УДК 681.5.07

Ф.Г. Гаращенко, д.т.н., проф.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Л.А. Панталієнко, к.ф.-м.н., доц.
Національний аграрний університет

АНАЛІЗ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Наведено алгоритми чисельного аналізу практичної стійкості параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь з крайовими умовами. При цьому множини додаткових умов розглядаються у вигляді еліпсоїдів, а фазові обмеження припускаються заданими лінійного та нелінійного типів.

У багатьох задачах прикладного характеру часто виникає необхідність дослідити на стійкість систему при фіксованих координатах або їх лінійної комбінації в деякі моменти часу функціонування об’єкта. Так при проектуванні лінійних прискорювачів крайові умови іноді доцільно задавати на відповідних етапах для узгодження різних секцій прискорювача. Якщо ж заздалегідь відомо, що частинки мають невеликий розкид за радіальними швидкостями, то це означатиме, що частина координат системи, які відповідають проекціям швидкості на осях $ox\ oy$, фіксована [1].

У роботі пропонується різноманітні за постановками крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь, залежних від параметрів, розв’язувати чисельно за допомогою методів практичної стійкості [2–5]. При такому підході в рамках поставлених задач можна з’ясовувати питання стійкості по відношенню до збурень параметрів та оцінювати відповідні відхилення траєкторії від розрахункової [2, 3, 6].

Дослідимо на стійкість незбурений розв’язок $x(t,0)\equiv 0$ системи

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t,\alpha);\quad f(0,t,0)\equiv 0;\quad t\in[t_0,T] \tag{1}$$

при додаткових умовах

$$Qx(t,\alpha)=q. \tag{2}$$

Тут $x=x(t,\alpha)$; α – вектори фазових координат і параметрів розмірностей n та m відповідно; $f(x,t,\alpha)-n$ – вимірна вектор-функція, яка задовольняє умові існування та єдиності розв’язку для будь-яких $\alpha\in G_\alpha$; Q – деякий оператор, що визначає початкові умови для системи (1); $q-n-$ вимірний сталий вектор.

Припустимо, що система (1) з додатковими умовами (2), наприклад, такими:

$$Q_0x(t_0,\alpha)+Q_Tx(T,\alpha)=q, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{M}Q_ix(t_i,\alpha)=q;\quad t_i\in[t_0,T] \tag{4}$$

має єдиний розв’язок для будь-яких $\alpha\in G_\alpha$.

<u>Означення</u>. Розв’язок $x(t,0)\equiv 0$ системи (1) назвемо $\{c,B,G_0^\alpha,\Phi_t,\ t_0,T\}$ стійким за правою частиною додаткових умов (2), якщо $x(t,\alpha)\in\Phi_t$, $t\in[t_0,T]$ для усіх векторів, що задовольняють співвідношенню $q\in\{q:q*Bq<c^2\}$, та довільних $\alpha\in G_0^\alpha\subset G_\alpha$.

В такій постановці загальні теореми практичної стійкості формулюються аналогічно [2, 3] і наводити їх не будемо. Тоді для випадку лінійної системи

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+G(t)\alpha+f(t);\quad t\in[t_0,T] \tag{5}$$

можна чисельно оцінити множину $G_q=\{q:q*Bq<c^2\}$, якщо $G_0^\alpha=\{\alpha:\alpha^*B_\alpha\alpha\le c_\alpha^2\}$, а фазові обмеження Φ_t, $t\in[t_0,T]$ – певного типу [1–3].

Так при наявності лінійних обмежень

$$\Phi_t=\Gamma_t=\{x:|l_s^*(t)x|\le 1,\ s=1,2,\dots N\};\quad t\in[t_0,T] \tag{6}$$

та при відомих збуреннях $f(t)$ критерій $\{c,B,c_\alpha,B_\alpha,\Gamma_t,t_0,T\}$ стійкості системи (5) набуває вигляду:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,\,T]}\ \min_{s=1,\,2,\,\dots N}\ \min_{\alpha\in\{\alpha:\alpha^* B_\alpha \alpha < c_\alpha^2\}} \frac{\left(1-\left|l_s^*(t)\bar{a}(t)\right|\right)^2}{l_s^*(t)\mathrm{X}(t,\,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1^*}\mathrm{X}^*(t,\,t_0)l_s(t)}; \tag{7}$$

$$\left|l_s^*(t)\bar{a}(t)\right| < 1;\ \ t\in[t_0,\,T];\ \ s = 1,\,2,\,\dots N;\ \ \alpha\in\{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\}.$$

