УДК 517.9

П.І. Когут, д.ф.-м.н., проф.
Дніпропетровський державний технічний університет залізничного транспорту
В.М. Мізерний, к.т.н., доц.
Вінницький державний технічний університет
П.М. Повідайко, к.т.н., доц.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ОПЕРАТОРНИМИ РІВНЯННЯМИ ГАММЕРШТЕЙНА

Мета роботи полягає в дослідженні проблеми усереднення об'єктів керування, які описуються операторними рівняннями типу Гаммерштейна. Як відомо [1], такі рівняння є типовою складовою математичного опису різноманітних фізичних процесів. В практичних застосуваннях рівняння типу Гаммерштейна являють собою узагальнення інтегральних та інтегро-диференційних рівнянь. Вважається, що компоненти математичного опису таких об'єктів керування можуть залежати від деякого малого параметра ε. Проблема полягає в дослідженні поведінки таких об'єктів при $\varepsilon \to 0$ та в ідентифікації математичної моделі граничного (усередненого) об'єкта керування.

1. Постановка задачі усереднення та попередні результати

Нехай X – сепарабельний банаховий простір, X^* – топологічно спряжений до нього, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^* \times X \to R$ канонічна двоїстість, простір U є спряженим до деякого сепарабельного банахового простору W. Розглянемо об'єкт керування, який описується наступними співвідношеннями:

$$x + C_\varepsilon F_\varepsilon(u,x) = f_\varepsilon ; \tag{1.1}$$
$$F_\varepsilon(u,x) = A_\varepsilon - B_\varepsilon u ; \tag{1.2}$$
$$u \in U_\varepsilon . \tag{1.3}$$

Тут $A_\varepsilon \in L(X, X^*)$, $B_\varepsilon \in L(U, X^*)$, $C_\varepsilon : X^* \to X$ – лінійний неперервний оператор, $f_\varepsilon \in X, U_\varepsilon$ – множина допустимих керувань, яка розглядається як *-слабко замкнена підмножина простору U, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

За аналогією з [3] будемо вважати, що простір X задовольняє умову (π), тобто:

(I) X – рефлексивний простір;

(II) існує монотонний оператор D, який діє із спряженого простору X^* в X такий, що $D0 = 0$, D – неперервний в нулі простору X^* та $\langle Dz, z\rangle_X \ge c\|z\|_X^\alpha$, де $c > 0, \alpha > 1, z \in X^*$.

Як відомо, прикладами таких просторів можуть служити рефлексивні банахові простори X, для яких норма в X^* є диференційованою за Фреше.

Означення 1.1. *Трійку $(u,x,g) \in U \times X \times X^*$ будемо називати допустимою для об'єкта керування (1.1)–(1.3), якщо пара (u, y) задовольняє вихідні співвідношення (1.1)–(1.3), а елемент $g \in X^*$ визначається за правилом $A_\varepsilon x - B_\varepsilon u$.*

Позначимо через Ξ_ε множину всіх допустимих розв'язків для об'єкта (1.1)–(1.3) при фіксованому значенні $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, тобто

$$\Xi_\varepsilon = \left\{ (u,x,g) \in U_\varepsilon \times X \times X^* \left| \begin{array}{l} x + C_\varepsilon G = f_\varepsilon, \\ A_\varepsilon x = B_\varepsilon u = g, \\ u \in U_\varepsilon \end{array} \right. \right\}. \tag{1.4}$$

Для того щоб встановити достатні умови не пустоти цієї множини, скористаємося відомими результатами з [1].

Теорема 1.1. *Нехай при фіксованому значенні $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконуються наступні умови:*

(I) $C_\varepsilon : X^* \to X$ є лінійним неперервним та додатнім оператором, для якого існує правий обернений оператор $C_\varepsilon^{-1} : X \to X^*$;

(II) відображення $F_\varepsilon(u,\cdot): X \to X^*$ *є радіально неперервним з напівобмеженою варіацією;*

(III) знайдеться додатня константа λ_2 *така, що оператор* $F_\varepsilon(u,\cdot): X \to X^*$ *при кожному значенні* $u \in U_\varepsilon$ *задовольняє таку умову:*

$$\left\langle F_\varepsilon(u,x) - C_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon, x \right\rangle_X \ge 0, \text{ якщо } \|x\|_X \ge \lambda_2 > 0;$$

(IV) сепарабельний банаховий простір X задовольняє умову (π).

Тоді при кожному фіксованому значенні $u \in U_\varepsilon$ *множина*

$$K_\varepsilon = \{x \in X | x + C_\varepsilon F_\varepsilon(u,x) = f_\varepsilon\}$$

є не пустою та слабко компактною.

Беручи до уваги означення радіально неперервних операторів з напівобмеженою варіацією [2], буде очевидним наступний висновок:

Наслідок 1.1.1. Результат теореми залишиться в силі, якщо для відображення $F_\varepsilon(u,x) = A_\varepsilon - B_\varepsilon u$ умови (II) та (III) заміняться такою вимогою:

(V) знайдуться дві додатні константи $0 < \lambda_0 \le \lambda_1$ *такі, що:*

$$\lambda_0 \|y\|_Y^2 \le \langle A_\varepsilon y, y\rangle_Y, \ \|A_\varepsilon\| \le \lambda_1.$$

Позначимо через τ – топологію на $U \times X \times X^*$, яка визначається як добуток *-слабкої топології ω_U^* на U, топології слабкої збіжності ω_X на X та сильної топлогії s_{X^*} на X^*. Тоді, згідно з теореми 1.1, одержимо:

