УДК 539.376

С.П. Давидчук, асист.
В.В. Михайленко, д.ф.-м.н.
Житомирський інженерно-технологічний інститут
А.Ц. Франовський, к.ф.-м.н.
Житомирський державний педагогічний університет ім. І.Франка

ДО ПИТАННЯ ПРО КОНЦЕПЦІЮ КОМПЛЕКСНИХ МОДУЛІВ В МЕХАНІЦІ НЕПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

Показано, що концепція комплексних модулів, яка широко використовується в механіці непружних матеріалів при коливних процесах, може бути обгрунтована з використанням інваріантності амплітудних визначальних рівнянь відносно зсуву в часі.

Гармонічні, зокрема резонансні, режими коливань в'язкопружних тіл можуть супроводжуватись високим рівнем механічних напружень, при яких матеріал починає поводити себе, як фізично нелінійне середовище. У випадку малих деформацій це проявляється в залежності характеристик матеріалу від амплітуд польових величин, що підтверджується експериментально [3 тощо]. Тому при моногармонічному наближенні таких коливань широко використовується концепція амплітуднозалежних комплексних модулів. Суть цієї концепції в тому, що визначальні рівняння для амплітуд мають такий же вигляд, як і в лінійній теорії. Проте комплексні характеристики є функціями амплітуд незалежних змінних. Такий підхід отримав численне експериментальне підтвердження для різних матеріалів [3 тощо]. Теоретичне обгрунтування згаданої концепції базується, як правило, на застосуванні методів Гальоркіна (МГ) та еквівалентної лінеаризації (МЕЛ) до загальних визначальних рівнянь в'язкопружності, які вважаються відомими [1, 3]. Для одновимірних моделей це питання розв'язується досить просто [3]. У випадку тривимірного НДС можливість представлення амплітудних визначальних рівнянь у згаданій вище комплексній формі обгрунтована лише для ізотропних матеріалів із застосуванням гіпотези про просте деформування [4, 5 тощо].

Доцільність використання концепції амплітуднозалежних комплексних модулів викликана, в першу чергу, тим, що вона суттєво спрощує постановку і розв'язання задач в'язкопружності при циклічних процесах, і саме в у цьому її практична цінність. Разом з тим, саме поняття "комплексності" амплітудних визначальних рівнянь заслуговує на більш широке розуміння та надання йому певного "фізичного" змісту. Далі буде показано, що в загальному випадку комплексну форму представлення амплітудних рівнянь слід розглядати як необхідну та достатньою умови інваріантності амплітуд відносно зсуву в часі.

Перш за все, відмітимо наступне. Якщо орієнтуватись на коливні процеси, то немає необхідності виходити із загальних визначальних рівнянь в'язкопружності, бо вони містять в собі значно більше експериментально-теоретичної інформації, ніж це потрібно для описання реакції матеріалу на циклічні історії. А тому, на відміну від згаданих вище робіт, скористаємось іншим підходом до побудови амплітудних визначальних рівнянь. Суть цього підходу в тому, що амплітуди напружень з самого початку розглядаються як тензорні функції амплітуд деформацій. Потім на ці функції накладається ряд обмежень термодинамічного та структурного характеру, одним із яких є вимога інваріантності амплітуд відносно зсуву в часі. При такому підході загальна структура амплітудних визначальних рівнянь не залежить від того, яке середовище розглядається: в'язкопружне, пружнопластичне чи пружнов'язкопластичне. Тому апмлітудні рівняння при такому підході мають більш широку сферу застосувань.

Визначальні рівняння, які описують моногармонічне наближення коливань фізично нелінійних непружних тіл, встановлюють зв'язок між сім'єю тензорів $\varepsilon_{ij}^{/}$, $\varepsilon_{ij}^{//}$, що характеризують механічну деформацію [1]:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{x},t) = \varepsilon_{ij}^{/}\cos\omega t - \varepsilon_{ij}^{//}\sin\omega t; \qquad \varepsilon_{ij}^{/,//} = \varepsilon_{ij}^{/,//}(\bar{x}), \tag{1}$$

і сімейством тензорів $\sigma_{ij}^{/}$, $\sigma_{ij}^{//}$, які характеризують механічні напруження:

$$\sigma_{ij}(\bar{x},t) = \sigma_{ij}^{/}\cos\omega t - \sigma_{ij}^{//}\sin\omega t; \qquad \sigma_{ij}^{/,//} = \sigma_{ij}^{/,//}(\bar{x}). \tag{2}$$

