УДК 539.367

О.В. Лущиков, асист.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки
В.В. Михайленко, д.ф.-м.н., проф.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ІНТЕГРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОПРУЖНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ

Розглянуто інтегральні підходи до кількісної оцінки ефективності електромеханічного перетворення і дисипації енергії в об'ємі в'язкопружних п'єзоелектричних тіл.

Одним із основних питань будь-якої теорії п'єзоелектричних тіл є питання про оцінку ефективності електромеханічного перетворення енергії. Найбільш повною характеристикою цього перетворення є коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Він характеризує перетворення енергії в п'єзоелектричних матеріалах краще, ніж сукупність п'єзоелектричних, діелектричних і механічних властивостей [3]. Статичні КЕМЗ виражаються відомими співвідношеннями через характеристики п'єзоелектричного матеріалу [3, 4]. У динамічному випадку КЕМЗ залежить від розподілу електромеханічних величин і тому є також функцією геометричних розмірів п'єзоелемента. Існуючі підходи до визначення КЕМЗ розроблені в рамках електропружної теорії п'єзоелектричних тіл. Іспит часом витримували підходи, що засновані на формулі Мезона [3], на скороченні числа незалежних змінних у визначальній системі алгебраїчних рівнянь при розв'язуванні задач електропружності чисельними методами [19 тощо], енергетичний підхід [17, 18].

Найбільш повною і фізично змістовною характеристикою ефективності перетворення енергії при електропружних процесах є, в даний час, КЕМЗ, який визначається відповідно до енергетичного підходу А.Ф. Улітко [4, 17, 18]. Основна ідея цього підходу полягає в тому, що КЕМЗ повинен цілком визначатися полем деформацій ε_{ij} в об'ємі тіла та характером розташування електродів. При цьому квадрат КЕМЗ вводиться як відношення спроможної до обернення накопиченої на даній деформації в об'ємі тіла електричної (механічної) енергії до всієї підведеної до тіла механічної (електричної) енергії. Безпосереднє використання методики знаходження КЕМЗ у рамках енергетичного підходу вимагає розв'язування поряд із головною задачею електропружності двох додаткових задач для електричного потенціалу φ:

$$\left(\mu_{ki}\varphi_{ij}\right)_{,k} = \left(e_{kij}\varepsilon_{ij}\right)_{,k}, \tag{1}$$

відповідно при розімкнутих і короткозамкнутих електродах. Тут μ_{ij} – тензор діелектричних проникливостей; ε_{kij} – тензор п'єзоконстант. У роботі [13] із використанням енергетичного підходу отримані такі співвідношення:

$$k_e^2 = \frac{k^2}{k^2+1};\;\; k^2 = \frac{\left(Q_1 - C_\varepsilon\Delta\varphi\right)^2 C_\varepsilon^{-1}}{2U_T - C_\varepsilon\left(\Delta\varphi\right)^2}, \tag{2}$$

які спрощують методику знаходження КЕМЗ k_e, оскільки дозволяють зробити це безпосередньо за розв'язком основної задачі. У (2) через U_T, Q_1, $\Delta\varphi$ позначено відповідно внутрішню енергію в об'ємі п'єзоелемента, електричний заряд і напругу на електродах; C_ε – ємність п'єзоелемента на нульових деформаціях. Використання формул (2) особливо ефективно при розв'язуванні задач чисельними методами, зокрема, задач про вимушені коливання п'єзоелектричних тіл. Водночас у рамках цих методів (скінченно-різницевих, варіаційно-різницевих, скінченних елементів) КЕМЗ можна знайти за методикою, що базується на зменшенні числа незалежних змінних у вихідній системі алгебраїчних рівнянь, що можливо через еквіпотенціальність електродованих поверхонь. Така методика використовується в роботах [1, 2, 19 тощо]. У роботі [13] розкрито енергетичний зміст цієї методики і показано, що вона цілком відповідає енергетичній теорії А.Т. Улітко.

При визначенні в рамках енергетичної теорії КЕМЗ для *N*-електродного тіла ($N \geq 3$) необхідно вказати, до якої групи електродів це визначення відноситься, тобто які електроди вважаються одночасно розімкнутими або короткозамкнутими на даній деформації. Крім цього, необхідно сформулювати електричні граничні умови для інших електродів. Можна показати, що якщо матриця статичних ємностей (на нульових деформаціях) багатоелектродного тіла відома, то КЕМЗ для групи електродів також може бути знайдений безпосередньо за розв'язком основної задачі електропружності. Зокрема, визначенню КЕМЗ для пари електродів багатоелектродного тіла, запропонованому О.Ю. Жарієм [5], відповідають такі ж формули, як і для двохелектродного тіла (2), з тією різницею, що величина C_ε являє собою наведену ємність відносно розглянутої пари електродів.

