УДК 519.45

О.В. Скакаліна, нач.
Обчислювальний центр, м. Полтава
І.В. Скрипіна, ст. викл.
Харківський автомобільно-дорожній технічний університет

МІНІМІЗАЦІЯ СУМАРНОГО ПРОСТОЮ В ЗАДАЧАХ СКЛАДАННЯ АВТОБУСНИХ РОЗКЛАДІВ

Пропонується алгоритм і приклад побудови оптимальних розкладів виконання робіт двома паралельними неідентичними машинами, де показником ефективності є сумарна тривалість робіт.

Досліджувані моделі характеризуються рядом властивостей, які властиві розглянутим в [1] та [2] моделям. Водночас за зовнішньою простотою в описі процесу упорядкування в окремих задачах визначаються нові властивості, з якими пов'язане збільшення часу побудови розкладів, оптимальних у змісті обраного критерію. Попередньо розглянемо задачу, для якої показником ефективності служить сумарна тривалість робіт, і покажемо, що вона розв'язна за поліноміальний час.

Нехай дві паралельні неідентичні машини повинні виконати n робіт j. Перша машина завершує роботу j за час β_{1j}, а на другій машині тривалість її виконання дорівнює β_{2j}. На першу машину потрібно призначити n_1 робіт, а на другу – n_2, $n_1+n_2=n$. Позначимо β матрицю розміром $2\times n$, у якій розмір β_{ij} дорівнює часу виконання роботи j, $j=\overline{1,2}$ на машині i, $i=\overline{1,2}$.

Розіб'ємо множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ на блоки π_1 і π_2; $|\pi_1|=n_1$, $|\pi_2|=n_2$; $n_1+n_2=n$. Блок π_i, $i=\overline{1,2}$, містить індекси тих робіт, що призначені на машину i. Визначимо розклад π у вигляді (π_1, π_2) і оцінимо його ефективність, обравши за критерій оптимальності час виконання усіх робіт:

$$T(\pi_1, \pi_2) = \sum_{j\in\pi_1}\beta_{1j} + \sum_{j\in\pi_2}\beta_{2j}\,. \tag{1}$$

Потрібно знайти на множині усіх розкладів $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ такий розклад $\pi^* = (\pi_1, \pi_2)$, що:

$$T(\pi^*) = T(\pi_1^*,\ \pi_2^*) = \min_{\pi}\left(\sum_{j\in\pi_1}\beta_{1j} + \sum_{j\in\pi_2}\beta_{2j}\right);$$
$$|\pi_1^*| = n_1,\ |\pi_2^*| = n_2,\ n_1+n_2=n. \tag{2}$$

Опишемо алгоритм побудови розкладу π^* з мінімальним значенням $T(\pi^*)$.

$S^1 1$. B – множина упорядкованих пар $((\beta_{11}, \beta_{21}), (\beta_{12}, \beta_{22}), \ldots, (\beta_{1j}, \beta_{2j}), \ldots, (\beta_{1n}, \beta_{2n}))$, n_1 *і* n_2 – задане число індексів із множини $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ у блоках розбивки π_1 і π_2.

$S^1 2$. Знайти: $\delta_j = \beta_{1j} - \beta_{2j}$, $j=\overline{1,n}$.

$S^1 3$. Побудувати послідовність: $\delta_{j1} \le \delta_{j2} \le \ldots \le \delta_{j_{n_1}} \le \delta_{j_{n_1+1}} \le \ldots \le \beta_{jn}$.

$S^1 4$. Шукані блоки $\pi^*{}_1 = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_1}\}$; $\pi_2^* = \{j_{n_1-1}, j_{n_1+2,\ldots,} j_n\}$;

$$T(\pi_1^*, \pi_2^*) = \sum_{k=1}^{n1}\beta_{1jk} + \sum_{l=n_1+1}^{n}\beta_{2jl}\,.$$

Покажемо, що алгоритм коректно будує розклад π^*. Для цього помітимо, що:

$$T(\pi_1, \pi_2) = \sum_{j\in\pi_1}\beta_{1j} + \sum_{j=1}^{n}\beta_{2j} - \sum_{j\in\pi_1}\beta_{2j},$$

де $\sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} = const.$

Тому, щоб мінімізувати $T(\pi_1, \pi_2)$ достатньо знайти мінімум $\sum_{j \in \pi_1} (\beta_{1j} - \beta_{2j})$, який легко досягається упорядковуванням за неубуваннями значень $\delta_j = \beta_{1j} - \beta_{2j}$, $j = \overline{1, n}$ і вибором з отриманої послідовності $\delta_{j_1} \le \delta_{j_2} \le \ldots \le \delta_{j_{m1}} \le \ldots \le \delta_{j_n}$ n_1 перших зліва значень β_{1j_k}. Отже, $\pi_1^* = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_1}\}$. Інші $n - n1$ індексів належать блоку π_2^*.