Наслідок 1.1.2. *Нехай* U_ε *є* є замкненою підмножиною банахового простору U і при цьому умови (I)–(III) теореми 1.1 виконуються рівномірно відносно* $u \in U_\varepsilon$. *Тоді при кожному значенні параметра* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *множина допустимих розв'язків* Ξ_ε *є не пустою та* τ *замкненою.*

Тепер, повертаючись до основного питання даної роботи, зауважимо, що дослідження поведінки вихідного об'єкта керування (1.1)–(1.3), при $\varepsilon \to 0$ можна розглядати як проблему граничного аналізу послідовності множин

$$\{\Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}. \tag{1.5}$$

А саме, усередненим об'єктом резонно вважати такий, множина допустимих розв'язків якого буде співпадати з границею послідовності множин (1.5) за Куратовським в обраній топології τ.

У зв'язку з цим наведемо наступні відомі поняття [4]. Нехай H – довільний фільтр Фреше на $(0, \varepsilon_0]$. Тоді нижньою топологічною границею послідовності (1.5) називають множину

$$\tau - Li\Xi_\varepsilon = \bigcap_{\mathrm{H} \in H^\#} cl_\varepsilon \left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathrm{H}} \Xi_\varepsilon \right)$$

і відповідно до попереднього

$$\tau - Ls\Xi_\varepsilon = \bigcap_{\mathrm{H} \in H^\#} cl_\tau \left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathrm{H}} \Xi_\varepsilon \right),$$

де позначено, що cl_τ – операція замикання в τ-топології, $H^\#$ – сукупність підмножин множини $(0, \varepsilon_0]$, які мають непустий перетин з усіма множинами Н із $H^\#$ (тобто $H^\#$ є решіткою, яка асоційована з фільтром H).

Якщо виконується умова $\tau - Li\Xi_\varepsilon = \tau - Ls\Xi_\varepsilon$, то цю множину позначають як $\tau - Lm\Xi_\varepsilon$ і називають її топологічною границею за Куратовським вихідної послідовності (1.5). Крім того, як показано в [4], мають місце такі дані:

$$\begin{aligned} \tau - Li\Xi_\varepsilon &= \{(u,x,g) | \forall V \in N(u,x,g), \exists \mathrm{H} \in H, \forall \varepsilon \in \mathrm{H} : \Xi_\varepsilon \cap V \ne 0\} = \\ &= \{(u,x,g) \exists \mathrm{H} \in H, \exists (u_\varepsilon, x_\varepsilon, g_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon \text{ тому що } (u_\varepsilon, x_\varepsilon, g_\varepsilon) \xrightarrow[\mathrm{H}]{} (u,x,g)\}; \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\tau - Ls\Xi_\varepsilon = \{(u,x,g) | \forall V \in N(u,x,g), \exists \mathrm{H} \in H^\#, \forall \varepsilon \in \mathrm{H} : \Xi_\varepsilon \cap V \ne 0\} = \tag{1.7}$$

$= \{(u, x, g) \exists H \in H^{\#},\ \exists (u_\varepsilon, x_\varepsilon, g_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ тому що $(u_\varepsilon, x_\varepsilon, g_\varepsilon) \xrightarrow[H]{} (u, x, g)\}$,

де через $N(x)$ позначено систему всіх τ-відкритих околів пари (u, x).

Таким чином, проблема усереднення полягає в ідентифікації математичної моделі об'єкта керування, множина допустимих розв'язків якого Ξ_0 задовольняє таку умову:

$$\Xi_0 = \tau - Lm\Xi_\varepsilon .$$

2. Формалізм G-збіжності операторів в банахових просторах

Введемо для простору $X \times X^*$ наступну топологію $\mu = (\omega_X) \times (s_{X^*})$, через s_{X^*} позначено топологію сильної збіжності на X^*. Розглянемо послідовності операторів $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}, \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ та $\{C_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ таких, що:

(I) B_ε – лінійні неперервні оператори із U *в* X^**;*

(II) сукупність лінійних операторів $\{A_\varepsilon \in L(X, X^*)\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ є рівномірно обмеженою та рівномірно коерцитивною, тобто знайдуться дві додатні константи λ_0 та λ_1 $(0 < \lambda_0 \le \lambda_1)$, які задовольняють таку умову:

$$\lambda_0 \|y\|_X^2 \le \langle A_\varepsilon x, x \rangle_X,\quad \|A_\varepsilon\| \le \lambda_1 ,$$

де *(III)* $\{C_\varepsilon \in L(X, X^*)\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ – сукупність рівномірно обмежених додатніх операторів.

Як відомо, [9] послідовність операторів $\{A_\varepsilon \in L(X, X^*)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ є компактною відносно G-збіжності, тобто існує коерцитивний обмежений лінійний оператор $A_0 : X \to X^*$ такий, що:

$$(s_{X^*} \times \omega_X) - Lmgr(A_\varepsilon) = gr(A_0), \tag{2.1}$$

де через $gr(A)$ позначено графік оператора A, тобто:

$$gr(A) = \{(y, x) \in X^* \times X | y = Ax\}.$$

Зауважимо, що наведене означення G-збіжності в точності еквівалентне класичному означенню [9], [8], в якому оператор A_0 називають G границею послідовності $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, якщо $A_\varepsilon^{-1} f \to A_0^{-1} f$ слабко в X при будь-яких $f \in X^*$.