Тут

$$\bar{a}(t) = G_1(t)\alpha + a(t) - \mathrm{X}(t,\,t_0)R^{-1}a_1;$$

$$G_1(t) = \int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\,\tau)G(\tau)d\tau;$$

$$a(t) = \int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\,\tau)f(\tau)d\tau,$$

де $\mathrm{X}(t,\,t_0)$ – нормована фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи (5) при $\alpha = 0$, тобто:

$$\frac{d\mathrm{X}(t,\,t_0)}{dt} = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t,\,t_0);\ \ \mathrm{X}(t_0,\,t_0) = \mathrm{E}.$$

Вектор a_1 та матриця R, яку надалі припускаємо неособливою, визначаються в залежності від типу крайової задачі:

$$a_1 = Q_T\left[G_1(T)\alpha + a(T)\right];\ \ R = R_0 + Q_T\mathrm{X}(T,\,t_0)\ - \tag{8}$$

для крайових умов (3) та

$$a_1 = \sum_{i=1}^{M} Q_i\left[G_1(t_i)\alpha + a(t_i)\right];\ \ R = \sum_{i=1}^{M} Q_i\mathrm{X}(t_i,\,t_0)\ - \tag{9}$$

для крайових умов (4).

Якщо ж збурення $f(t)$ невідомі, але обмежені за нормою в деякому функціональному просторі

$$\|f(t)\| \le \bar{R}, \tag{10}$$

то критерій стійкості (7) буде таким:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,\,T]}\ \min_{s=1,\,2,\,\dots N}\ \min_{\alpha\in\{\alpha:\alpha^* B_\alpha \alpha < c_\alpha^2\}} \frac{\left(1-\left|l_s^*(t)\left(G_1(t)\alpha - \mathrm{X}(t,\,t_0)R^{-1}Q_T G_1(T)\alpha\right)\right| - a_s^{(1)}(t)\right)^2}{l_s^*(t)\mathrm{X}(t,\,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1^*}\mathrm{X}^*(t,\,t_0)l_s(t)}; \tag{11}$$

$$a_s^{(1)}(t) < 1 - \left|l_s^*(t)\left(G_1(t)\alpha - \mathrm{X}(t,\,t_0)R^{-1}Q_T G_1(T)\alpha\right)\right|,\ t\in[t_0,\,T],\ s = 1,\,2,\,\dots N;$$

$$\alpha\in\{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\};$$

$$a_s^{(1)}(t) = \max_{\|f(t)\|\le\bar{R}}\left|l_s^*(t)\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\,\tau)f(\tau)d\tau - \mathrm{X}(t,\,t_0)R^{-1}Q_T\int_{t_0}^{T}\mathrm{X}(T,\,\tau)f(\tau)d\tau\right)\right|.$$

Для доведення, наприклад, співвідношення (7), запишемо загальний розв'язок системи (5) у формі Коші

$$x(t,\,\alpha) = \mathrm{X}(t,\,t_0)x(t_0,\,\alpha) + G_1(t)\alpha + a(t) = X(t,\,t_0)R^{-1}[q - a_1] + G_1(t)\alpha + a(t).$$

Параметр c еліпса початкових умов G_q потрібно вибирати згідно з умовами виконання нерівностей

$$-1 - l_s^*(t)\bar{a}(t) \le l_s^*(t)X(t,\,t_0)R^{-1}q \le 1 - l_s^*(t)\bar{a}(t),\ \ s = 1,\,2,\,\dots N.$$

Позначивши через $p_s^*(t) = l_s^*(t)X(t,\,t_0)R^{-1}$ та визначивши екстремуми лінійної форми $p_s^*(t)q$, $s = 1,\,2,\,\dots N$ на заданій структурі еліпсоїда, приходимо до критерію стійкості (7).