У роботі [14] енергетична теорія КЕМЗ поширюється на випадок гармонічних коливань в'язкопружних п'єзоелектричних тіл. У цьому випадку польові електромеханічні величини мають такий вигляд:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t;\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t;$$

$$E_k = E'_k\cos\omega t - E''_k\sin\omega t;\ D_k = D'_k\cos\omega t - D''_k\sin\omega t.$$

Тут σ_{ij}, ε_{ij} – компоненти тензорів механічних напружень та деформацій; E_k, D_k –компоненти векторів напруженості та індукції електричного поля, ω – кругова частота. Для КЕМЗ із врахуванням втрат у матеріалі отримані такі формули:

$$k_e^2 = \frac{k^2}{1+k^2};\ k^2 = \frac{\left|\tilde{Q}_1 - \tilde{c}_\varepsilon\Delta\tilde{\varphi}\right|^2}{2U_T - c'_\varepsilon\left|\Delta\tilde{\varphi}\right|^2}\cdot\frac{c'_\varepsilon}{\left|\tilde{c}_\varepsilon\right|^2};\ U_T = \frac{1}{2}\int_V \overline{U}dV, \tag{3}$$

де $\tilde{Q}_1, \Delta\tilde{\varphi}$ – комплексні амплітуди електричного заряду і напруги на електродах; $\tilde{C}_\varepsilon = C_\varepsilon' + iC_\varepsilon'$ – комплексна ємність на нульових деформаціях, яка знаходиться з розв'язку електростатичної задачі з врахуванням діелектричних втрат, V – об'єм п'єзоелемента. Вираз для величини $\overline{U}$, що характеризує накопичення електромеханічної енергії в елементарному об'ємі тіла [12] і є функцією польових електромеханічних величин, наведено нижче. За умови, що втрати малі, і величиною $\left(C''_\varepsilon / C'_\varepsilon\right)^2$, у порівнянні з одиницею, можна знехтувати, друге із співвідношень (3) набуває такого вигляду:

$$k^2 = \frac{\left[\left(Q' - c_\varepsilon\Delta\varphi'\right)^2 + \left(Q'' - c_\varepsilon\Delta\varphi''\right)^2\right]c_\varepsilon^{-1}}{2U_T - c_\varepsilon\left[\left(\Delta\varphi'\right)^2 + \left(\Delta\varphi''\right)^2\right]};\ c_\varepsilon = c_\varepsilon' \tag{4}$$

і може бути отримане формально шляхом усереднення за період чисельника і знаменника другого співвідношення (2), якщо в останньому врахувати, що:

$$U_T = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + E_j D_j\right)dV$$

і записати, що $P = \left\{Q, \Delta\varphi, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, E_j, D_j\right\} = p'\cos\omega t - p''\sin\omega t$.

Численні розрахунки коливань [6–11, 15 тощо] п'єзоелектричних тіл різноманітної форми і розмірів із відомими в літературі в'язкопружними властивостями матеріалу показали, що значення КЕМЗ, обчислені відповідно до (3) або (4), із точністю до двох-трьох знаків збігаються з відповідними електропружними значеннями КЕМЗ, що обчислюються за (2). Цей збіг характерний як для резонансних, так і для нерезонансних частот коливань. Виняток становлять п'єзоелектрично дуже слабкі резонансні частоти, для яких ширина п'єзоактивної ділянки $\omega_a - \omega_p$ сумірна з "розмазуванням" резонансної області внаслідок втрат матеріалу, а також частоти, на яких електропружний КЕМЗ перетворюється в нуль. Для перших із вказаних частот (3) або (4) дають трохи завищені в порівнянні з (2), значення КЕМЗ, а для других – хоча і дуже малі, але відмінні від нуля значення КЕМЗ. При цьому зазначені розходження не змінюють якісну картину залежності КЕМЗ від частоти. Для прикладу використання співвідношень (3) наведемо вираз для КЕМЗ при повздовжніх коливаннях в'язкопружного п'єзоелектричного стержня, збуджуваного електричним полем, що перпендикулярний його довжині:

$$k_e^2 = \frac{k^2}{1+k^2};\ k^2 = \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2}\cdot\frac{\dfrac{2\sin^2\Omega}{\Omega^2} + \dfrac{\left(\delta_{11}^s\right)^2}{2}}{1 + \dfrac{\sin 2\Omega}{2\Omega}}, \tag{5}$$