Нехай $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ – довільна послідовність в $X^*, \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, послідовність не пустих підмножин простору U таких, що $\omega_U^* - Li[U_\varepsilon] \ne 0$. Згідно з означенням нижньої топологічної границі (1.6), виконання наведеної умови можливо, якщо знайдеться *-слабко збіжна послідовність $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ така, що $u_\varepsilon \in U_\varepsilon$ при всіх значеннях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Позначимо через Q_ε образ множини в банаховому просторі X^*, який будується за таким правилом: $G^\varepsilon : U \to X^*$, де $G^\varepsilon u = B_\varepsilon u$. Таким чином,

$$Q_\varepsilon = \{f \in X^* | f = B_\varepsilon u, \forall u \in U_\varepsilon\}. \tag{2.2}$$

Означення 2.1. *Сукупність множин $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, які задають класи допустимих керувань, будемо називати регулярними обмеженнями для об'єкта (1.1)–(1.3), якщо виконується така умова:* $\{(s_{X^*}) - Li[Q_\varepsilon \setminus \{0\}]\ \} \ne 0$.

Легко помітити, що для множин Ξ_ε будуть справедливими наступні твердження:

$$\Xi_\varepsilon = \left\{ (u, x, g) \in U \times X \times X^* \left| \begin{matrix} (f_\varepsilon - x, gr(C_\varepsilon), \\ (B_\varepsilon u + g_\varepsilon, x) \in gr(A_\varepsilon) \Big|_{\hat{Q}_\varepsilon} \end{matrix} \right. \right\}, \tag{2.3}$$

де вказано, що:

$$gr(C_\varepsilon) = \{(x, y) \in X \times X^* | x = C_\varepsilon y\};$$

$$gr(A_\varepsilon)\Big|_{\hat{Q}_\varepsilon} = gr(A_\varepsilon) \cap \left[\hat{Q}_\varepsilon \times X\right];$$

$$\hat{Q}_\varepsilon = \{f \in X^* \,|\, f = B_\varepsilon u + g_\varepsilon, \forall u \in U_\varepsilon\}.$$

Таким чином, проблему побудови топологічної границі за Куратовським при $\varepsilon \to 0$ множин допустимих розв'язків $\{\Xi_\varepsilon\}$ можна звести до ідентифікації топологічних границь послідовностей звужень графіків

$$\left\{ gr(A_\varepsilon)\Big|_{\hat{Q}_\varepsilon} \right\}_{\varepsilon \to 0} \text{ та } \{gr(C_\varepsilon)\}_{\varepsilon \to 0}.$$

Встановимо наступний результат.

Лема 2.1. *Нехай (X, μ) – локально опуклий векторний простір, $\{W_\varepsilon\}$ та $\{R_\varepsilon\}$ послідовності μ-замкнених опуклих підмножин простору X такі, що:*

(a) $W_\varepsilon \cap R_\varepsilon \neq 0$, для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

(b) існують топологічні границі за Куратовським: $\mu - LmW_\varepsilon$, $\mu - LmR_\varepsilon$;

(c) $\mu - Li(W_\varepsilon \cap R_\varepsilon) = 0$.

Тоді *для послідовності підмножин $\{W_\varepsilon \cap R_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ топологічна границя за Куратовським в μ топології існує і задовольняє таке співвідношення:*

$$\mu - Lm(W_\varepsilon \cap R_\varepsilon) = \mu - LmW_\varepsilon \cap \mu - LmR_\varepsilon. \tag{2.4}$$

Доведення. Оскільки включення

$$\mu - Li(W_\varepsilon \cap R_\varepsilon) = \mu - Ls(W_\varepsilon \cap R_\varepsilon); \tag{2.5}$$

$$\mu - Ls(W_\varepsilon \cap R_\varepsilon) \subseteq \mu - LmW_\varepsilon \cap \mu - LmR_\varepsilon \tag{2.6}$$

безпосередньо випливають із властивостей топологічних границь за Куратовським [7], то для перевірки (2.4) достатньо встановити наступне співвідношення:

$$\mu - Lm(W_\varepsilon \cap \mu - LmR_\varepsilon \subseteq \mu - Li(W_\varepsilon \cap R_\varepsilon)). \tag{2.7}$$

Нехай x^* – довільний елемент множини $\mu - LmW_\varepsilon \cap \mu - LmR_\varepsilon$. Тоді для будь-якого його околу $V \in N_\mu(x^*)$ можна вказати значення $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$ таке, що:

$$V \cap W_\varepsilon \neq 0,\ V \cap R_\varepsilon \neq 0\ \ \forall \varepsilon \leq \varepsilon^*.$$

Припустимо, що $V \cap (W_\varepsilon \cap R_\varepsilon) = 0$ для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon^*$. Так як кожна із множин W_ε та R_ε є μ-замкненою та опуклою, то знайдеться елемент $p^* \in X^*$ такий, що:

$$\left\langle p^*,\ x - x^* \right\rangle_X > 0\ \ \forall x \in V \cap W_\varepsilon,\ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*];$$

$$\left\langle p^*,\ y - x^* \right\rangle_X < 0\ \ \forall y \in V \cap R_\varepsilon,\ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*].$$

Отже, згідно з наведеної нерівності, одержимо:

$$\left\langle p^*,\ x - y \right\rangle_X > 0.\ \ \forall x \in V \cap W_\varepsilon,\ \ \forall y \in V \cap R_\varepsilon,\ \ \forall \varepsilon \in (0,\ \varepsilon^*].$$

Оскільки окіл V точки x^* було вибрано довільним чином, то

$$\left\langle p^*,\ x - y \right\rangle_X > 0,\ \text{при всіх}\ x \in W_\varepsilon,\ y \in (0, \varepsilon^*]. \tag{2.8}$$

Але нерівність (2.8) суперечить умові (*a*). Отже, для всякого околу $V \in N_\mu(x^*)$ можна вказати значення $\varepsilon^\# \in (0,\ \varepsilon_0]$ таке, що $V \cap [W_\varepsilon \cap R_\varepsilon] \neq 0\ \ \forall \varepsilon \leq \varepsilon^\#$. Таким чином, згідно з означенням нижньої топологічної границі за Куратовським, одержимо: $x^* \in Li(W_\varepsilon \cap R_\varepsilon)$, що і доводить співвідношення (2.7).