У випадку нелінійних динамічних обмежень

$$\Phi_t = \Psi_t = \{x : \psi(x,\,t) \le 1\};\ \ t\in[t_0,\,T] \tag{12}$$

оцінки типу (7), (11) набувають відповідно вигляду:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,\,T]}\min_{\bar{x}\in\Psi_t'}\min_{\alpha\in G_0^\alpha}\frac{\left[g^*(\bar{x},\,t)\left(\bar{x} - \bar{a}(t)\right)\right]^2}{g^*(\bar{x},\,t)X(t,\,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1*}X^*(t,\,t_0)g(\bar{x},\,t)}; \tag{13}$$

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,\,T]}\min_{\bar{x}\in\Psi_t'}\min_{\alpha\in G_0^\alpha}\frac{\left[g^*(\bar{x},\,t)\left(\bar{x} - G_1(t)\alpha + \mathrm{X}(t,\,t_0)R^{-1}Q_T G_1(T)\alpha\right) - a_{\bar{x}}^{(1)}(t)\right]^2}{g^*(\bar{x},\,t)X(t,\,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1*}X^*(t,\,t_0)g(\bar{x},\,t)}. \tag{14}$$

Тут

$$a_{\bar{x}}^{(1)}(t) = \max_{\|f(t)\| \le R} \left| g^*(\bar{x}, t) \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t, \tau) f(\tau) d\tau - \mathrm{X}(t, t_0) R^{-1} Q_T \int_{t_0}^{T} \mathrm{X}(T, \tau) f(\tau) d\tau \right) \right|;$$

$$g^*(x, t) = grad_x^* \psi(\bar{x}, t),$$

де Ψ_t' – межа замкненої опуклої множини Ψ_t, $t \in [t_0, T]$; а вирази в квадратних дужках чисельників формул (13), (14) є додатними (надалі відповідні нерівності також іноді опускаються).

Так само можна розглянути випадок, коли додаткові умови (2) мають інтегральну форму

$$\int_{t_0}^{T} Q(t) x(t) dt = q; \tag{15}$$

При цьому критерії стійкості (7), (11), (13), (14) залишаються без змін, а матрицю R і вектор a_1 потрібно обчислювати за формулами:

$$R = \int_{t_0}^{T} Q(t) \mathrm{X}(t, t_0) dt,$$
$$a_1 = \int_{t_0}^{T} Q(t) [G_1(t)\alpha + a(t)] dt. \tag{16}$$

Розглянемо задачі стійкості при деяких фіксованих компонентах початкових умов. Нехай r перших координат системи (5) є фіксованими: $x_i(t_0) = x_i^0$, $i = 1, 2, ...r$. Надамо загальний розв'язок системи (5) у вигляді:

$$x(t, \alpha) = \mathrm{X}(t, t_0) x(t_0, \alpha) + G_1(t)\alpha + a(t) = \mathrm{X}_1(t, t_0) x^{(1)0} + \mathrm{X}_2(t, t_0) x^{(2)}(t_0, \alpha) +$$
$$+ G_1(t)\alpha + a(t).$$

Тоді, наприклад, умови $\{c, B^{(2)}, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T\}$ стійкості при відомих $f(t)$ випливають з виконання нерівностей

$$\max_{x^{(2)}(t_0) \in \{x : x^* B^{(2)} x < c^2\}} l_{s}^{*}(t) X_2(t, t_0) x^{(2)}(t_0, \alpha) \le 1 - l_{s}^{*}(t) (X_1(t, t_0) x^{(1)^0} + G_1(t)\alpha + a(t));$$

$$\min_{x^{(2)}(t_0) \in \{x : x^* B^{(2)} x < c^2\}} l_{s}^{*}(t) X_2(t, t_0) x^{(2)}(t_0, \alpha) \ge -1 - l_{s}^{*}(t) (X_1(t, t_0) x^{(1)^0} + G_1(t)\alpha + a(t))$$

і записуються так:

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s = 1, 2, ... N} \min_{\alpha \in \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha < c_\alpha^2\}} \frac{\left(1 - \left| l_s^*(t) (\mathrm{X}_1(t, t_0) x^{(1)0} + G_1(t)\alpha + a(t)) \right| \right)^2}{l_s^*(t) \mathrm{X}_2(t, t_0) B^{(2)-1} \mathrm{X}_2^*(t, t_0) l_s(t)};$$

$$\left| l_s^*(t) (\mathrm{X}_1(t, t_0) x^{(1)0} + G_1(t)\alpha + a(t)) \right| < 1; \quad t \in [t_0, T]; \quad s = 1, 2, ...N;$$

$$\alpha \in \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\}. \tag{17}$$

