

МАШИНОЗНАВСТВО

УДК 621.9

Грабар І.Г., д.т.н., проф.
Грабар О.І., студ.ТЕОРЕТИКО-ЙМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ
ДЕФОРМОВАНИХ ПЕРКОЛЯЦІЙНИХ СЕРЕДОВИЩ

На основі запропонованої теоретико-ймовірнісної моделі деформованих перколяційних середовищ отримані інженерні залежності та методологія розрахунків характеристик міцності та жорсткості. Наведені приклади розрахунків цих характеристик для трьохмірних перколяційних систем.

Теоретичні та експериментальні дослідження [1–11], а також надзвичайна перспективність застосування перколяційних середовищ привертає до них велику увагу світової науки. Ще грандіозніші перспективи з'являються в цій сфері у зв'язку з дослідженнями деформованих перколяційних і перколяційно-фрактальних середовищ.

Характерно, що в більшості випадків результати цих досліджень отримані завдяки комп'ютерному моделюванню. Наприклад [1], якраз в комп'ютерному моделюванні було отримано ймовірнісну модель існування з'єднуючого кластера в плоскій задачі з декартовим розбиттям та показано, що ця ймовірність:

- а) може бути змодельована на кінцево-мірних моделях;
- б) характер розподілу залежить від розмірів підобласті;
- в) статистика розподілу близька до розподілу Фермі-Дірака:

$$W = \frac{1}{1 + e^{\frac{D}{d}(P^* - P)}}, \quad (1)$$

де D – розмір області;

d – характерний розмір локального елемента;

P – ймовірність заповнення локальної області;

P^* – її порогове значення.

Модель (1) чи не вперше розглянула процес появи з'єднуючого кластера в статистичному аспекті та відповідає сучасній ідеології дослідження випадкових процесів.

Альтернативою і доповненням комп'ютерного моделювання є розвиток теоретико-ймовірнісних моделей. Розглянемо задачу про пружні властивості плоскої перколяційної системи $n \times m$ з декартовим розбиттям (рис. 1).

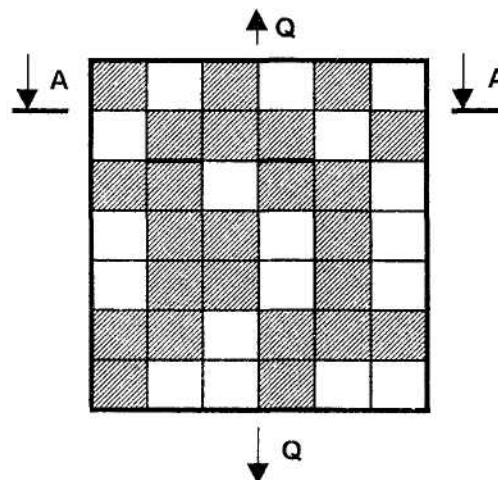


Рис. 1

Розіб'ємо область на смужки, перпендикулярні лінії дії сили Q . Будемо вважати, що:

- а) всю область можна замінити суперпозицією послідовно з'єднаних смужок і користуватись відповідними співвідношеннями для послідовного з'єднання;

б) взаємодія між сусідніми смужками відбувається тільки між вертикально заповненими об'єктами (рис. 2, стовпці 2 і 4);

в) жорсткості всіх заповнених клітинок – C_{ij} , а ймовірність їх заповнення – P_{ij} .