Тепер встановимо достатні умови, при яких можлива ідентифікація топологічної границі послідовності звужень графіків $gr(A_\varepsilon)\Big|_{\hat{Q}}$ в$\mu = s_{X^*} \times \omega_X$ -топології.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються наступні умови:*

(I) $\{A_\varepsilon \in L(X, X^*)\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$ *– послідовність рівномірно обмежених та рівномірно коерцитивних операторів;*

(II) $U_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$ *– послідовність опуклих замкнених підмножин* U;

(III) $\{g_\varepsilon \in X^*\}$ *– довільна сильно збіжна в* X^* *послідовність;*

(IV) клас допустимих керувань $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$ *є регулярним згідно з означенням 2.1.*

Тоді можна вказати множину $\mathrm{H} \in H^{\#}$ *та коерцитивний лінійний обмежений оператор* $A_0 L(X, X^*)$ *такі, що* $A_\varepsilon \underset{\varepsilon \in \mathrm{H}}{\overset{G}{\rightarrow}} A_0$ *і при цьому*

$$\mu - Lm\left[gr(A_\varepsilon)\Big|_{\hat{Q}} \right] = gr(A_0)\Big|_{(s_{X^*}) - Lm[\hat{Q}_\varepsilon]}. \tag{2.9}$$

Доведення. Для доведення даного результату скористаємося лемою 2.1. Для цього запишемо: $W_\varepsilon = gr(A_\varepsilon), R_\varepsilon = \hat{Q}_\varepsilon \times X$; перевіримо виконання умов *(a)–(c)*. Так як оператори B_ε є лінійними, а множини U_ε опуклими та замкненими, то, за означенням множин $\hat{Q}_\varepsilon$, кожна з них буде також опуклою та замкненою в X^*. Тоді умова (*a*) безпосередньо випливає з властивості коерцитивності операторів A_ε. Оскільки послідовність операторів $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)}$ є компактною відносно G-збіжності, а сильна топологія в X^* задовольняє другу аксіому зліченності, то, за теоремою компактності Куратовського [7], знайдеться множина індексів $\mathrm{H} \in$, коерцитивний обмежений оператор $A_0 L(X, X^*)$ та множина $\hat{Q} \subseteq X^*$ такі, що:

$$\mu - Lmgr(A_\varepsilon)\big|_{\varepsilon \in \mathrm{H}} = gr(A_0);$$

$$\mu - Lm\left[\hat{Q}_\varepsilon \times X\right]\Big|_{\varepsilon \in \mathrm{H}} = \left[(s_{X^*}) - Lm\hat{Q}_\varepsilon \times X\right] = \hat{Q} \times X.$$

Отже, умова (*b*) леми 2.1 виконується. Що стосується умови (*c*), то її справедливість безпосередньо випливає з припущення про регулярність класу допустимих керувань. Таким чином, згідно з лемою 2.1, можемо записати, що:

$$\mu - Lm\left[gr(A_\varepsilon)\Big|_{\hat{Q}}\right] = \mu - Lm\left(gr(A_\varepsilon) \cap \left[\hat{Q}_\varepsilon \times X\right]\right) = \mu - Lm[gr(A_\varepsilon)] \cap \left[(s_{X^*}) - Lm\hat{Q}_\varepsilon \times X\right].$$

Отже, співвідношення (2.9) встановлено.

Розглянемо питання про G-компактність послідовності лінійних неперервних операторів $\{C_\varepsilon \in L(X, X^*)\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$.

Теорема 2.2. *Нехай* $\{C_\varepsilon \in L(X, X^*)\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$ *– послідовність рівномірно обмежених додатніх операторів. Тоді знайдеться множина індексів* $\mathrm{H} \in H^{\#}$ *та лінійний обмежений додатній оператор* $C_0 \in L(X^*, X)$ *такі, що:*

$$(\omega_X \times s_{X^*}) - Lm[gr(C_\varepsilon)] = gr(A_0), \tag{2.10}$$

тобто $C_\varepsilon \underset{\varepsilon \in \mathrm{H}}{\overset{G}{\longrightarrow}} C_0$.

Доведення. Оскільки простір X є сепарабельним та рефлексивним, то знайдеться метрика d така, що для будь-якої послідовності $\{x_\varepsilon\}$ в X будуть еквівалентними такі умови:

(*I*) $\{x_\varepsilon\} \to x$ слабко в X;

(*II*) $\{x_\varepsilon\}$ обмежена в X і $d(x_\varepsilon, x) \to 0$ [6].