Згідно з викладеним вище, вважаємо, що:

$$\sigma_{ij}^{/} = \sigma_{ij}^{/}\left(\varepsilon_{kl}^{/};\varepsilon_{kl}^{//}\right); \qquad \sigma_{ij}^{//} = \sigma_{ij}^{//}\left(\varepsilon_{kl}^{/};\varepsilon_{kl}^{//}\right). \tag{3}$$

Функції (3) повинні задовольняти вимогам другого закону термодинаміки, типу симетрії матеріалу, умові інваріантності амплітуд відносно зсуву в часі. Далі будемо розглядати лише останнє обмеження, яке можна сформулювати ще як інваріантність зв'язку (3) між деформаціями (1) і напруженням (2) відносно заміни ωt на $\omega t + \varphi$ і записати у вигляді рівнянь:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}^{/}\left(\varepsilon_{kl}^{/};\varepsilon_{kl}^{//}\right)\cos\varphi - \sigma_{ij}^{//}\left(\varepsilon_{kl}^{/};\varepsilon_{kl}^{//}\right)\sin\varphi = \sigma_{ij}^{/}\left(x_{kl};y_{kl}\right);\\ &\sigma_{ij}^{/}\left(\varepsilon_{kl}^{/};\varepsilon_{kl}^{//}\right)\sin\varphi + \sigma_{ij}^{//}\left(\varepsilon_{kl}^{/};\varepsilon_{kl}^{//}\right)\cos\varphi = \sigma_{ij}^{//}\left(x_{kl};y_{kl}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$x_{kl} = \varepsilon_{kl}^{/}\cos\varphi - \varepsilon_{kl}^{//}\sin\varphi; \qquad y_{kl} = \varepsilon_{kl}^{/}\sin\varphi + \varepsilon_{kl}^{//}\cos\varphi. \tag{5}$$

Умови (4) накладають досить жорсткі обмеження на структуру залежностей (3), які сформулюємо у вигляді твердження.

Твердження. Нехай функції (3) є довільними неперервно-диференційованими функціями своїх аргументів. В цьому випадку умова інваріантності (4) виконується для цих функцій тоді і лише тоді, коли вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}^{/} = C_{ijkl}^{/}(;)\varepsilon_{kl}^{/} - C_{ijkl}^{//}(;)\varepsilon_{kl}^{//};\\ &\sigma_{ij}^{//} = C_{ijkl}^{//}(;)\varepsilon_{kl}^{/} + C_{ijkl}^{/}(;)\varepsilon_{kl}^{//}, \end{aligned} \tag{6}$$

де тензори $C_{ijkl}^{/}(;)$, $C_{ijkl}^{//}(;)$ є довільними неперервно-диференційованими функціями компонент тензора четвертого рангу:

$$\Gamma_{klmn} = \varepsilon_{kl}^{/}\varepsilon_{mn}^{/} + \varepsilon_{kl}^{//}\varepsilon_{mn}^{//} = \varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}\cos\left(\varphi_{kl} - \varphi_{mn}\right). \tag{7}$$

В (7): ε_{kl} – повні амплітуди деформацій; $\varphi_{kl} - \varphi_{mn}$ – зсуви фаз.

Доведення. В тому, що представлення (6) є достатнім для виконання умов (4), можна переконатись безпосередньою перевіркою, прийнявши до уваги таку тотожність:

$$x_{kl}x_{mn} + y_{kl}y_{mn} = \varepsilon_{kl}^{/}\varepsilon_{mn}^{/} + \varepsilon_{kl}^{//}\varepsilon_{mn}^{//}. \tag{8}$$

Нехай тепер для функцій (3) виконуються умови (4). Шляхом виключення з цих умов параметра φ можна отримати таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}^{/}}{\partial\varepsilon_{kl}^{/}}\varepsilon_{kl}^{//} - \frac{\partial\sigma_{ij}^{/}}{\partial\varepsilon_{kl}^{//}}\varepsilon_{kl}^{/} - \sigma_{ij}^{//} = 0; \quad \frac{\partial\sigma_{ij}^{//}}{\partial\varepsilon_{kl}^{/}}\varepsilon_{kl}^{//} - \frac{\partial\sigma_{ij}^{//}}{\partial\varepsilon_{kl}^{//}}\varepsilon_{kl}^{/} + \sigma_{ij}^{/} = 0. \tag{9}$$

Щоб переконатись в цьому, потрібно продиференціювати рівняння (4) по φ при фіксованих $\varepsilon_{kl}^{/}$, $\varepsilon_{kl}^{//}$ і з врахуванням співвідношень (5), а потім порівняти отриманий результат з рівняннями (4). Матимемо систему диференціальних рівнянь, яка з точністю до позначень співпадатиме з (9).