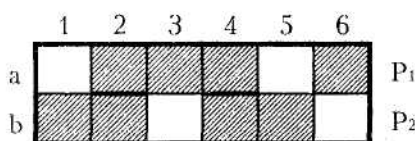


Рис. 2

Тоді знаходження еквівалентної жорсткості двох взаємодіючих смужок (рис. 2) за спільною границею А-А, з урахуванням ймовірностей заповнення і допущенням про паралельне з'єднання елементів в одній смужці, зводиться до:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}, \tag{2}$$

де

$$C_a = \sum_{i=1}^n C_{ij} \cdot P_{ij} \cdot P_{i,(j+1)}; \tag{3}$$

$$C_b = \sum_{i=1}^n C_{i,j+1} \cdot P_{ij} \cdot P_{i,j+1}.$$

Тоді, відповідно, еквівалентна жорсткість всієї області матиме вигляд:

$$\frac{1}{C_\Sigma} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sum_{i=1}^n C_{ij} P_{ij} P_{i,j+1}}. \tag{4}$$

Розглянемо окремий випадок. Нехай

$$C_{ij} = C_o = const;$$

$$P_{ij} = P_{i,j+1} = p = const;$$

$$n = m.$$

Це дає змогу в формулах (3) визначити:

$$C_a = C_b = C_o p^2 n. \tag{5}$$

Тоді з (4) випливає:

$$\frac{1}{C_\Sigma} = \frac{1}{C_o p^2 n} + \frac{1}{C_o p^2 n} + \dots + \frac{1}{C_o p^2 n} = \frac{1}{C_o p^2}. \tag{6}$$

Звідси маємо:

$$C_\Sigma = C_o p^2. \tag{7}$$

Пружна деформація перколяційної системи (рис. 1) може бути знайдена за законом Гука:

$$Q = C_\Sigma \Delta l \tag{8}$$

або, перейшовши до відносних координат, отримаємо:

$$\sigma = E_\Sigma \cdot \varepsilon. \tag{9}$$

Із врахуванням підходів (2)–(7) це дозволяє отримати деякі важливі інженерні формули для оцінки характеристик міцності та пружності деформованих перколяційних систем (ДПС):

$$E_\Sigma = E_o p^2; \tag{10}$$

$$\sigma_\Sigma = \sigma_o p^2,$$

де E_o , σ_o – модуль пружності та гранична міцність локальної області (суцільного середовища);

p – ймовірність заповнення перколяційної системи.

Коли $p \rightarrow 1$, тобто перколяційне середовище переходить в суцільне, маємо:

$$E_\Sigma \Rightarrow E_o; \quad \sigma_\Sigma \Rightarrow \sigma_o. \tag{11}$$

При цьому для кінцевомірних моделей ймовірність існування з'єднуючого кластера можна вирахувати за (1), де можливе існування таких кластерів при $P < P^*$. При $n \rightarrow \infty$ співвідношеннями (10)–(11) необхідно користуватись тільки для $P > P^*$.

Ми вперше пропонуємо методику розрахунку механічних характеристик об'ємної кінцевомірної перколяційної системи як для $P > P^*$, так і для $P < P^*$.

Нехай дано трьохмірний перколяційний масив кінцевих розмірів $n \times n \times n$ із ймовірністю наповнення $P < P^*$. Розбиваємо масив на n пластин. Згідно з (2)–(10), для тих пластин, що містять з'єднуючий кластер, маємо:

$$\sigma_\Sigma = \sigma_0 \cdot p^2,$$

а кількість таких пластин дорівнює:

$$n_1 = W \cdot n = \frac{n}{1 + e^{n(P^* - P)}}.$$

Тоді для перколяційного масиву $n \times n \times n$ при $P < P^*$ міцність на розтяг–стиск може бути оцінена за співвідношенням:

$$\sigma_\Sigma = \sigma_0 \frac{p^2}{1 + e^{n(P^* - P)}}, \tag{12}$$

а модуль пружності дорівнює:

$$E_\Sigma = E_0 \frac{p^2}{1 + e^{n(P^* - P)}}. \tag{13}$$

Співвідношення (10)–(13) дозволяють оцінювати характеристики не тільки граничної міцності дво- та трьохвимірних перколяційних систем, а і збурених матеріалів, надлегких конструкцій з терморозширеного графіту, природніх чи штучних пористих матеріалів, а також великих інженерних споруд з послідовно-паралельним з'єднанням кінцевої кількості елементів і відомою функцією ймовірності деградації характеристик пружності чи міцності елементів, до яких можна застосувати допущення даної моделі.