Тут $x(t, \alpha) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t, \alpha) \\ x^{(2)}(t, \alpha) \end{pmatrix}$; $x^{(1)}, x^{(2)}$ – вектори вимірностей r та $(n - r)$ відповідно; $\mathrm{X}(t, t_0) = (\mathrm{X}_1(t, t_0), \ \mathrm{X}_2(t, t_0))$, тобто $\mathrm{X}_1(t, t_0)$ та $\mathrm{X}_2(t, t_0)$ – матриці, відповідно складені з r та $(n - r)$ стовпців фундаментальної матриці $\mathrm{X}(t, t_0)$; $B^{(2)}$ – задана додатно визначена квадратна матриця вимірності $(n - r)$.

Аналогічні критерії можна навести і для випадку початкових умов:

$$Q_0 x(t_0) = q, \tag{18}$$

де q – відомий r -вимірний вектор; Q_0 – задана квадратна матриця вимірності $r \times n$ з рангом r. Припустимо, що матрицю Q_0 можна представити у вигляді $Q_0 = (Q_0^{(1)}, Q_0^{(2)})$, причому $Q_0^{(1)}$ – неособлива матриця вимірності $r \times r$, $Q_0^{(2)}$ – матриця вимірності $r \times (n - r)$. Тоді

$$x^{(1)}(t_0, \alpha) = Q_0^{(1)-1} [q - Q_0^{(2)} x^{(2)}(t_0, \alpha)],$$

а оцінка області стійкості (17) буде такою:

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s = 1, 2, ...N} \min_{\alpha \in \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha < c_\alpha^2\}} \left(1 - \left| l_s^*(t) (\mathrm{X}_1(t, t_0) Q_0^{(1)-1} q + G_1(t)\alpha + a(t)) \right| \right)^2 \times$$
$$\times (l_s^*(t) (\mathrm{X}_2(t, t_0) - \mathrm{X}_1(t, t_0) Q_0^{(1)-1} Q_0^{(2)}) B^{(2)-1} (\mathrm{X}_2(t, t_0) - \mathrm{X}_1(t, t_0) Q_0^{(1)-1} Q_0^{(2)})^* \times l_s(t))^{-1}; \tag{19}$$

$$\left| \; l_s^*(t)\left(\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}q + G_1(t)\alpha + a(t)\right) \; \right| < 1; \;\; t \in [t_0, T]; \;\; s = 1,\, 2,\, \ldots N;$$

$$\alpha \in \left\{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\right\}.$$

При цьому загальний розв’язок досліджуваної системи слід надати у вигляді:

$$x(t,\alpha) = \mathrm{X}_1(t,t_0)Q^{(1)-1}\left(q - Q_0^{(2)}x^{(2)}(t_0,\alpha)\right) + \mathrm{X}_2(t,t_0)x^{(2)}(t_0,\alpha) + G_1(t)\alpha + a(t) =$$

$$= \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}q + G_1(t)\alpha + a(t) + \left(\mathrm{X}_2(t,t_0) - \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_0^{(2)}\right)x^{(2)}(t_0,\alpha).$$

За аналогією дістаємо формули для перевірки властивостей стійкості з крайовими умовами (3), (4), (15) у випадку, коли q – заданий вектор вимірності $r < n$ та існують інтегральні криві системи (5) з відповідними крайовими умовами. Для цього прямокутну матрицю R, що визначається однією з формул (8), (9), (16), необхідно представити у вигляді

$$R = \left(Q_0^{(1)}, Q_0^{(2)}\right).$$

Так, наприклад, для системи (5) з відомими збуреннями крайові умови типу (3) запишемо так:

$$Rx(t_0,\alpha) + Q_T\left(G_1(T)\alpha + a(T)\right) = q$$

або

$$Rx(t_0,\alpha) = q - Q_T\left(G_1(T)\alpha + a(T)\right),$$

звідки, за введеними позначеннями,

$$x^{(1)}(t_0,\alpha) = Q_0^{(1)-1}\left(q - Q_0^{(2)}x^{(2)}(t_0,\alpha) - Q_T\left(G_1(T)\alpha + a(t)\right)\right). \tag{20}$$