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}^{/}}\varepsilon_{ij}^{//} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}^{//}}\varepsilon_{ij}^{/} = 0 \tag{10}$$

з 12 незалежними змінними $\varepsilon^{/}_{kl}$, $\varepsilon^{//}_{kl}$. Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що це рівняння автоматично задовольняється, якщо Ф є довільною функцією аргументів (7). Крім того, величини (7) завжди можна виразити через амплітуди ε_{kl} і зсуви фаз, наприклад, $\varphi_{kl} - \varphi_{11}$ (всього 11 незалежних змінних). Тому довільну функцію Ф аргументів (7) ($\Phi = \Phi\left(\varepsilon^{/}_{kl}\varepsilon^{/}_{mn} + \varepsilon^{//}_{kl}\varepsilon^{//}_{mn}\right)$), згідно з теорією диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку, слід розглядати як загальний інтеграл рівняння (10).

З врахуванням викладеного, легко перевіряється, що представлення (6) задовольняє системі (9). Більш того, можна показати, що завдяки довільності коефіцієнтів $C^{/}_{ijkl}(;)$ $C^{//}_{ijkl}(;)$ представлення (6) є загальним розв'язком цієї системи. Отже, якщо функції (3) задовольняють умові інваріантності (4), то вони задовольняють і системі рівнянь (9), а тому мають вигляд (6), що і доводить наше твердження.

Відмітимо, що точно такий же результат, а саме, залежність між амплітудами вигляду (6), отриманий в роботі [2] із застосуванням методу Гальоркіна до співвідношень загальної кратноінтегральної теорії в'язкопружності.

Однак в загальній теорії інваріантність амплітуд відносно зсуву в часі враховується структурою ядер цієї теорії, а тому виконується автоматично. Наслідком цього і є залежність між амплітудами вигляду (6).

Розглянемо такі функції:

$$\Pi = \sigma^{/}_{ij}\varepsilon^{/}_{ij} + \sigma^{//}_{ij}\varepsilon^{//}_{ij}; \qquad D = \sigma^{//}_{ij}\varepsilon^{/}_{ij} - \sigma^{/}_{ij}\varepsilon^{//}_{ij}. \tag{11}$$

Перша з них, як відомо, пропорційна середній за період коливань накопиченій енергії, а друга – середній за період дисипованій енергії [3].

Якщо розписати вирази для функцій (11), скориставшись умовою інваріантності в диференціальній формі (9), то можна показати, що ці функції, як функції незалежних змінних, задовольняють диференціальному рівнянню (10), тобто є функціями аргументів (7):

$$\Pi = \Pi\left(\varepsilon^{/}_{kl}\varepsilon^{/}_{mn} + \varepsilon^{//}_{kl}\varepsilon^{//}_{mn}\right); \quad D = D\left(\varepsilon^{/}_{kl}\varepsilon^{/}_{mn} + \varepsilon^{//}_{kl}\varepsilon^{//}_{mn}\right). \tag{12}$$

Очевидно, що залежності (12) є відображенням інваріантності функцій (11) відносно зсуву в часі (8). З іншого боку, із (6), (11) можна записати:

$$\Pi = \Pi_1 - \Pi_2; \quad D = D_1 + D_2, \tag{13}$$

де

$$\Pi_1 = C^{/}_{ijkl}(;)\left(\varepsilon^{/}_{ij}\varepsilon^{/}_{kl} + \varepsilon^{//}_{ij}\varepsilon^{//}_{kl}\right); \quad \Pi_2 = C^{//}_{ijkl}(;)\left(\varepsilon^{/}_{ij}\varepsilon^{//}_{kl} - \varepsilon^{//}_{ij}\varepsilon^{/}_{kl}\right);$$
$$D_1 = C^{//}_{ijkl}(;)\left(\varepsilon^{/}_{ij}\varepsilon^{/}_{kl} + \varepsilon^{//}_{ij}\varepsilon^{//}_{kl}\right); \quad D_2 = C^{/}_{ijkl}(;)\left(\varepsilon^{/}_{ij}\varepsilon^{//}_{kl} - \varepsilon^{//}_{ij}\varepsilon^{/}_{kl}\right). \tag{14}$$