Позначимо через τ_d топологію на X, яка індукована метрикою. Відомо, що топологічний простір (X, τ_d) є метризованим та сепарабельним. Отже, топологія $\tau_d \times s_X$ буде також задовольняти другу аксіому зліченності. Тому, за теоремою компактності Куратовського [7], знайдеться підпослідовність $\{gr(C_\varepsilon)\}_{\varepsilon\in H}$, де множина $C \subset X \times X^*$ така, що:

$$(\tau_d \times s_{X^*}) - Lm[gr(C_\varepsilon)] = C.$$

Покажемо, що $C = (\omega_X \times s_{X^*}) - Lm[gr(C_\varepsilon)]$. Для цього достатньо встановити такі включення:

$$(\omega_X \times s_{X^*}) - Ls[gr(C_\varepsilon)] \subseteq C;$$

$$C \subseteq (\omega_X \times s_{X^*}) - Li[gr(C_\varepsilon)].$$

Нехай (x, y) – довільний елемент множини $(\omega_X \times s_{X^*}) - Ls[gr(C_\varepsilon)]$. Тоді, згідно з означенням верхньої топологічної границі, знайдеться множина $H \in H^\#$ і $(\omega_X \times s_{X^*})$-збіжна до (x, y) послідовність $\{(x_\varepsilon, y_\varepsilon)\}_{\varepsilon\in H}$ така, що $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in gr(C_\varepsilon)$ при всіх $\varepsilon \in H$. Оскільки умова (I) забезпечує виконання умови (II), то $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \to (x, y)$ в $(\tau_d \times s_{X^*})$-топології. Отже, $(x, y) \in C$, тобто умова (2.11) виконується.

Тепер встановимо справедливість включення (2.12). Нехай $(x, y) \in C$. Тоді знайдеться множина індексів $H \in H$ і послідовність $\{(x_\varepsilon, y_\varepsilon)\}_{\varepsilon\in H}$ такі, що:

$$(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \xrightarrow{\tau_d \times sX^*} (x, y);$$

$$(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in gr(C_\varepsilon) \ \ \forall \varepsilon \in H.$$

Так як послідовність $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}$ є обмеженою за побудовою, а сукупність лінійних додатніх операторів $\{C_\varepsilon \in L(X^*, X)$ є рівномірно обмеженими згідно з вихідними припущенями, то послідовність $\{x_\varepsilon = C_\varepsilon y_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}$ буде обмеженою в *X*. Тому, беручи до уваги еквівалентність умов (I) та (II), одержимо: $\{x_\varepsilon\} \to x$ слабко в *X*. Таким чином, послідовність $\{(x_\varepsilon, y_\varepsilon)\}_{\varepsilon\in H}$ входить до пари (x, y) в $(\omega_X \times s_{X^*})$-топології, що і забезпечує виконання умови (2.12).

Отже, згідно з означенням *G*-збіжності абстрактних операторів, знайдеться лінійний оператор $C_0 \in L(X^*, X)$ такий, що:

$$C = gr(C_0).$$

Покажемо, що оператор C_0 є додатнім. Нехай $(x, y) \in gr(C_0)$. Тоді, за властивістю (2.12), знайдуться дві послідовності $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}$ та $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}$ такі, що $\{x_\varepsilon\}$ збігається слабко в X^* до *x*, $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}$ збігається сильно в *X** до *y* і $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in gr(C_\varepsilon)$ при всіх $\varepsilon \in H$`. Так як оператори C_ε є додатніми, то при кожному значенні $\varepsilon \in H$ буде виконуватися така умова:

$$0 \le (y_\varepsilon, C_\varepsilon y_\varepsilon)_X = (y_\varepsilon, x_\varepsilon)_\varepsilon.$$

Переходячи в останній до границі формули, отримаємо:

$$0 \le (y, x)_X = (y, C_0 y)_X,$$

що і потрібно було довести.

Для подальшого аналізу та ідентифікації топологічної множини допустимих розв'язків нам знадобиться наступний результат:

Лема 2.2. *[5] Множина E є топологічною границею послідовності множин* $\{E_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \subset X$ *тоді і тільки тоді, якщо виконуються такі умови:*

(I) для кожного елемента $x \in E$ знайдеться множина індексів $H \in H$ і послідовність $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}$, яка збігається до x в X, така, що $x_\varepsilon \in X_\varepsilon$ при всіх $\varepsilon \in H$;

(II) якщо H – довільна множина з $H^\#$, послідовність $(x_\varepsilon)_{\varepsilon\in H}$ збігається до x в X і при кожному значенні $\varepsilon \in H$ виконується умова: якщо $x_\varepsilon \in E_\varepsilon$, то $x \in E$.

3. Ідентифікація топологічної границі множини допустимих розв'язків

Розпочнемо даний параграф із наступних припущень щодо вихідного об'єкта керування:

(a) сукупність опуклих замкнених підмножин $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ має не пусту топологічну границю в *-слабкій топології простору *U*, тобто $\left(\omega_U^*\right)-LmU_\varepsilon \neq 0$;

(b) послідовність $\{f_\varepsilon \in X\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ є компактною в слабкій топології простору *X*;

(c) послідовність $\left\{B_\varepsilon \in L\left(U, X^*\right)\right\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ є компактною відносно рівномірної операторної топології, тобто знайдеться лінійний оператор B_0 із *U* в *X** такий, що:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|B_\varepsilon - B_0\|_{L\left(U;X^*\right)} = 0;$$

(d) для послідовності $\left\{A_\varepsilon \in L\left(X, X^*\right)\right\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ – знайдуться дві додатні константи $0<\lambda_0\le\lambda_1$ такі, що:

$$\lambda_0\|y\|_Y^2 \le \langle A_\varepsilon y, y\rangle_Y, \ \|A_\varepsilon\|\le\lambda_1;$$

(e) послідовність лінійних неперервних додатніх операторів $\left\{C_\varepsilon \in L\left(X^*, X\right)\right\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, для кожного з яких існує правий обернений оператор, є рівномірно обмеженою, тобто знайдеться константа $\lambda_2>0$ така, що:

$$\|C_\varepsilon\|\le\lambda_2 \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0].$$

Встановимо наступний результат.