За допомогою формули (20) розв’язок системи (5) запишемо таким чином:

$$x(t,\alpha) = \mathrm{X}_1(t,t_0)x^{(1)0} + \mathrm{X}_2(t,t_0)x^{(2)}(t_0,\alpha) + G_1(t)\alpha + a(t) = \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1} \times$$

$$\times \left(q - Q_T\left(G_1(T)\alpha + a(T)\right)\right) + \left(\mathrm{X}_2(t,t_0) - \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_0^{(2)}\right)x^{(2)}(t_0,\alpha) + G_1(t)\alpha + a(t).$$

Тому критерій стійкості (19) матиме вигляд:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,\,T]} \min_{s=1,\,2,\,\ldots N} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \left(1 - \left| \; l_s^*(t)\left(\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}\left(q - Q_T\left(G_1(T)\alpha + a(T)\right)\right) + G_1(t)\alpha + a(t)\right)\right|^2 \times\right.$$

$$\times \left(l_s^*(t)\left(\mathrm{X}_2(t,t_0) - \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_0^{(2)}\right)B^{(2)-1}\left(\mathrm{X}_2(t,t_0) - \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_0^{(2)}\right)^* l_s(t)\right)^{-1}$$

$$\left| l_s^*(t)\left(\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}\left(q - Q_T\left(G_1(T)\alpha + a(T)\right)\right) + G_1(t)\alpha + a(t)\right)\right| < 1; \;\; t \in [t_0,\, T];$$

$$s = 1,\, 2,\, \ldots N; \;\; \alpha \in \left\{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\right\}. \tag{21}$$

В наведених критеріях фігурують матриці:

$$P(t) = \mathrm{X}(t,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1*}\mathrm{X}^*(t,t_0);$$

$$P_1(t) = \mathrm{X}_2(t,t_0)B^{(2)-1}\mathrm{X}_2^*(t,t_0);$$

$$P_2(t) = \left(\mathrm{X}_2(t,t_0) - \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_0^{(2)}\right)B^{(2)-1}\left(\mathrm{X}_2(t,t_0) - \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_0^{(2)}\right)^*,$$

які доцільно обчислювати за відомими матричними диференціальними рівняннями [1].

Якщо ж постійно діючі збурення задовольняють умові (10), то співвідношення (19), (21) будуть мати вигляд:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,\,T]} \min_{s=1,\,2,\,\ldots N} \min_{\alpha\in\left\{\alpha:\alpha^*B_\alpha\alpha<c_\alpha^2\right\}} \frac{\left(1 - \left| \; l_s^*(t)\left(\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}q + G_1(t)\alpha\right) \; \right| - a_s(t)\right)^2}{l_s^*(t)P_2(t)l_s(t)};$$

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,\,T]} \min_{s=1,\,2,\,\ldots N} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \frac{\left(1 - \left| \; l_s^*(t)\left(\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}\left(q - Q_T G_1(T)\alpha\right) + G_1(t)\alpha\right) \; \right| - a_s^{(2)}(t)\right)^2}{l_s^*(t)P_2(t)l_s(t)},$$

де

$$a_s(t) = \max_{\|f(t)\|\le\bar{R}} \left| l_s^*(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau \right|;$$

$$a_s^{(2)}(t) = \max_{\|f(t)\|\le\bar{R}} \left| l_s^*(t)\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau - \mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_T\int_{t_0}^{T} \mathrm{X}(T,\tau)f(\tau)d\tau\right)\right|.$$

Наведемо умови стійкості при нелінійних фазових обмеженнях (12). Для випадку, коли r перших координат є фіксованими $x_i(t_0) = x_i^0$, $i = 1,\, 2,\, \ldots r$ критерій (17) при відомих та невідомих $f(t)$ набуває форми оцінки:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \frac{\left[g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\bar{x}-\mathrm{X}_1(t,t_0)x^{(1)0}G_1(t)\alpha-a(t)\right)\right]^2}{g^*\left(\bar{x},t\right)X_2(t,t_0)B^{(2)-1}X_2^*(t,t_0)g\left(\bar{x},t\right)};$$

$$g^*\left(\bar{x},t\right)\bar{x} > g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\mathrm{X}_1(t,t_0)x^{(1)0}+G_1(t)\alpha+a(t)\right);\ \ \bar{x}\in\Psi_t';\ \ t\in[t_0,T];\ \ \alpha\in G_0^\alpha$$