Для фіксованого набору аргументів (7) величини Π, D (12), Π_1, D_1 (14), а також коефіцієнти в виразах для Π_2, D_2 (14) є постійними. Самі ж величини Π_2, D_2, що неважко показати, визначаються з точністю до знаку. Для цього слід врахувати позначення (7) і скористатись звичайними тригонометричними тотожностями. Тому для однозначного визначення функцій накопичення та дисипації покладемо:

$$\Pi_2 \equiv 0; \quad D_2 \equiv 0\,. \tag{15}$$

Звідси:

$$C^{/}_{ijkl}(;) = C^{/}_{klij}(;); \quad C^{//}_{ijkl}(;) = C^{//}_{klij}(;). \tag{16}$$

Крім того, очевидно, що:

$$C^{/}_{ijkl}(;) = C^{/}_{jikl}(;) = C^{/}_{ijlk}(;); \quad C^{//}_{ijkl}(;) = C^{//}_{jikl}(;) = C^{//}_{ijlk}(;). \tag{17}$$

Отже, співвідношення (6), де $C^{/}_{ijkl}(;)$, $C^{//}_{ijkl}(;)$ є довільними функціями величин (9), що задовольняють умовам симетрії (16), (17), або еквівалентні їм комплексні співвідношення

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}(;)\tilde{\varepsilon}_{kl}, \tag{18}$$

де

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma^{/}_{ij} + i\sigma^{//}_{ij}; \quad \tilde{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon^{/}_{kl} + i\varepsilon^{//}_{kl};$$
$$\tilde{C}_{ijkl}(;) = C^{/}_{ijkl}(;) + iC^{//}_{ijkl}(;); \quad i = \sqrt{-1} \tag{19}$$

є загальним представленням амплітудних визначальних рівнянь при моногармонічному наближенні коливань непружних тіл, що є наслідком інваріантності амплітуд відносно зсуву в часі. Ці співвідношення додатково повинні задовольняти обмеженням, що накладаються другим законом термодинаміки і, можливо, рядом вимог більш часткового характеру.

Проте слід зазначити, що, на відміну від лінійних рівнянь, кількість комплексних коефіцієнтів $\tilde{C}_{ijkl}(;)$ в (18) при переході до конкретного середовища, що має певну симетрію будови, в загальному випадку не зменшується. Дійсно, коли розглядається конкретне середовище, в число аргументів тензора $\tilde{C}_{ijkl}(;)$ необхідно включити, крім тензора (7), тензори, що визначають симетрію цього середовища [6]. Визначальним тензором ізотропії, наприклад, є єдиний тензор δ_{ij}. А так як група симетрії тензора $\tilde{C}_{ijkl}(;)$ є перетином груп симетрії тензорів, що визначають середовище, і змінного тензора Γ_{klmn} (7), то число коефіцієнтів в (18), незалежно від симетрії середовища, дорівнює 21.

Разом з тим, концепція амплітуднозалежних комплексних модулів припускає повну аналогію з визначальними рівняннями лінійної теорії з тією лише відмінністю, що комплексні модулі є функціями складових деформації $\varepsilon^{/}_{kl}$, $\varepsilon^{//}_{kl}$. Наприклад, для ізотропних матеріалів припускається можливість описання моногармонічного наближення коливань амплітудними рівняннями

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}\left(\varepsilon^{/}_{kl}, \varepsilon^{//}_{kl}\right)\tilde{\varepsilon}_{nn}\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\left(\varepsilon^{/}_{kl}, \varepsilon^{//}_{kl}\right)\tilde{\varepsilon}_{ij}, \tag{20}$$

що містять два комплексних модулі $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, які залежать певним чином від $\varepsilon^{/}_{kl}$, $\varepsilon^{//}_{kl}$.