Лема 3.1. *Нехай виконуються припущення (a)–(c). Тоді*

$$0\neq\left(\omega_{\varepsilon^*}\right)-LmQ_\varepsilon = \left\{f\in X^* \middle| f = B_0u\forall u\in\left(\omega_U^*\right)-LmU_\varepsilon\right\}, \tag{3.1}$$

де через Q_ε *позначено опуклі замкнені підмножини в X*, які визначаються за таким правилом:*

$$Q_\varepsilon = \left\{f\in X^* \middle| f = B_\varepsilon u\forall u\in U_\varepsilon\right\}. \tag{3.2}$$

Доведення. Нехай $f^* = B_0u^*$ – довільний елемент множини $\left\{f\in X^* \middle| f = B_0u \ \ \forall u\in\left(\omega_U^*\right)-LmU_\varepsilon\right\}$.

Так як $u^*\in\left(\omega_U^*\right)-LmU_\varepsilon$, то знайдеться множина $\mathrm{H}\in H$ і *-слабко збіжна до u^* послідовність $\left\{u_\varepsilon^*\right\}_{\varepsilon\in\mathrm{H}}$ така, що $u_\varepsilon^*\in U_\varepsilon$ при всіх $\varepsilon\in H$. Отже,

$$B_\varepsilon u_\varepsilon^*\in Q_\varepsilon \quad \forall\varepsilon\in\mathrm{H}.$$

Разом із тим

$$\left\|B_\varepsilon u_\varepsilon^* - B_0u^*\right\| \le \left\|(B_\varepsilon - B_0)u_\varepsilon^*\right\| + \left\|B_0\left(u_\varepsilon^* - u^*\right)\right\| \le$$
$$\le \|B_\varepsilon - B_0\|\cdot\left\|u_\varepsilon^*\right\| + \sup_{\|\phi\|_{X^*}=1}\left\langle B_0^*\phi, u_\varepsilon^* - u^*\right\rangle.$$

Тому $B_\varepsilon u_\varepsilon^* \to B_0u^*$ сильно в *X"*. З іншої сторони, якщо H – є довільною множиною із $H^\#$ і послідовність $\{f_\varepsilon\in Q_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{H}}$ збігається до f_0 в сильній топології *X"*, то знайдеться послідовність керувань $\{u_\varepsilon\in U_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{H}}$ така, що:

$$f_\varepsilon = B_\varepsilon u_\varepsilon \quad \forall\varepsilon\in\mathrm{H}.$$

Проте, послідовність $B_\varepsilon u_\varepsilon$ обмежена в *X** а оператори B_ε компактні відносно рівномірної операторної топології. Отже, послідовність $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{H}}$ буде також обмеженою. Це дозволяє стверджувати існування елемента $u_0\in(\omega_U)-LsU_\varepsilon$ такого, що $u_\varepsilon\to u_0$ *-слабко в *U*. Таким чином,

$$f_\varepsilon = B_\varepsilon u_\varepsilon\in Q_\varepsilon \quad \forall\varepsilon\in\mathrm{H}.$$

Отже, згідно з лемою 3.1, топологічна границя сукупності множин $\{Q_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ сильній топології простору *X** існує і для неї справедливе твердження (3.1).

Введемо наступне поняття.

Означення 3.1. *Будемо вважати, що об'єкт керування (1.1)–(1.3) задовольняє умову рівномірної регулярності, якщо виконується таке співвідношення:*

$$\left(\omega_U^* \times \omega_X \times s_{X^*}\right) - Li\Xi_\varepsilon \neq 0\ . \tag{3.3}$$

Тобто для вихідного об'єкта керування можна вказати хоча б одну послідовність трійок $\left\{(u_\varepsilon, x_\varepsilon, g_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$, *для якої існує границя в* $\tau = \omega_U^* \times \omega_X \times s_{X^*}$ *-топології.*

Наступна теорема, яка є центральним результатом даної роботи, встановлює достатні умови ідентифікованості топологічної границі множин допустимих розв'язків $\left\{\Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$ в τ-топології.

Теорема 3.1. *Нехай об'єкт керування (1.1)–(1.3) задовольняє умов у рівномірної регулярності і виконуються вихідні вимоги (a)–(e). Тоді для послідовності множин допустимих трійок* $\left\{\Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$ *існує топологічна границя за Кураторвським в τ-топології, для якої справедливе таке твердження:*

$$\tau - Lm\Xi_\varepsilon = X, \tag{3.4}$$

де

$$X = \left\{ (u, x, g) \in U \times X \times X^* \left| \begin{array}{l} A_0 x = B_0 u + g, \\ x + C_0 g = f_0, \\ u \in \left(\omega_U^*\right) - LmU_\varepsilon \end{array} \right. \right\}, \tag{3.5}$$

f_0 *слабкою границею для* $\{f_0 \times X\}$, *а* $A_0 \in L(X, X^*)$ *та* $C_0 \in L(X^*, X)$ – *C границі послідовностей операторів* $\{A_\varepsilon\}$ *та* $\{C_\varepsilon\}$.