Розглянемо приклад. Нехай

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad n_1 = 3, \; n_2 = 2.$$

Визначимо $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 2$, $\delta_4 = 1$, $\delta_5 = -3$ і побудуємо послідовність $\delta_5 \le \delta_1 \le \delta_4 \le \le \delta_2 \le \delta_3$. Таким чином, $\pi_1^* = \{5, 1, 4\}$, $\pi_2 = \{2, 3\}$, $T(\pi_1^*, \pi_2^*) = 1 + 3 + 7 + 2 + 2 = 15$.

Неважко помітити, що трудомісткість алгоритму побудови розкладу $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*)$ оцінюється розміром $O(n \log_2 n)$, яка характеризує тимчасову складність процедури сортування n значень δ_j.

Незначні зміни в запропонованому алгоритмі дозволяють знайти розклад $\pi^*(\pi_1^*, \pi_2^*)$ у випадку, коли потужності шуканих блоків $|\pi_1^*|$ і $|\pi_2^*|$ пов'язані єдиною умовою: $|\pi_1^*| + |\pi_2^*| = n$.

Побудова розкладу $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*)$, що мінімізує (2) при відсутності обмежень у випадку $|\pi_1^*| = n_1$, $|\pi_2^*| = n_2$, виконується за допомогою таких кроків:

$S^2 1$. В – множина упорядкованних пар $((\beta_{11}, \beta_{21}), (\beta_{12}, \beta_{22}), \ldots, (\beta_{1j}, \beta_{2j}), \ldots, (\beta_{1n}, \beta_{2n}))$.

$S^2 2$. Знайти $\delta_j = \beta_{1j} - \beta_{2j}$, $j = \overline{1, n}$.

$S^2 3$. Упорядкуванням за неубуваннями значень δ_j побудувати послідовність $\delta_{j_1} \le \delta_{j_2} \le \ldots \le \le \delta_n$; прийняти $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j}$, $l = 1$, $\pi_{1l} = \varnothing$, $\pi_{2l} = N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$S^2 4$. Поки $l \le n - 1$, $\pi_{1l} = \pi_{1l} \cup \{j_l\}$, $\pi_{2l} = \pi_{2l} - \{j_l\}$, $\beta_1 = \beta_1 + \beta_{jl}$, $\beta_2 = \beta_2 - \beta_{jl}$, $T(\pi_{1l}, \pi_{2l}) = = \beta_1 + \beta_2$, $l = l + 1$.

$S^2 5$. Знайти $T(\pi_1^*, \pi_2^*) = \min_{1 \le l \le n-1} T(\pi_{1l}, \pi_{2l})$.

Наведений алгоритм знаходить розв'язання усіх задач побудови оптимальних розкладів (π_{1l}, π_{2l}), $l = \overline{1, n-1}$, які містять обмеження виду $|\pi_{1l}| = l$, $|\pi_{2l}| = n - l$ на кроку $S^2 5$ визначає таке значення, що $l^* \in N - \{n\}$, $\pi^*_{1l} = \pi^*_1$, $\pi^*_{2l} = \pi^*_2$, $|\pi_1^*| = l^*$, $|\pi_2^*| = n - l^*$.

Звідси випливає коректність кроків S1–S5 за визначенням кількості компонентів у блоках π_1^* та π_2^* і значення показника ефективності $T(\pi_1^*, \pi_2^*)$, що відповідає розкладу (π_1^*, π_2^*). Часова складність алгоритму визначається трудомісткістю процедури упорядкування, яка виконується на кроку S3, і оцінюється розміром $O(n \log_2 n)$.

Звернемо увагу на матрицю розглянутого вище числового прикладу. Для послідовності $\delta_5 \le \delta_1 \le \delta_4 \le \delta_2 \le \delta_3$ одержимо: $\pi_{11} = \{5\}$; $\pi_{21} = \{1, 4, 2, 3\}$; $T(\pi_{11}, \pi_{21}) = 13$; $\pi_{12} = \{5, 1\}$; $\pi_{22} = \{4, 2, 3\}$; $T(\pi_{12}, \pi_{22}) = 14$; $\pi_{13} = \{5, 1, 4\}$; $\pi_{23} = \{2, 3\}$; $T(\pi_{13}, \pi_{23}) = 15$; $\pi_{14} = \{5, 1, 4, 2\}$; $\pi_{24} = \{3\}$; $T(\pi_{14}, \pi_{24}) = 17$. Таким чином, $\pi_1^* = \pi_{11}$, $\pi_2^* = \pi_{21}$, $T(\pi_1^*, \pi_2^*) = 13$.

Запропонований показник ефективності розкладів не відноситься до основних і у моделях процесу упорядкування практично не зустрічається. Водночас, його застосування є природно обґрунтованим у вирішенні окремих питань при організації роботи автотранспорту.