При цьому значною перевагою (12)–(13) є те, що P^* – критична перколяція для плоскої моделі, яка визначається значно легше, ніж відповідна характеристика в об'ємній задачі.

Приклад 1. Оцінити зміни несучої граничної здатності цегельної кладки старої споруди, якщо за час експлуатації 35 % цеглин вражені грибок, а товщина стіни – $5 \times \frac{1}{2}$ цеглини.

Розв'язок.

Таким чином, в умові даної задачі $n = 5$, $p = 1 - 0,35 = 0,65$.

Для плоскої задачі $P^* = 0,59$.

Тоді:

$$\frac{\sigma_\Sigma}{\sigma_0} = \frac{0,65^2}{1 + e^{5(0,59 - 0,65)}} = 0,65^2 \cdot 0,574 = 0,243.$$

Зміну несучої граничної здатності від ймовірності деградації для $n = 5$ та $n = 10$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

	% $q_{дегр}$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	P	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50
$\frac{\sigma_\Sigma}{\sigma_0}$	$n = 5$	0,774	0,668	0,568	0,474	0,388	0,310	0,243	0,184	0,136	0,097
	$n = 10$	0,878	0,775	0,672	0,570	0,468	0,367	0,272	0,189	0,121	0,072

Отже, як видно з табл. 1, при $P < P^*$ – більш надійнішими є товстіші стіни, а при $P > P^*$ – тонші. При $P = P^*$ товщина стінки не впливає на показники граничної несучої здатності.

Приклад 2. Оцінити зміну несучої граничної здатності збуреного будівельного матеріалу, якщо збурення дало збільшення об'єму в 1,4 рази.

Розв'язок.

Визначимо P і P^* . Для $\frac{V_1}{V_0} = 1,4$ маємо $p = 1 - \frac{V_1 - V_0}{V_1} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{1}{1,4} = 0,714$. $P^* = 0,59$ – як і для попередньої моделі.

Тепер необхідно експериментально визначити середньозважений розмір порожот d , а також задатись характерним розміром D – наприклад, розміром блока. Тоді зміна граничної несучої здатності (в порівнянні з незбуреним матеріалом) така:

$$\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_0} = \frac{\frac{V_0^2}{V_1^2}}{1 + e^{\frac{D}{d}} \left(0,59 - \frac{V_0}{V_1} \right)} \tag{14}$$

Результати розрахунків для різних $\frac{D}{d}$ та двох $\frac{V_1}{V_0}$ наведені в табл. 2. Аналіз даних для $\frac{V_1}{V_0} = 1,4$, на перший погляд, входить в протиріччя з відомою статистичною теорією міцності, яка стверджує, що характеристики міцності зменшуються зі збільшенням розмірів деталі (що ще відомо як масштабний ефект).

Таблиця 2

	$\frac{D}{d}$	3	6	9	12	15	18	∞
	$\frac{V_1}{V_0}$							
$\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_0}$	1,4	0,302	0,346	0,385	0,416	0,442	0,461	0,510
	1,8	0,146	0,138	0,131	0,123	0,115	0,108	0

Дійсно, в суцільному середовищі ($p \rightarrow 1$) зі збільшенням розмірів збільшується ймовірність появи дефекту (порожот), що і призводить до зменшення граничної несучої здатності.

Як видно з табл. 2, для $P_* < P < 1$ ($\frac{V_1}{V_0} = 1,4$) збільшення масштабу (тобто величини $\frac{D}{d}$) призводить до зменшення знаменника в (14), що, в свою чергу, призводить до росту долі з'єднуючих кластерів і, відповідно, до збільшення $\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_0}$.

Для $P < P_*$ ($\frac{V_1}{V_0} = 1,8$) – нижній рядок табл. 2 – залежність (14) знаходиться в повній відповідності до результатів, які передбачає масштабний фактор.