Доведення. Введемо до розгляду наступні об'єкти:

$$\Omega_\varepsilon^1 = \left\{(x, g, r, l) \in X \times X^* \times X \times X^* \middle| A_\varepsilon x = l + g\right\};$$
$$\Omega_\varepsilon^2 = \left\{(x, g, r, l) \in X \times X^* \times X \times X^* \middle| x + C_\varepsilon g = r, r = f_\varepsilon\right\};$$
$$\Omega_\varepsilon^3 = \left\{(x, g, r, l) \in X \times X^* \times X \times X^* \middle| l \in Q_\varepsilon\right\}.$$

Зауважимо, що згідно з вихідними припущеннями, при всіх значеннях ε кожна з наведених множин є опуклою і замкненою в $\eta \underline{\underline{\Delta}} \left(\omega_X \times s_X \times \omega_X \times s_{X^*}\right)$-топології на $X \times X^* \times X \times X^*$. Крім того, за теоремою 2.2, лемою 3.1 та результатами роботи [9], існують топологічні границі за Куратовським зазначених множин в η-топології, для яких будуть справедливими наступні твердження:

$$\eta - Lm\Omega_\varepsilon^1 = \left\{(x, g, r, l) \in X \times X^* \times X \times X^* \middle| (l + g, x) \in gr[A_0]\right\};$$
$$\eta - Lm\Omega_\varepsilon^2 = \left\{(x, g, r, l) \in X \times X^* \times X \times X^* \middle| (x - r, g) \in gr[C_0], r = f_0\right\};$$
$$\eta - Lm\Omega_\varepsilon^3 = \left\{(x, g, r, l) \in X \times X^* \times X \times X^* \middle| l \in Q_0 = s_{X^*} - LmQ_\varepsilon\right\}.$$

де f_0 є слабкою границею для $\{f_\varepsilon \in X\}$, а $A_0 \in L\left(X, X^*\right)$ та $C_0 \in L\left(X^*, X\right)$ – G-границі послідовностей операторів $\{A_\varepsilon\}$ та $\{C_\varepsilon\}$.

Далі, беручи до уваги результати роботи [i] та вихідні припущення (a)–(e), маємо:

$$\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3 \neq 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{3.6}$$

Проте, через рівномірну регулярність об'єкта керування (1.1)–(1.3), знайдеться послідовність

$$\left\{\left(u_\varepsilon^*, x_\varepsilon^*, g_\varepsilon^*\right) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon \subset \mathrm{H}},$$

де H ∈, яка збігається в $\tau = \omega_U^* \times \omega_X \times s_{X^*}$-топології на $U \times X \times X^*$ до деякої трійки $\left(u^0, x^0, g^0\right)$.

Тоді, написавши

$$(x_\varepsilon, g_\varepsilon, r_\varepsilon, l_\varepsilon) = \left(x_\varepsilon^*, g_\varepsilon^*, f_\varepsilon, B_\varepsilon u_\varepsilon^*\right)$$

і скориставшись результатами леми 3.1, одержимо що:

$$(x_\varepsilon, g_\varepsilon, r_\varepsilon, l_\varepsilon) \in \Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3\,;$$
$$(x_\varepsilon, g_\varepsilon, r_\varepsilon, l_\varepsilon) \xrightarrow{\ \eta\ } \left(x_0, g_0, f_0, B_0 u^0\right),$$

тобто $\eta - Li\left(\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3\right) \neq 0$. Отже, згідно з лемою 2.1, для послідовності множин

$$\left\{\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3\right\}_{\varepsilon \in \mathrm{H}}$$

існує топологічна границя в η-топології, яку можна подати у такому вигляді:

$$\eta - Lm\left[\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3\right] = \eta - Lm\Omega_\varepsilon^1 \cap \eta - Lm\Omega_\varepsilon^2 \cap \eta - Lm\Omega_\varepsilon^3 . \tag{3.7}$$

Тепер покажемо, що при цьому існує і топологічна границя множин допустимих розв'язків в η-топології для об'єкта керування (3.1)–(3.3), яку можна записати в формі (3.4)–(3.5). Нехай $\left(u^*, x^*, g^*\right)$ – довільна трійка з множини X. Тоді, за лемою 3.1, маємо:

$$u^* = B_0 u^* \in \left(s_{X^*}\right) - LmQ_\varepsilon ,$$

де множини Q_ε зазначені в (3.2). Отже, величини $\left(x^*, g^*, f_0, u^*\right)$ задовольняють таку умову:

$$\left(x^*, g^*, f_0, u^*\right) \in \eta - Lm\Omega_\varepsilon^1 \cap \eta - Lm\Omega_\varepsilon^2 \cap \eta - Lm\Omega_\varepsilon^3.$$

Беручи до уваги співвідношення (3.7) та означення топологічних границь (1.6)–(1.7), робимо висновок, що знайдеться множина $\mathrm{H} \in H$ та η-збіжна до $\left(x^*, g^*, f_0, u^*\right)$ послідовність $\left(x_\varepsilon, g_\varepsilon, f_\varepsilon, u_\varepsilon\right)$ така, що:

$$\left(x_\varepsilon, g_\varepsilon, f_\varepsilon, u_\varepsilon\right) \in \Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3 \quad \forall \varepsilon \in \mathrm{H} .$$

Оскільки, за побудовою

$$Q_\varepsilon \ni u_\varepsilon = B_\varepsilon u_\varepsilon \to u_\varepsilon = B_0 u^* \in \left(\omega_{X^*}\right) - LmQ_\varepsilon \text{ сильно в } X^*,$$