Якщо як критерій ефективності для аналізованих задач вибрати довжину розкладу, то виявляється, що побудова розкладу $\sum^* = \left(\sigma_1^*, \sigma_2^*\right)$ мінімальної довжини може бути виконана тільки алгоритмом, який має експоненціальну тимчасову складність:

$$L\left(\sum^*\right) = L\left(\sigma_1^*, \sigma_2^*\right) = \min_{\sum} \max\left(\sum_{j\in\delta_1^*}\beta_{1j}, \sum_{j\in\delta_2^*}\beta_{2j}\right). \qquad (3)$$

Дійсно, задача пошуку (3) без обмежень на потужності підмножин σ_1^*, σ_2^* у термінах розпізнавання властивостей є NP-повним варіантом задачі РОЗБИТТЯ, що так формулюється.

Дано упорядкування $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ елементів кінцевої множини A та розміри $S(a) \in z^+$. Чи існує така підмножина $A' \subseteq A$, що:

$$\sum_{a\in A} S(a) = \sum_{a\in A\setminus A} S(a),$$

і A містить тільки один елемент із кожної пари a_{2i-1}, a_{2i}, $1 \le i \le n$. [2]

Наприклад, шуканими розв'язками задачі (3) для числових значень матриці B є розклад $\sigma_1^* = \{1, 2, 5\}$, $\sigma_2^* = \{3, 4\}$, $L\left(\sigma_1^*, \sigma_2^*\right) = max(3+4+1{,}2+6) = 8$ і розклад $\sigma_1^{*'} = \{4, 5\}$; $\sigma_2^{*'} = \{1, 2, 3\}$; $L\left(\sigma_1^{*'}, \sigma_2^{*'}\right) = max(2+2+2, 7+1) = 8$, які не оптимальні у змісті показника ефективності (2).

Розглянемо розклад $\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right)$, що мінімізує сумарний час завершення робіт на двох неідентичних паралельних машинах:

$$mwft\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right) = \sum_{j=1}^{n} f_i\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right),$$

де $f_j\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right)$ – момент закінчення роботи j.

Безпосередньо на числовому прикладі можна показати, що розв'язання $\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right)$ і $\left(\pi_1^*, \pi_2^*\right)$ з довільними числами елементів у блоках розбивки n_1 і n_2, $n_1 + n_2 = n$, не збігаються. Інакше кажучи, із того, що $T\left(\pi_1^*, \pi_2^*\right) \le f\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right)$ не випливає, що $mwft\left(\pi_1^*, \pi_2^*\right) \le mwft\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right)$.

Наприклад, для числових значень матриці B маємо $\pi_1^* = \{1\}$; $\pi_2^* = \{1, 2, 3, 4\}$; $T\left(\pi_1^*, \pi_2^*\right) = 13$; $m\varpi ft\left(\pi_1^*, \pi_2^*\right) = 1+2+2+2+2+2+2+2+2+2+6 = 25$, у той час, як $\zeta_1^* = (1, 2, 3)$, $\zeta_2^* = (4, 5)$, $T\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right) = 14$, $mwft\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right) = 1+1+7+2+2+2+2+2+2 = 21$. Відзначимо, що в даному випадку $L\left(\sigma_1^*, \sigma_2^*\right) = L\left(\zeta_1^*, \zeta_2^*\right)$ або іншими словами, для наведеного числового прикладу розклад мінімальної довжини одночасно мінімізує сумарний час закінчення робіт.

Цей факт підтверджує висновки про доцільність застосування поліноміальної точної процедури для побудови розкладу з мінімальним сумарним часом закінчення робіт замість розкладу мінімальної довжини, пошук якого неминуче пов'язаний із використанням переборного алгоритму [3].

Задачу пошуку ( ) можна розглядати як окремий випадок одного з варіантів задачі про призначення, що містить додаткові вимоги до припустимого розв'язання. Предметом подальшого розвитку викладених результатів є модель ефективної організації пасажирських перевезень, яка розглянута в [2].

Умови, при яких необхідно мінімізувати сумарний час виконання автобусом m маятникових маршрутів між двома пунктами 1 і 2 містять додаткову вимогу. Воно полягає в тому, що перевезення між цими пунктами повинні забезпечувати $m1$ автобуса автопідприємства, розташованого в пункті 1, і $m2$ автобуса автопідприємства, розташованого в пункті 2, $m_1 + m_2 = m$. З розкладу руху на автостанціях відомий час відправлення для кожного рейсу з пункту 1 у пункт 2 і навпаки, із пункту 2 у пункт 1. Будь-який автобус автопідприємства, розташованого в пункт κ, $\kappa = \overline{1, 2}$, починає і закінчує маршрут відповідно до розкладу в цьому пункті.