де k_{31}^2 – поперечний КЕМЗ електропружного матеріалу; Ψ – безрозмірна частота. Співвідношення (5) отримані із припущення, що квадратами і добутками тангенсів кутів механічних δ_{11}^s, діелектричних δ_{33}^μ і "п'єзоелектричних" δ_{31}^d втрат, у порівнянні з одиницею, можна знехтувати. При $\delta_{11}^s = 0$ одержимо співвідношення для КЕМЗ, до яких призводить (2) для електропружної постановки задачі. Наведений приклад демонструє описаний вище збіг електров'язкопружного та електропружного КЕМЗ, оскільки додаток $\dfrac{\left(\delta_{11}^{s}\right)^2}{2}$ в чисельнику (5) є несуттєвим і може бути відкинутий. Та роль, яку він відіграє при дуже малому або навіть нульовому першому доданку в чисельнику (5), з практичної точки зору зацікавлення не викликає.

Слід зазначити, що малі втрати є не єдиною і навіть не основною причиною того, що значення КЕМЗ, обчислені за формулами (2) і (3), практично збігаються. Слабка реакція КЕМЗ на втрати в матеріалі обумовлена, в першу чергу, структурою формули (3) і є специфічною особливістю КЕМЗ як характеристики енергоперетворення.

Наявність різноманітного роду втрат, а також амплітудна залежність коефіцієнтів, що описують ці втрати, значно ускладнюють кількісний аналіз дисипації енергії при коливаннях п'єзоелектричних тіл. Універсальна характеристика внутрішньої дисипації в матеріалах (без п'єзоефекту) і елементах конструкцій запропонована і енергетично обгрунтована в роботі [16]: для моногармонічної $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t$ деформації та відповідної реакції $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t$ напружень, як відносної міри втрат в елементарному об'ємі матеріалу пропонується використовувати таку величину:

$$\Psi = \frac{2\pi\left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}\right)}{\left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}\right)}, \tag{6}$$

в якій дисипація енергії характеризується точно, а накопичення, у загальному випадку –наближено [16]. Важливою особливістю характеристики (6) є її визначеність через величини, що вимірюються механічно. Узагальнення співвідношення (6) на випадок коливань в'язкопружних п'єзоелектричних тіл дано в роботі [12], де замість кількісної оцінки внутрішньої дисипації пропонується використовувати таку величину

$$\Psi = 2\pi\frac{\overline{D}}{\overline{U}}, \tag{7}$$

де

$$\overline{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k;\ \overline{D} = \frac{2}{\omega}D';$$

$$D' = \frac{\omega}{2}\left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k\right).$$

Величина Ψ (7) характеризує відношення електромеханічної енергії $\dfrac{2\pi}{\omega}D'$, дисипованої в елементарному об'ємі за період коливань, до подвоєного середнього за період значення $\dfrac{1}{2}\overline{U}$ (взагалі кажучи, наближеного [12]) накопиченої електромеханічної енергії. Характеристика (7), яку будемо називати коефіцієнтом затухання електромеханічних коливань (КЗЕМК), може використовуватися як відносна міра втрат в елементарному об'ємі при резонансних і нерезонансних режимах коливань. КЗЕМК для повного об'єму п'єзоелемента V визначається як:

$$\Psi_V = 2\pi\frac{\overline{D}_V}{\overline{U}_V};\ \overline{D}_V = \int_V \overline{D}dV;\ \overline{U}_V = \int_V \overline{U}dV. \tag{8}$$

У роботі [12] отримані такі наближені співвідношення:

$$\Psi_V^{(p)} \approx \frac{2\pi k^2\omega_p c'_\varepsilon}{Y_m};\ k^2 = \frac{k_\epsilon^{(p)2}}{1-k_e^{(p)2}};\ \Psi_v^{(a)} \approx \frac{2\pi k_\epsilon^{(a)2} Y_n}{\omega_a c'_\varepsilon}, \tag{9}$$

що встановлюють зв'язок КЗЕМК із провідністю п'єзоелемента Y_m на резонансних і Y_n на антирезонансних частотах і дають тим самим можливість його експериментального визначення. У випадку простих одномірних лінійних задач електров'язкопружності та при малих втратах величина Ψ_V вироджується в характеристику матеріалу. Наприклад, при повздовжніх коливаннях в'язкопружного п'єзоелектричного стержня в електричному полі, перпендикулярному його довжині, формули (9) зводять до таких наближених значень Ψ_V на резонансних і антирезонансних частотах:

$$\Psi_V^{(p)} \approx 2\pi\delta_{11}^{s};\ \Psi_V^{(a)} \approx \Psi_V^{(p)} + 2\pi\frac{k_e^{(a)2}}{1-k_{31}^3}\left(\delta_{11}^{s} - 2\delta_{31}^{d} + \delta_{33}^{\mu}\right) \tag{10}$$