то, згідно з лемою 3.1, маємо:

$$U_\varepsilon \ni u_\varepsilon \to u^* \ \text{*-слабко в } U.$$

Таким чином, для обраної трійки $\left(u^*, x^*, g^*\right) \in X$ послідовність,

$$\left\{\left(u_\varepsilon^*, x_\varepsilon^*, g_\varepsilon^*\right)\right\}_{\varepsilon \in \mathrm{H}},$$

яка побудована за правилом

$$u_\varepsilon^* = u_\varepsilon, \quad x_\varepsilon^* = x_\varepsilon, \quad g_\varepsilon^* = g_\varepsilon ,$$

τ-збігається до $\left(u^*, x^*, g^*\right)$ і задовольняє умову

$$\left(u_\varepsilon^*, x_\varepsilon^*, g_\varepsilon^*\right) \in \Xi_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in \mathrm{H},$$

тобто вимога (I) леми 2.2 виконується. Перевіримо вимогу (II) цієї ж леми. Нехай H – довільна множина індексів з $H^\#$. Нехай $\left\{\left(u_\varepsilon^0, x_\varepsilon^0, g_\varepsilon^0\right) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon \in \mathrm{H}}$ – довільна τ-збіжна послідовність. Позначимо через $\left(u_0, x_0, g_0\right)$ її τ-границю і покажемо, що виконується дана умова:

$$\left(u^0, x^0, g^0\right) \in X . \tag{3.8}$$

Дійсно, за вихідними припущеннями маємо:

$$\left(u_\varepsilon^0, x_\varepsilon^0, g_\varepsilon^0\right) \in \Xi_\varepsilon , \quad \forall \varepsilon \in \mathrm{H} .$$

Отже, $u_\varepsilon = B_\varepsilon u_\varepsilon^0 \in Q_\varepsilon$, тобто:

$$\left(x_\varepsilon^0, g_\varepsilon^0, f_\varepsilon, u_\varepsilon^0,\right) \in \Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3 , \quad \forall \varepsilon \in \mathrm{H} .$$

Оскільки вихідна послідовність трійок є τ-збіжною, а $f_\varepsilon \to f_0$ слабко в X, то, за лемою 3.1, одержимо:

$$\left(x_\varepsilon^0, g_\varepsilon^0, f_\varepsilon, u_\varepsilon^0,\right) \xrightarrow{\ \eta\ } \left(x^0, g^0, f_0, B_0 u^0\right) \in \eta - Lm\left[\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 \cap \Omega_\varepsilon^3\right].$$

Проте, беручи до уваги співвідношення (3.7), можемо записати що:

$$\left(x^0, g^0, f_0, B_0 u_0\right) \in \eta - Lm\Omega_\varepsilon^1 \cap \eta - Lm\Omega_\varepsilon^2 \cap \eta - Lm\Omega_\varepsilon^3,$$

тобто умова (3.8) виконується, що і потрібно було довести.

Таким чином, при виконанні умов теореми 3.1, для об'єкта керування, який описується лінійним рівнянням Гаммерштейна (1.1)–(1.2) з обмеженнями на керування (1.3), результат усереднення при $\varepsilon \to 0$ має такий вигляд:

$$x + C_0\left(A_0 x - B_0 u\right) = f_0 ; \tag{3.9}$$

$$u \in \left(\omega_U^*\right) - LmU_\varepsilon. \tag{3.10}$$

Зауважимо, що множина допустимих розв'язків для усередненого об'єкту (3.9)–(3.10) не є пустою $(\tau - Lm\Xi_\varepsilon \neq 0)$, хоча для G-граничного оператора C_0 можливо і не існує правого оберненого оператора, як цього вимагає теорема 1.1.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Акбаров Д.Е., Мельник В.С., Ясинский В.В.* Методы управления смешанными системами. Операторный подход. – К.: Вирій, 1998. – 223 с.
2. *Згуровський М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и оптимизационные задачи для систем с распределенными параметрами. – К.: Наукова думка, 1999. – 500 с.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
4. *Attouch H.* Variational Convergance for Functionals and Operators. Pitman, London, 1984.
5. *Dal Maso G.* An Introduction to V-Convergence. Birkhaser, Boston, 1993.
6. *Danford N., Schwartz J.T.* Linear operators, volume 1. Wiley, New York, 1957.
7. *Kuratowski K., Topology I,* II. PWN, Warszawa, 1966.
8. *Murat F., Tartar L.* H-Convergence. In A. Cherkaev and R. Kohn, editors,
9. Topics in the mathematical modelling of composite materials. Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl., volume 31. Birkhaser, 1997. – P. 21–43.
10. *Zhikov V., Kozkol S., Oleinik O.* Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

КОГУТ Петро Ілліч – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри комп'ютерних інформаційних технологій Дніпропетровського державного технічного університету залізничного транспорту.

Наукові інтереси:

– варіаційне числення та теорія оптимального керування.

МІЗЕРНИЙ Віктор Миколайович – кандидат технічних наук, завідувач кафедри інтеграції навчання з виробництвом Вінницького державного технічного університету.

Наукові інтереси:

– проектування систем оптимального керування.

ПОВІДАЙКО Петро Михайлович – кандидат технічних наук, професор кафедри автоматизованого управління в технічних системах Житомирського інженерно-технологічного інституту, декан факультету інформаційно-комп'ютерних технологій.

Наукові інтереси:

– проектування систем оптимального керування.

Подано 26.01.2001