Рейс i із пункту 1 у пункт 2 починається в момент часу $t_{1,j}$, $j=\overline{1,m}$ і його тривалість дорівнює τ_{1j}. Рейс j із пункту 2 у пункт 1, що починається в момент часу t_{2j}, $j=\overline{1,m}$ виповнюється за час τ_{2j}. Для автобуса, що відправляється рейсом i із пункту 1 у пункт 2 і який повертається рейсом j із пункту 2 у пункт 1 час в наряді визначається як:

$$\beta_{ij}=t_{2j}-t_{1i}+\tau_{2j}\,;\; t_{2j}-t_{1i}\le\tau_{1i}\,.$$

Аналогічно, тривалість маятникового маршруту автобуса, що виконує спочатку рейс y, а потім j, дорівнює:

$$\beta_{yj}=t_{1j}-t_{2y}+\tau_{1j}\,;\;\; t_{1j}-t_{2y}\le\tau_{2y}\,;\;\; \beta_{ji}=t_{1i}-t_{2j}+\tau_{1i}\,;\;\; t_{1i}-t_{2j}\le\tau_{2j}\,.$$

Припустимий розв'язок задачі представляє розбивка $(\pi_1,\,\pi_2)$ множини усіх маятникових маршрутів із сумарним часом їхнього виконання, який дорівнює:

$$T(\pi)=T(\pi_1,\,\pi_2)=\sum_{i\in\pi_1}\beta_{ij}+\sum_{i\in\pi_2}\beta_{li}\,;\qquad i,l\in\{1,\,2,\,\ldots,\,m\};\qquad j\ne l,|\pi_1|=m_1\,;\qquad |\pi_2|=m_2\,;$$

$m_1+m_2=m$.

Потрібно знайти такий розклад $\pi^*=(\pi_1^*,\,\pi_2^*)$, що:

$$T(\pi^*)=min\,T(\pi) \tag{4}$$

Аналіз задачі починається зі складання таблиць $\left[\beta_{ij}^1\right]_m$ і $\left[\beta_{ij}^2\right]_m$ розглянутих у підрозділі 2.1. Кожен елемент β_{ij}^1 першої таблиці дорівнює часу виконання маятникового маршруту, що включає рейс i із пункту 1 у пункт 2, а потім рейс j із пункту 2 у пункт 1.

Таблиця $\left[\beta_{ij}^2\right]_m$ містить тривалості усіх маршрутів, що починаються виконанням рейсу j, $j=\overline{1,m}$, із пункту 2 у пункт 1, і закінчуються рейсом i, $i=\overline{1,m}$, із пункту 1 у пункт 2. Інакше кажучи, таблиця $\left[\beta_{ij}^1\right]_m$ складена із припущення, що $m_1=m$, а матриця $\left[\beta_{ij}^2\right]_m$ містить інформацію про тривалість маршрутів за умови, що $m_2=m$.

Накладанням матриці $\left[\beta_{ij}^1\right]_m$ на матрицю $\left[\beta_{ij}^2\right]_m$ отримаємо таблицю $Y=\left[\left(\beta_{ij}^1,\,\beta_{ij}^2\right)\right]_m$ і виберемо в ній m пар $\left(\beta_{ij}^1,\,\beta_{ij}^2\right)$ так, щоб ніякі дві з них не знаходилися в одному рядку та в одному стовпчику. В результаті одержимо множину упорядкованих пар: $\left\{\left(\beta_{1j_1}^1,\,\beta_{1j_1}^2\right),\left(\beta_{2j_2}^1,\,\beta_{2j_2}^2\right),\ldots,\right.$ $\left.\ldots,\left(\beta_{ij_i}^1,\,\beta_{ij_i}^2\right),\ldots,\left(\beta_{mj_m}^1,\,\beta_{mj_m}^2\right)\right\}$, $j_i\in\{1,\,2,\,\ldots,\,m\}$ або матрицю розміром 2×m, що уявимо в якості вхідних даних задачі ( ). У її змістовній постановці передбачаються заздалегідь обрані маятникові маршрути, які складаються з одних рейсів i і ji, $1\le i\le m, 1\le j_i\le m$, і що починаються або в пункті 1, або в пункті 2. Залишається визначити такі m_1 та m_2 маршрути, $m_1+m_2=m$, що починаються в пункті 1 і 2 та виконуються за мінімальний час. Для їх знаходження запишемо, що $n=m,\; n_1=m_1, n_2=m_2$ і виконаємо кроки S11–S14 алгоритму розв'язання задачі ( ).

Такі розуміння дозволяють визначити складність множини усіх припустимих розкладів $\pi=(\pi_1,\,\pi_2)$, $|\pi_1|=m_1,|\pi_2|=m_2$, $m=m_1+m_2$. Для пошуку розкладу π^* буде потрібно побудувати $m!$ множин упорядкованих пар $\left\{\left(\beta_{1j_1}^1,\,\beta_{1j_1}^2\right),\left(\beta_{2j_2}^1,\,\beta_{2j_2}^2\right),\ldots,\left(\beta_{ij_i}^1,\,\beta_{ij_i}^2\right),\ldots,\left(\beta_{mj_m}^1,\,\beta_{mj_m}^2\right)\right\}$, $j_i\in\{1,\,2,\,\ldots,\,m\}$. Кожна така множина породжує $C_m^{m_1}$ припустимих розв'язків. Таким чином, область пошуку оптимального розв'язання π^* вміщує $m!$ розкладів π. Слід зазначити, що застосування алгоритму розв'язання задачі ( ) дозволяє скоротити трудомісткість пошуку π^* шляхом перебору до розміру $k\cdot m!\,log_2\,m$.