В (10) введені такі ж позначення, як і в (5). Для всіх відомих у літературі п'єзокерамік, наприклад, $k_e^{(a)^2} \approx \frac{2k_{31}^2}{\Omega_a^2}$, де Ω_a можна знаходити з рівняння: $\Omega_a = -k^2 tg\Omega_a$; $k^2 = \frac{k_{31}^2}{\left(1-k_{31}^2\right)}$. При квазістатичних коливаннях величина Ψ_V визначається переважно діелектричними втратами ($\Psi_V \approx 2\pi\delta_{33}^{\mu}$). З другої формули (10) випливає, що КЗЕМК на резонансних і антирезонансних частотах відрізняються.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Балабаев С.М., Ивина Н.Ф.* Собственные колебания конечных пьезокерамических цилиндров // Акуст. журнал. – 1990. – 36. – № 2. – С. 204–208.
2. *Балабаев С.Н., Ивина Н.Ф.* Численный анализ собственных колебаний пьезокерамических оболочек вращения // Акуст. журнал. – 1998. – № 3. – С. 391–395.
3. *Берлинкур Д., Керрон Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У.Мезона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – Ч. А. – С. 204–326.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость: Механика связ. полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – Т. 5. – 279 с.
5. *Жарий О.Ю.* Модовая теория электромеханического преобразования энергии в пьезоэлектрических телах // Прикл. математика и механика. – 1991. – Т. 55. – Вып. 2. – С. 330–337.
6. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В.* Планарные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих пластин с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 1994. – № 2. – С. 69–76.
7. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В.* Планарные колебания пьезокерамической пластины с учетом деполяризации материала, вызванной температурой виброразогрева // Прикл. механика. – 1994. – 30. – № 3. – С. 67–73.
8. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В.* Резонансные контурные колебания пьезокерамической пластины с автоподстройкой частоты // Прикл. механика. – 1994. – 31. – № 4. – С. 48–54.
9. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В.* Термомеханічна поведінка в'язкопружної п'єзокерамічної порожнистої кулі, сполученої з циліндричним потрубком // ДАН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 5. – С. 43–47.
10. *Карнаухов В.Г., Сенченков Н.К., Михайленко В.В.* Резонансные колебания осесимметрической электромеханической системы с автоподстройкой частоты // Прикл. механика. – 1995. – 31. – № 6. – С. 57–63.
11. *Лобанов Л.М., Михайленко В.В., Михайленко С.В.* Планарные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих пьезокерамических пластин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 7. – С. 53–57.
12. *Михайленко В.В.* До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної єнергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київськ. Ун-ту, фіз.-мат. науки. – 1997. – С. 128–132.
13. *Михайленко В.В., Михайленко С.В.* К нахождению коэффициентов электромеханической связи в задачах электроупругих колебаний пьезоэлектрических тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 8. – С. 88–92.
14. *Михайленко В.В.* Нахождение коэффициентов электромеханической связи при колебаниях вязкоупругих пьезоэлектрических тел // Докл. НАН України. Сер. А. –1997. – № 6. – С. 66–69.
15. *Михайленко В.В., Франовский А.У.* Численное моделирование резонансных режимов колебаний ультразвуковой электромеханической системы с автоподстройкой частоты // Прикл. механика. – 1996. – 32. – № 11. – С. 54–59.
16. *Сенченков Н.К., Карнаухов В.Г., Червинко О.П.* О коэффициенте поглощения энергии при циклическом деформировании вязкоупругих материалов и элементов конструкций из них // Прикл. механика. – 1988. – 24. – № 9. – С. 90–98.
17. *Улитко А.Ф.* К теории электромеханического преобразования энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах // Прикл. механика. – 1977. – 13. – № 10. – С. 115–123.

18. *Улитко А.Ф.* Об определении коэффициентов электромеханической связи в задачах установившихся колебаний пьезокерамических тел // Мат. методы и физ.- мех. поля. – 1978. – Вып. 7. – С. 77–81.
19. *Boucher D., Lagier M., Maerfeld C.* Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transdurs using a mixed finite element- perturbation method // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1981. – 28. – № 5. – P. 318–330.

ЛУЩИКОВ Олександр Володимирович – асистент кафедри математики Житомирського військового інституту радіоелектроніки.

Наукові інтереси:

– механіка твердого деформівного тіла.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– механіка твердого деформівного тіла.

Подано 5.06.2001