Г.Л. Баранов, д.т.н.
НДІ «Квант – Навігація»
В.Л. Баранов, д.т.н.
Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України, Київ
В.В. Сєнакосов
НДІ «Квант – Навігація»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКА МОДЕЛЬ РУХУ СУДЕН

Запропонована модель руху судна, яка заснована на диференціально-тейлорівських перетвореннях.

В процесі рішення задач судноводіння використовують різні математичні моделі руху суден [1]. Для автоматизації управління руху судна необхідно реалізувати обчислення за математичною моделлю в реальному часі [2]. В задачах попередження зіткнень суден моделювання потрібно виконувати в прискореному часі з метою прогнозування ситуацій, що виникають при маневруванні судів [3]. Вимоги моделювання в реальному і прискореному часі одночасно з вимогами точності та адекватність процесів, що описуються математичними моделями, для відображення еволюції координат реального судна важко задовольнити сучасними судновими ЕОМ. Це пов'язано з тим, що математична модель руху судна описується складною нелінійною системою диференціальних рівнянь [1]. Звичайно на практиці рівняння руху судна спрощуються та лінеаризуються. У цьому випадку задача моделювання в реальному і прискореному часі вирішується в дуже обмеженому діапазоні зміни змінних математичної моделі, в якому спрощена модель достовірно описує реальну ситуацію, що викликана маневруванням суден.

В роботі пропонується вирішити проблему моделювання нелінійних диференціальних рівнянь руху судна в реальному і прискореному часі на основі математичного апарата диференціальних перетворень [4–6]. Початкова математична модель руху судна, що описується нелінійними диференціальними рівняннями, переводиться в область зображень, в якій відсутній аргумент часу. Переклад функцій часу $x(t)$ в область зображень здійснюється таким чином:

$$\underline{x}(t) = X(k) = \frac{H^K}{k!}\left[\frac{d^k x(t_i+\tau)}{d\tau^k}\right]_{\tau=0}, \tag{1}$$

де $X(k)$ – позначення диференціального зображення оригіналу у вигляді дискретної функції цілочисельного аргументу $k = 0, 1, 2,\ldots$;

t_i – фіксований момент часу, за який аналізується зміна функції часу $x(t)$;

τ – локальний аргумент часу, значення якого вибирають в межах $0 \le \tau \le H$ або $-H \le \tau \le H$;

H – масштабна постійна, що має розмірність часу та визначає відрізок часового аргументу, на якому розглядається функція $x(t_i+\tau)$, величина H повинна бути менше радіуса збіжності рядів Тейлора в точці t_i.

У виразі (1) риска під функцією часу $x(t)$ означає пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $x(t)$ знайти зображення $X(k)$. Зворотне перетворення відновлює оригінал $x(t_i+\tau)$ у вигляді ряду Тейлора з центром в точці $t = t_i$:

$$x(t_i+\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{H}\right)^k X(k). \tag{2}$$

Зображення $X(k)$ складають диференціальний спектр. Значення $X(k)$ при конкретних значеннях аргументу $k = 0, 1, 2,\ldots$ називаються дискретами диференціального спектра. Зворотне перетворення (2) встановлює зв'язок між диференціальним спектром $X(k)$, $k = 0, 1, 2,\ldots$ і оригіналом у вигляді функції часу $x(t_i+\tau)$.

Ефективність застосування диференціальних перетворень (1) до моделювання руху судна досягається тим, що в області зображень обчислення дискрет диференціальних спектрів здійснюється за рекурентними виразами, а відновлення функцій часу $x(t_i+\tau)$ в точках $\tau = H$ виконується згідно з (2) алгебраїчним підсумовуванням дискрет диференціального спектра $X(k)$. В цьому випадку виключається чисельне інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, що описують динаміку руху судна.

Нехай математична модель руху судна описується таким векторним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = f\big(x, u(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

де x – n-мірний вектор стану;

u – m-мірний вектор управління ($m < n$).

Диференціальні перетворення (1) перетворюють рівняння (3) в форму рекурентного виразу:

$$X(k+1) = \frac{H}{k+1} f\left[X(k), U(k)\right], \quad X(0) = x_0,$$

яке дає можливість, привласнюючи цілочисельні значення k = 0, 1, 2,…, визначити дискрети диференціального спектра $X(k)$ вектора стану судна $x(t)$. Зворотне перетворення (2) дозволяє за дискретами диференціального спектра $X(k)$ визначити зміну в часі вектора стану $X(k)$, що описує параметри руху судна.