Очевидно, що задача пошуку розкладу $\pi^*=(\pi_1^*,\,\pi_2^*)$, при відсутності обмежень на кількість елементів у блоках розбивки π_1^* і π_2^* множини $\{1,\,2,\,\ldots,\,m\}$, гранично спрощується. Її розв'язком є розв'язок задачі про призначення з вихідними даними у вигляді матриці $\left[\beta_{ij}\right]_m$, у якій $\beta_{ij}^0 = min\left(\beta_{ij}^1,\ \beta_{ij}^2\right)$.

Усі умови даної задачі можуть бути уточнені в її графовій моделі. Зіставимо матриці $\left[\left(\beta_{ij}^1,\ \beta_{ij}^2\right)\right]$ повний двочастковий орієнтований граф $G = (X \cup Y,\ E)$, $|X| = |Y| = m$, у якому кожна пара вершин $\{x_i, y_i\}$ утворять дві дуги $(x_i,\ y_j)$ і $(y_j,\ x_i) \in E$ з вагою $\beta(x_i,\ y_j) = \beta_{ij}^1$ і $\beta(y_j,\ x_i) = \beta_{ij}^2$. Тоді припустиме розв'язання задачі можна, уявити як довершене паросполучення $\pi = (\pi_1,\ \pi_2)$, що m_1 дуг містять $(x_i,\ y_j) \in \pi_1$ і m_2 дуг. Визначимо вагу паросполучення $\pi = (\pi_1,\ \pi_2)$, як суму ваг вхідних у нього дуг. Потрібно побудувати закінчене паросполучення $\pi^* = \left(\pi_1^*,\ \pi_2^*\right)$ з найменшою вагою.

Опишемо алгоритм, який не гарантує побудови правильного розв'язку, але для типових індивідуальних прикладів задач визначає близький до оптимального розклад.

S^3 1. $\left[\beta_{ij}^1\right]_m$, $\left[\beta_{ij}^2\right]_m$ – матриці тривалості маятникових маршрутів, отримані відповідно при $m_1 = m$ і $m_2 = m$; $\left[\left(\beta_{ij}^1,\ \beta_{ij}^2\right)\right]_m$ – матриця обумовлена накладенням $\left[\beta_{ij}^2\right]_m$ на $\left[\beta_{ij}^1\right]_m$; m_1 і m_2 задане число автобусів у пунктах 1 і 2; $m = m_1 + m_2$.

S^3 2. Визначити матрицю $\left[\beta_{ij}^+\right]_m$, де $\beta_{ij}^+ = \beta_{ij}^1 + \beta_{ij}^2$.

S^3 3. Знайти множину усіх розв'язків, що мінімізують цільову функцію задачі про призначення для матриці $\left[\beta_{ij}^+\right]_m$.

S^3 4. Кожному оптимальному розв'язанню задачі про призначення поставити у відповідність m компонент із матриці $\left[\left(\beta_{ij}^1,\ \beta_{ij}^2\right)\right]_m$ й упорядковувати їх за допомогою кроків S^1 1–S^1 4 алгоритму перебування ( ), при $n = m$.

Поміркуємо над тим, щоб віднести даний алгоритм до процедур побудови розв'язання із прийнятими на практиці відхиленнями від оптимуму.

Після виконання кроку S^3 3 знаходяться всі оптимальні розв'язки $\pi^+ = (\pi^+(1),\ \pi^+(2),\ \ldots,\ \pi^+(m))$ задачі про призначення для матриці $\left[\beta_{ij}^+\right]_m$ і визначається значення цільової функції:

$$B\left(\pi^+\right) = \min_{\pi} \sum_{j=1}^{m} \left[\beta_{\pi^+(j)}^1 + \beta_{\pi^+(j)}^2\right].$$

На кроку S^3 4 ми отримаємо припустимий розв'язок задачі $\left(\pi_1^+,\ \pi_2^+\right)$ для якого:

$$T\left(\pi_1^+,\ \pi_2^+\right) = B\left(\pi^+\right) - \left(\sum_{j\in\pi_1^+} \beta_{\pi^+(j)}^2 + \sum_{j\in\pi_2^+} \beta_{\pi^+(j)}^1\right); \quad \left|\pi_1^+\right| = m_1;\ \left|\pi_2^+\right| = m_2;\ m_1 + m_2 = m.$$

