приведен соответствующий агоритм. Также розработан метод поиска начального приближения.

УДК 519.67

Optimization of allocation of rectangulars in square region by a method of possible directions / A.N. Ivanitsky, S.I.Yaremchuk

The method of possible directions has been used at this article. It has been used for allocation of rectangulars in square region. But sum of distance from the poles of rectangulars to point must be maximized. Algorithm for this method has been reduced at article too. The method of searching starter point has been developed.