Очевидно, що рівняння (20) можна отримати із (18), якщо вимагати ізотропності тензора $\tilde{C}_{ijkl}(;)$. Це можливо лише тоді, коли $\tilde{C}_{ijkl}(;)$ розглядається як тензорна функція від тензора δ_{ij} і деякого набору скалярів – функціонально незалежних інваріантів I_1, I_2, ..., I_k тензора Γ_{klmn} відносно повної групи ортогональних перетворень. А оскільки в цьому випадку число незалежних компонент тензора $\tilde{C}_{ijkl}(;)$ дорівнює 2, то кількість таких інваріантів не може перевищувати 2. Отже, слід врахувати тільки два незалежних інваріанти тензора (7). Такими є лінійні інваріанти цього тензора:

$$I_1 = \frac{1}{2}\Gamma_{iijj} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{/}_{ii}\varepsilon^{/}_{jj} + \varepsilon^{//}_{ii}\varepsilon^{//}_{jj}\right); \quad I_2 = \frac{1}{2}\Gamma_{ijij} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{/}_{ij}\varepsilon^{/}_{ij} + \varepsilon^{//}_{ij}\varepsilon^{//}_{ij}\right), \tag{21}$$

фізичний зміст яких розкривається такими співвідношеннями:

$$I_1 = \left\langle \varepsilon_{ii}^2 \right\rangle; \qquad I_2 = \left\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \right\rangle; \qquad \langle (\cdot) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (\cdot)\, dt. \tag{22}$$

Видно, що ці інваріанти ототожнюються із середніми за період коливань значеннями відповідно до квадрата першого інваріанта тензора деформацій (1) і другого інваріанта цього тензора.

З врахуванням викладеного, тензор $\widetilde{C}_{ijkl}(;)$ із (18) прийме вигляд:

$$\widetilde{C}_{ijkl}(;) = \widetilde{\lambda}(I_1, I_2)\delta_{ij}\delta_{kl} + \widetilde{\mu}(I_1, I_2)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{23}$$

а самі рівняння (18) – вигляд (20). Крім того, в число аргументів комплексних модулів $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\mu}$ слід включити частоту коливань ω і, взагалі кажучи, температуру.

Формулювання відповідних результатів, коли $\sigma \sim \varepsilon$-зв'язок записується в термінах повзучості, не викликає додаткових ускладнень.

Аналогічно, можна отримати амплітудні рівняння, що обгрунтовують концепцію амплітуднозалежних комплексних модулів на випадок матеріалів з більш низькою симетрією будови. Наприклад, для трансверсально-ізотропних матеріалів замість (21) слід взяти п'ять лінійних інваріантів тензора (7) відносно групи перетворень трансверсальної ізотропії. Відмітимо також, що вказаний вище зв'язок між концепцією амплітуднозалежних комплексних модулів та інваріантністю амплітудних визначальних рівнянь може бути узагальнений на випадок непружних середовищ, в яких проявляється взаємодія механічних та електромагнітних полів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наук. думка, 1982. – 260 с.
2. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В., Франовский А.Ц.* Развитие теории определяющих уравнений физически нелинейных вязкоупругих тел при циклической деформации // Прикл. механика. – 1996. – 32. – № 10. – С. 46–51.
3. *Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Б.П.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – К.: Наук. думка, 1985.
4. *Сенченков И.К., Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Червинко О.П.* Расчет стационарных колебаний и диссипативного разогрева нелинейных вязкоупругих тел при периодическом нагружении // Прикл. механика. – 1986. – 21. – № 6. – С. 49–55.
5. *Сенченков И.К., Карнаухов В.Г., Козлов В.И, Червинко О.П.* К вопросу о простом деформировании в задаче о колебаниях и разогреве нелинейных вязкоупругих тел // Там же. – 1986. – 22. – № 9. – С. 82–90.
6. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. – М.: Мир, 1974.

ДАВИДЧУК Сергій Петрович – асистент кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– механіка спряжених полів в матеріалах та елементах конструкцій.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– механіка спряжених полів в матеріалах та елементах конструкцій.

ФРАНОВСЬКИЙ Анатолій Цезарович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Житомирського державного педагогічного університету ім. І.Франка.

Наукові інтереси:

– модулі і методи розв'язання задач термомеханіки в'язкопружних п'єзоелектричних тіл при гармонічному навантаженні.

Подано 14.02.2001