Як приклад розглянемо рівняння руху судна в горизонтальній площині [1], які записані в зв'язаній системі координат:

$$\begin{aligned}
&-\rho V(1+k_{11})\frac{d\upsilon}{dt} + \rho V(1+k_{11})\upsilon\beta\frac{d\beta}{dt} - \rho V(1+k_{22})\upsilon\omega\beta - \\
&-C_{x_0}\frac{\rho}{2}\upsilon^2 F_Д - C_{x_p}\frac{\rho}{2}\upsilon^2 S_П + T_x = 0, \\
&\rho V(1+k_{22})\beta\frac{d\upsilon}{dt} + \rho V(1+k_{22})\upsilon\frac{d\beta}{dt} - \rho V(1+k_{11})\upsilon\omega + \\
&+(C_y^\beta\beta + C_2\beta^2)\frac{\rho}{2}\upsilon^2 F_Д - \mu_k\left[\alpha - \chi_П(\beta + \frac{\varepsilon L}{\upsilon}\omega)\right]\frac{\rho}{2}\upsilon^2 S_П = 0, \\
&-I(1+k_{66})\frac{d\omega}{dt} + C_m^\beta\frac{\rho}{2}\upsilon^2 F_Д L\beta - C_m^\omega\frac{\rho}{2}\upsilon F_Д L^2\omega + \\
&+\mu_k l_p\left[\alpha - \chi_П(\beta + \frac{\varepsilon L}{\upsilon}\omega)\right]\frac{\rho}{2}\upsilon^2 S_П = 0, \\
&\upsilon(0) = \upsilon_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \omega(0) = \omega_0,
\end{aligned} \tag{4}$$

де α – кут перекладки стерна; $\chi_П$ – приведений коефіцієнт впливу корпусу і гвинта на стерно; $S_П$ – приведена площа стерна; C_{x_p} – коефіцієнт опору стерна; k_{11}, k_{22}, k_{66} – коефіцієнти приєднаної маси; ρ – щільність води; V – об'ємна водотоннажність судна; C_{x_0} – коефіцієнт опору води руху судна на прямому курсі; $F_Д$ – приведена площа зануреної частини діаметральної площини судна; C_y^β, C_2 – коефіцієнти нормальної сили корпусу; μ_k – коефіцієнт бічної сили стерна; ε – відносне відстояння стерна від мідель-шпангоута; C_m^β – коефіцієнт моменту корпусу; L – довжина судна по ватерлінії; C_m^ω – коефіцієнт демпферуючого моменту; l_p – відстояння стерна від мідель-шпангоута; T_x – тяга гребних гвинтів судна; l – момент інерції маси судна; υ – швидкість судна; β – кут дрейфу; ω – кутова швидкість обертання судна.

Математичну модель (4) руху судна перетворюємо з урахуванням введених позначень до вигляду:

$$\begin{aligned}
&-\frac{d\upsilon}{dt} + q\frac{d\beta}{dt} = a_1 q\omega + a_2 w + a_3 T_x, \\
&\beta\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{d\beta}{dt} = a_4\upsilon\omega - a_5\beta w - a_6 q^2 - a_7\omega\upsilon + a_8 w\alpha, \\
&\frac{d\omega}{dt} = a_9\beta w - a_{10}\upsilon\omega + a_{11} w\alpha, \\
&q = \upsilon\beta, \; w = \upsilon^2, \; \upsilon(0) = \upsilon_0, \; \beta(0) = \beta_0, \; \omega(0) = \omega_0,
\end{aligned} \tag{5}$$

де коефіцієнти рівнянь визначаються такими виразами:

$$a_1 = \frac{1+k_{22}}{1+k_{11}}; \; a_2 = \frac{C_{x_0}F_Д + C_{x_p}S_П}{2V(1+k_{11})}; \; a_3 = \frac{1}{\rho V(1+k_{11})}; \; a_4 = \frac{1}{a_1};$$

$$a_5 = \frac{C_y^\beta F_Д + \mu_k\chi_П S_П}{2V(1+k_{22})}; \; a_6 = \frac{C_2 F_Д}{2V(1+k_{22})}; \; a_7 = \frac{\mu_k\chi_П\varepsilon L S_П}{2V(1+k_{22})};$$

$$a_8 = \frac{\mu_k S_П}{2V(1+k_{22})}; \; a_9 = \frac{\rho(C_m^\beta F_Д L - \mu_k l_p\chi_П S_П)}{2I(1+k_{66})};$$

$$a_{10} = \frac{\rho(C_m^\omega F_Д L^2 + \mu_k l_p\chi_П\varepsilon L S_П)}{2I(1+k_{66})}; \; a_{11} = \frac{\rho\mu_k l_p S_П}{2I(1+k_{66})}.$$