Для $\frac{V_1}{V_0} = \frac{1}{P_*} = 1,695$ маємо незалежність зниження граничної несучої здатності збуреного матеріалу від масштабного фактора:

$$\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_0} \Big|_{P=P_*} = \frac{1}{2} P_*^2 = 0,174 = const ,$$

що є надзвичайно сильним результатом, так як передбачає особливі зони збурення, при яких (в рамках допущень вказаної моделі) зникає явище масштабного ефекту.

Співвідношення (14) дозволяє перейти до змінної $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ відносної питомої густини. Так як

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0} ; \rho_1 = \frac{m}{V_1} ,$$

то

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} .$$

Тоді з (14) випливає, що зміна граничної несучої здатності від зміни густини матиме вигляд:

$$\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_0} = \frac{(\rho_1 / \rho_0)^2}{1 + \exp[n(P_* - \rho_1 / \rho_0)]} \tag{15}$$

Результати розрахунків (15) для $\frac{D}{d} \in (5; 10; \infty)$ наведені в табл. 3.

Таблиця 3

$\frac{\rho_1}{\rho_0}$		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	5,0
$\frac{\sigma_\Sigma}{\sigma_0}$	$n = 5$	0,005	0,045	0,184	0,474	0,866	3,99	25,0
	$n = 5$	0,0008	0,021	0,189	0,570	0,984	4,0	25,0
	$n = 5$	0	0	0,36	0,64	1,0	4,0	25,0

Висновки

1. Розвинуто теоретико-ймовірнісні методи моделювання деформованих перколяційних систем.
2. Здійснено постановку задачі в загальному вигляді та отримано інженерні залежності для оцінки характеристик міцності і пружності кінцевомірних перколяційних середовищ в ймовірнісній постановці.
3. Наведено приклади розрахунків зміни характеристик несучої граничної здатності для цегельної кладки та збуреного будівельного матеріалу.
4. Теоретично виявлено зону перколяції (збурення, пористості) $P = P^*$, де зникає вплив масштабного ефекту.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Грабар І.Г., Громовой А.А.* Конечномерные модели и определения критических показателей в двухмерной двухкомпонентной перколяции // Вісник ЖФ КПІ, 1994. – С. 93–98.
2. *Грабар І.Г., Громовий О.А.* Перколяція у фрактальних середовищах: вплив масштабу та рівня фрактальності // Вісник ЖІТІ. – 1996. – № 4. – С. 107–113.
3. *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике. Т. 2. – М.: Мир, 1990. – 400 с.
4. *Новиков В.В.* К определению упругих модулей перколяционных систем // Инж.-физ. журнал. – 1989. – Т. 57. – № 3. – С. 485–490.
5. *Жен П.* Идеи скейлинга в физике полимеров. – М., 1982. – 368 с.
6. *Соколов И.М.* Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // УФН. – 1986. – Т. 150. – Вып. 2. – С. 222–299.
7. *Stauffer D.* Introduction to Percolation Theory. – London: Taylor and Francis. – 1985. – 124 p.
8. *Николаев Н.И.* Диффузия в мембранах. – М.: Химия, 1980. – 232 с.
9. *Семко Л.С., Черныш И.Г., Рево С.Л., Дашинский Н.И.* Механические свойства композитов на основе полиэтилена и терморасширенного графита // Механика композиционных материалов. – 1987. – № 2. – С. 243–249.
10. *Гай М.И., Зелинский Э.С., Маневич Л.И. и др.* Упругие характеристики случайно-неоднородных композиционных материалов // Там же.
11. *Вильсон К.Дж.* Ренормгруппа и критические явления // УФН, 1983. – Т. 141. – № 2. – С. 194–220.

ГРАБАР Іван Григорович – доктор технічних наук, професор, перший проректор Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- синергетика та нелінійні явища;
- нелінійна динаміка;
- фізика та механіка руйнування;
- сучасні технології.

ГРАБАР Ольга Іванівна – студентка 3-го курсу Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- комп'ютерне моделювання;
- нелінійні явища та моделі.