Оптимальний розв'язок $\left(\pi_1^*,\ \pi_2^*\right)$ надає значення:

$$T\left(\pi_1^*,\ \pi_2^*\right) = \min_{\pi}\left[\sum_{j=1}^{m} \beta_{\pi^*(j)} - \left(\sum_{j\in\pi_1^*}^{m} \beta_{\pi^*(j)}^2 + \sum_{j\in\pi_2^*} \beta_{\pi^*(j)}^1\right)\right]; \quad \left|\pi_1^*\right| = m_1;\quad \left|\pi_2^*\right| = m_2;\quad m_1 + m_2 = m.$$

де $\beta_{\pi^*(j)} = \beta^1{}_{\pi^*(j)} + \beta^2{}_{\pi^*(j)}$.

Якщо $B\left(\pi^+\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{\pi^*(j)}$ і побудовані всі оптимальні розв'язки задачі про призначення матриці $\left[\beta_{ij}^+\right]_m$, то серед них знайдеться таке $\left(\pi_1^{+'},\ \pi_2^{+'}\right)$, що $\pi_1^{+'} = \pi_1^*,\ \pi_2^{+'} = \pi_2^*$.

У протилежному випадку:

$$B\left(\pi^+\right) < \sum_{j=1}^{m} \beta_{\pi^*(j)}.$$

Тоді:

$$T(\pi_1^+, \pi_2^+) - T(\pi_1^*, \pi_2^*) = B(\pi^+) - \sum_{j=1}^{m} \beta_{\pi^*(j)} - \left(\sum_{j\in\pi_1^*} \beta^2_{\pi^+(j)} + \sum_{j\in\pi_2^*} \beta^1_{\pi^+(j)} \right) +$$

$$+ \left(\sum_{j\in\pi_1^*} \beta^2_{\pi^*(j)} + \sum_{j\in\pi_2^*} \beta^1_{\pi^*(j)} \right) = B(\pi^+) - \sum_{j=1}^{m} \beta_{\pi^*(j)} + \left(\sum_{j=1}^{m_1} \left(\beta^2_{\pi^*(j)} - \beta^2_{\pi^+(j)}\right) + \sum_{j=1}^{m_2} \left(\beta^1_{\pi^*(j)} - \beta^1_{\pi^+(j)}\right) \right) <$$

$$< m_1 \left(\max_{i,j} \beta^2_{ij} - \min_{i,j} \beta^2_{ij} \right) + m_2 \left(\max_{i,j} \beta^1_{ij} - \min_{i,j} \beta^1_{ij} \right) \le m_1 \, \Delta ,$$

де $\Delta\ j = max\left(max\beta^2_{ij},\ max\beta^1_{ij}\right) - min\left(min\beta^2_{ij},\ min\beta^1_{ij}\right)$.

Звідси випливає, що точність припустимого розв'язку $\left(\pi_1^+ , \pi_2^+\right)$ залежить від довжини входу, що задається розмірністю матриць $\left[\beta^1_{ij}\right]_m$ і $\left[\beta^2_{ij}\right]_m$, і від того, у яких межах змінюються значення їхніх елементів. Тому що змістовне формулювання задачі виключає на вході присутність надзвичайно великих чисел, тобто всі підстави очікувати на виході алгоритму розв'зків із придатними на практиці похибками. Визначимо перестановку $\pi^0 = \left(\pi^0(1),\ \pi^0(2),\ \ldots,\ \pi^0(m)\right)$, що доставляє мінімум цільової функції задачі про призначення для вихідних даних у вигляді матриці $\left[\beta^0_{ij}\right]_m$; $\beta^0_{ij} = min\left(\beta^1_{ij},\ \beta^2_{ij}\right)$, отримаємо нерівність:

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{\pi^0(j)} \le T(\pi_1^*,\ \pi_2^*) \le T(\pi_1^+,\ \pi_2^+),$$

що встановлює діапазон пошуку значення $T(\pi_1^*,\ \pi_2^*)$.

Оцінимо трудомісткість побудови припустимого розв'язку $\left(\pi^{1+},\ \pi^{2+}\right)$. При виконанні кроків $S^3 1$ і $S^3 2$ для визначення матриць $\left[\left(\beta^1_{ij},\ \beta^2_{ij}\right)\right]_m$ і $\left[\beta^+_{ij}\right]_m$ потрібно $O(m^2)$ елементарних дій. Застосовувана на кроку $S^3 3$ процедура побудови усіх оптимальних розв'язків задачі про призначення виконується за час $O(N_{max} m^4 log_2 m)$, де N_{max} – максимальне число оптимальних та локальних розв'язків, що отримані в процесі виконання процедури. Трудомісткість кроку $S^3 4$ обмежена розміром $pm\,log_2\,m$, де p – число всіх оптимальних розв'язків задачі про призначення. Таким чином, на виконання алгоритму побудови потрібно $O(N_{max} m^4 log_2 m)$ операцій.