та

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \frac{\left[g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\bar{x}-\mathrm{X}_1(t,t_0)x^{(1)0}-G_1(t)\alpha\right)-a_{\bar{x}}(t)\right]^2}{g^*\left(\bar{x},t\right)X_2(t,t_0)B^{(2)-1}X_2^*(t,t_0)g\left(\bar{x},t\right)},$$

де

$$a_{\bar{x}}(t)=\max_{\|f(t)\|\le R}\left|g^*\left(\bar{x},t\right)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau\right|,$$

причому

$$a_{\bar{x}}(t) < g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\bar{x}-\mathrm{X}_1(t,t_0)x^{(1)0}-G_1(t)\alpha\right);\ \ \bar{x}\in\Psi_t';\ \ t\in[t_0,T];\ \ \alpha\in G_0^\alpha .$$

Якщо початкові умови задані співвідношенням (18), то умови стійкості будуть такими:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \frac{\left[g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\bar{x}-\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}q-G_1(t)\alpha-a(t)\right)\right]^2}{g^*\left(\bar{x},t\right)P_2(t)g\left(\bar{x},t\right)};$$

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \frac{\left[g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\bar{x}-\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}q-G_1(t)\alpha\right)-a_{\bar{x}}(t)\right]^2}{g^*\left(\bar{x},t\right)P_2(t)g\left(\bar{x},t\right)}.$$

Так само можна оцінити області стійкості для задач з крайовими умовами (3), (4). Наприклад, критерій (21) матиме вигляд:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \left[g^*\left(\bar{x},t\right)P_2(t)g\left(\bar{x},t\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times\left[g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\bar{x}-\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}\left(q-Q_T\left(G_1(T)\alpha+a(T)\right)\right)-G_1(t)\alpha-a(t)\right)\right]^2$$

та

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \left(g^*\left(\bar{x},t\right)P_2(t)g\left(\bar{x},t\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times\left(g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\bar{x}-\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}\left(q-Q_TG_1(T)\alpha\right)-G_1(t)\alpha\right)-a_{\bar{x}}^{(2)}(t)\right)^2$$

відповідно, де

$$a_{\bar{x}}^{(2)}(t)=\max_{\|f(t)\|\le R}\left|g^*\left(\bar{x},t\right)\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau-\mathrm{X}_1(t,t_0)Q_0^{(1)-1}Q_T\int_{t_0}^{T}\mathrm{X}(T,\tau)f(\tau)d\tau\right)\right|.$$

Розроблені алгоритми легко поширюються й на більш складні, нелінійні системи руху. Для цього здійснюється їх лінеаризація, а похибка апроксимації враховується шляхом введення постійно діючих збурень [1–3].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Киев: Наукова думка, 1985. – 304 с.
2. *Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А.* Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости //Проблемы управления и інформатики. – 1996. – № 1. – С. 145–161.
3. *Панталиенко Л.А.* Оценивание и оптимизация параметрических систем методами практической устойчивости //Доповіді Національної академії наук України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 8. – С. 110–114.
4. *Панталієнко Л.А.* Параметрична стійкість руху на скінченному проміжку часу при наявності постійно діючих збурень //Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 9. – С. 3–7.
5. *Цыганкова Л.А.* О некоторых задачах и условиях практической устойчивости //Вычислительная и прикладная математика. – 1976. – № 30.– С. 103–112.
6. *Панталієнко Л.А.* Розрахунок області допусків на точки перемкнення структурно заданих систем керування // Вісник ЖІТІ. – 1998. – № 8. – С. 313–317.

ГАРАЩЕНКО Федір Георгійович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Наукові інтереси:

– структурно-параметрична оптимізація;

– аналіз стійкості та чутливості динамічних систем;

– оптимізація оцінок в задачах практичної стійкості та чутливості.

ПАНТАЛІЄНКО Людмила Анатоліївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики факультету електрифікації та автоматизації сільського господарства Національного аграрного університету.

Наукові інтереси:

– дослідження математичних методів практичної стійкості та чутливості параметричних систем, їх аналіз та оцінка.

Подано 25.09.2000