Застосувавши диференціальні перетворення (1) до системи рівнянь (5), отримаємо диференціально-тейлорівську модель руху судна:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{k+1}{H}\upsilon(k+1)+\sum_{l=0}^{l=k}q(k-l)\frac{l+1}{H}\beta(l+1)=a_1\sum_{l=0}^{l=k}q(k-l)\omega(l)+a_2w(k)+a_3T_x(k),\\
&\sum_{l=0}^{l=k}\beta(k-l)\frac{l+1}{H}\upsilon(l+1)+\sum_{l=0}^{l=k}\upsilon(k-l)\frac{l+1}{H}\beta(l+1)=a_4\sum_{l=0}^{l=k}\upsilon(k-l)\omega(l)-\\
&-a_5\sum_{l=0}^{l=k}\beta(k-l)w(l)-a_6\sum_{l=0}^{l=k}q(k-l)q(l)-a_7\sum_{l=0}^{l=k}\omega(k-l)\upsilon(l)+a_8\sum_{l=0}^{l=k}w(k-l)\alpha(l)\\
&\omega(k+1)=\frac{H}{k+1}\left[a_9\sum_{l=0}^{l=k}\beta(k-l)w(l)-a_{10}\sum_{l=0}^{l=k}\upsilon(k-l)\omega(l)+a_{11}\sum_{l=0}^{l=k}w(k-l)\alpha(l)\right],\\
&q(k)=\sum_{l=0}^{l=k}\upsilon(k-l)\beta(l),\ w(k)=\sum_{l=0}^{l=k}\upsilon(k-l)\upsilon(l),\\
&\upsilon(0)=\upsilon_0,\ \beta(0)=\beta_0,\ \omega(0)=\omega_0,\ q(0)=\upsilon_0\beta_0,\ w(0)=\upsilon_0^2.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Надаючи цілочисельні значення k = 0, 1, 2,…, за диференціально-тейлорівською моделлю (6) визначаємо диференціальні спектри швидкості судна $\upsilon(k)$, кута дрейфу $\beta(k)$ та кутової швидкості обертання судна $\omega(k)$. Масштабну постійну H вибираємо рівною часу прогнозування руху судна. Відновлення параметрів руху судна в часовій області здійснюємо у вигляді ряду Тейлора за виразом зворотного перетворення (2).

Основна перевага диференціально-тейлорівської моделі (6) руху суден полягає у виключенні чисельного інтегрування складної нелінійної системи диференціальних рівнянь (5). Обчислення дискрет диференціальних спектрів параметрів руху судна за моделлю (6) вимагає реалізації тільки операцій алгебраїчного складання і множення. Визначення параметрів руху судна в кінці інтервалу прогнозування H вимагає, згідно з (2), тільки алгебраїчного складання дискрет диференціального спектра. Виконання обчислень за диференціально-тейлорівською моделлю (6) на ЕОМ дозволяє реалізувати моделювання процесу руху суден в реальному та прискореному часі.

Вказані властивості диференціально-тейлорівської моделі (6) дозволяють рекомендувати її для побудови адаптивних автостернових, в яких потрібно здійснювати прогноз руху судна з урахуванням діючих збурень, а також в системах запобігання зіткнень суден для прогнозування ситуацій, викликаних маневруванням суден. Запропонована модель руху суден може бути використана для синтезу законів оптимального управління на основі диференціальних перетворень [7].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Войткунский Я.И., Першиц Р.Я., Титов И.А.* Справочник по теории корабля. Судовые движители и управляемость. – Л.: “Судостроение”, 1973. – 512 с.
2. *Родионов А.И., Сазонов А.Е.* Автоматизация судовождения. – М.: Транспорт, 1983. – 216 с.
3. *Демин С.И., Жуков Е.И., Кубачев Н.А. и др.* Управление судном. – М.: Транспорт, 1991. – 359 с.
4. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 419 с.
5. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наук. думка, 1988. – 216 с.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
7. *Уруский О.С., Баранов В.Л.* Синтез замкнутых законов терминального управления на основе дифференциальных преобразований // Электронное моделирование. – 1996. – 18. – № 3. – С. 3–9.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – доктор технічних наук, інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України, Київ.

Наукові інтереси:
- моделювання;
- оптимізація;
- управління;
- диференційні перетворення.

БАРАНОВ Георгій Леонідович – доктор технічних наук, науково-дослідний інститут “Квант-Навігація”, Київ.
Наукові інтереси:
– моделювання складних систем;
– оптимізація;
– управління;
– диференційні перетворення.

СЄНАКОСОВ Віктор Вікторович – науково-дослідний інститут “Квант-Навігація”, Київ.
Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– управління;
– диференційні перетворення.

Подано 5.06.2001