Розглянемо приклад. Пасажирські перевезення між пунктами 1 і 2 здійснюються двома автобусами автопідприємства, розташованого в пункті 1, і трьома автобусами автопідприємства, розташованого в пункті 2, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_1 + m_2 = 5$.

Розклад руху автобусів на автостанціях задано такою таблицею:

Пункт 1			Пункт 2		
i, № рейсу	t_i, час відправлення	τ_{1i}, час, витрачений на шлях	i, № рейсу	t_i, час відправлення	τ_{2i}, час, витрачений на шлях
1	7,00	5	1	6,00	5
2	8,00	6	2	1,00	6
3	13,00	6	3	14,00	6
4	16,00	5	4	15,00	6
5	18,00	6	5	19,00	5

За даною таблицею визначимо матриці: $\left[\beta^1_{ij}\right]_5$; $\left[\beta^2_{ij}\right]_5$; $\left[\left(\beta^1_{ij},\ \beta^2_{ij}\right)\right]_5$; $\left[\beta^+_{ij}\right]_5$.

$$\left[\beta^1_{ij}\right]_5 = \begin{bmatrix} 28 & 30 & 13 & 14 & 17 \\ 27 & 29 & 12 & 13 & 16 \\ 22 & 24 & 31 & 32 & 11 \\ 19 & 21 & 28 & 29 & 32 \\ 17 & 19 & 26 & 27 & 30 \end{bmatrix}, \quad \left[\beta^2_{ij}\right]_5 = \begin{bmatrix} 30 & 32 & 13 & 15 & 18 \\ 29 & 31 & 12 & 14 & 17 \\ 22 & 24 & 29 & 31 & 34 \\ 21 & 23 & 28 & 30 & 33 \\ 17 & 19 & 24 & 26 & 29 \end{bmatrix},$$

$$\left[\left(\beta_{ij}^1,\beta_{ij}^2\right)\right]_5=\begin{bmatrix}(28,30) & (30,32) & (13,13) & (14,15) & (17,18)\\ (27,29) & (29,31) & (12,12) & (13,14) & (16,17)\\ (22,22) & (24,24) & (31,29) & (32,31) & (11,34)\\ (19,21) & (21,23) & (23,28) & (29,30) & (32,33)\\ (17,17) & (19,19) & (26,24) & (27,26) & (30,29)\end{bmatrix},$$

$$\left[\beta_{ij}^+\right]_5=\begin{bmatrix}58 & 62 & 26 & 29 & 35\\ 56 & 60 & 24 & 27 & 33\\ 44 & 48 & 60 & 63 & 45\\ 40 & 44 & 56 & 59 & 65\\ 34 & 38 & 50 & 53 & 59\end{bmatrix}.$$

Знайдемо всі розв'язки, що доповнюють мінімум цільової функції задачі про призначення для вихідних даних, поданих матрицею $\left[\beta_{ij}^+\right]_5$:

$$\pi_1^+=\left(\beta_{13}^+,\ \beta_2^+,\ \beta_3^+,\ \beta_4^+,\ \beta_{51}^+\right);\ B(\pi_1^+)=26+27+45+44+34=176;$$
$$\pi_2^+=\left(\beta_{14}^+,\ \beta_2^+,\ \beta_3^+,\ \beta_4^+,\ \beta_{51}^+\right);\ B(\pi_2^+)=29+24+45+44+34=176;$$
$$\pi_3^+=\left(\beta_{13}^+,\ \beta_2^+,\ \beta_3^+,\ \beta_4^+,\ \beta_{52}^+\right);\ B(\pi_3^+)=26+27+45+40+38=176;$$
$$\pi_4^+=\left(\beta_{14}^+,\ \beta_2^+,\ \beta_3^+,\ \beta_4^+,\ \beta_{52}^+\right);\ B(\pi_4^+)=29+24+45+40+38=176.$$

Для кожного елемента перестановки π_1^+ знайдемо відповідну пару з $\left[\left(\beta_{ij}^1,\ \beta_{ij}^2\right)\right]_5$, в результаті чого одержимо множину з п'ятьох пар: $\left(\beta_{13}^1,\ \beta_{13}^2\right)=(13,\ 13)$; $\left(\beta_{24}^1,\ \beta_{24}^2\right)=(13,\ 14)$; $\left(\beta_{35}^1,\ \beta_{35}^2\right)=$ $=(11,\ 34)$; $\left(\beta_{42}^1,\ \beta_{42}^2\right)=(21,\ 23)$, $\left(\beta_{51}^1,\beta_{51}^2\right)=(17,\ 17)$.

Тепер визначимо δ_j: $\delta_1=13-13=0$; $\delta_2=13-14=-1$; $\delta_3=11-34=-24$; $\delta_4=21-23=-2$; $\delta_5=17-17=0$.

Упорядкувавши значення δ_j за неубуванням, одержимо послідовність $\delta_3\le\delta_4\le\delta_2\le\delta_1\le\delta_5$ і підмножини $\pi_{1_1}^+$ і $\pi_{2_1}^+$, для яких:

$$\sum_{i,j\in\pi_{1_2}^+}\beta_{ij}^1=\beta_{35}^1+\beta_{42}^1=11+21=32;$$
$$\sum_{i,j\in\pi_{2_2}^+}\beta_{ij}^2=\beta_{24}^2+\beta_{13}^2+\beta_{51}^2=14+13+17=44;\ T\left(\pi_1^+\right)=76.$$

Роблячи аналогічно, одержимо для послідовності π_2^+:

$$\sum_{i,j\in\pi_{1_1}^+}\beta_{ij}^1=\beta_{35}^1+\beta_{42}^1=11+21=32;$$
$$\sum_{i,j\in\pi_{2_2}^+}\beta_{ij}^2=\beta_{14}^2+\beta_{32}^2+\beta_{51}^2=15+12+17=44\ T\left(\pi_2^+\right)=76.$$

Перестановка π_3^+ розбивається на такі блоки $\pi_{1_3}^{1+}$ і $\pi_{2_3}^{2+}$, що:

$$\sum_{i,j\in\pi_{1_3}^+}\beta_{ij}^1=\beta_{35}^1+\beta_{41}^1=11+19=30;$$
$$\sum_{i,j\in\pi_{2_3}^+}\beta_{ij}^2=\beta_{24}^2+\beta_{13}^2+\beta_{51}^2=14+13+19=46;\ T\left(\pi_3^+\right)=76.$$

Для послідовності π_4^+ визначимо:

$$\sum_{i,j\in\pi_{1_4}^+}\beta_{ij}^1=\beta_{35}^1+\beta_{52}^1=11+19=30;$$
$$\sum_{i,j\in\pi_{2_4}^+}\beta_{ij}^2=\beta_{14}^2+\beta_{23}^2+\beta_{52}^2=15+12+19=46;\ T\left(\pi_4^+\right)=76.$$

Всі отримані розбивки надають цільовій функції задачі значення, що дорівнює 76. Закінчене паросполучення, яке відповідає розбивці $\pi_1^+ = \pi_{1_1}^+ \ (\pi_{2_1}^+)$, наведене на рис. 1.

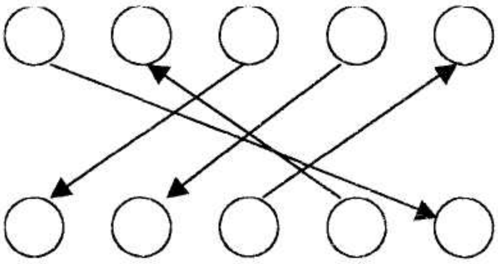

Рис. 1

Оцінимо точність побудованих розв'язань. Для цього обчислимо нижню межу $T(\pi_1^*, \pi_2^*)$, яка дорівнює: $B(\pi^0) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{\pi^0(j)}$.

З $\left[\left(\beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2\right)\right]_5$ визначимо:

$$[\beta_{ij}^0]_5 = \begin{bmatrix} 28 & 30 & 13 & 14 & 17 \\ 27 & 29 & 12 & 13 & 16 \\ 22 & 24 & 29 & 31 & 11 \\ 19 & 21 & 28 & 29 & 32 \\ 17 & 19 & 24 & 26 & 29 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок задачі про призначення дає послідовність $\pi^0 = (\beta_{13}^1, \beta_{24}^1, \beta_{35}^1, \beta_{41}^1, \beta_{52}^1)$, для якої $B(\pi^0) = 13 + 13 + 11 + 19 + 19 = 75$. Таким чином, розмір $T(\pi_1^+, \pi_2^+)$ обмежений знизу значенням $B(\pi^0) = 75$, а зверху – значенням $T(\pi_1^+, \pi_2^+) = 76$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Панишев А.В., Подоляка О.А., Скакалина Е.В.* Эффективный алгоритм распараллеливания работ на неидентичных машинах // Авиационно-космическая техника и технология: Сб. науч. трудов – Вып. 13. – Харьков: Гос. аэрокосм. ун-т. "ХАИ", 1999. – С. 136–146.
2. *Панишев А.В., Подоляка О.А.* Одне з узагальнень задачі про призначення з обмеженнями // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 11. – С. 139–144.
3. *Гери М.Р., Джонсон Д.С.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

СКАКАЛІНА Олена Володимирівна – начальник обчислювального центру, м. Полтава.
Наукові інтереси:
– математичне моделювання;
– теорія розкладів та її застосування.

СКРИПІНА Ірина Валентинівна – старший викладач кафедри інформатики Харківського автомобільно-дорожнього технічного університету.
Наукові інтереси:
– математичне моделювання;
– теорія розкладів та її застосування.

Подано 20.11.2000