

**Р.М. Дідковський, аспір.  
С.М. Первунінський, к.т.н., доц.**

*Черкаський інженерно-технологічний інститут*

**КУМУЛЯНТНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ З ЧАСТОТНОЮ МОДУЛЯЦІЄЮ**

*Наведені вирази моментних і кумулянтних функцій сигналів з частотною модуляцією через моментні функції модулюючої функції. Показано негауссовий характер розподілу сигналів даного типу. Наведені приклади побудови спектрів кумулянтних функцій.*

**Вступ.** Синтез нелінійних фільтрів, як аналогових, так і цифрових, вимагає наявності певної апріорної інформації про сигнали, що мають місце в тій чи іншій системі зв'язку. Поряд із завданням дослідження властивостей шумів, які невідворотно виникають протягом проходження сигналом каналу зв'язку та елементів передавальних і приймальних пристроїв, постає проблема аналізу властивостей корисного сигналу, що використовується в системі. Застосування результатів кореляційного аналізу не достатньо для синтезу та аналізу нелінійних систем обробки сигналів. З іншого боку, дослідження багатовимірних розподілів випадкових процесів як математичної моделі сигналів, присутніх у системі, є, зазвичай, складною задачею. Навіть у випадку наявності аналітичного розв'язку цієї задачі, безпосереднє використання отриманих результатів у технічному плані не завжди можливе. Іншим підходом до опису випадкових процесів є використання послідовності кумулянтних функцій. Зміна об'єму скінченної підмножини кумулянтних функцій, що береться до розгляду, дає можливість варіювати ступінь точності опису властивостей сигналів.

**Постановка задачі.** Знайдемо двовимірні моментні функції сигналу з частотною модуляцією (ЧМ), базуючись на яких, обчислимо ряд кумулянтних функцій. Розглянемо приклади побудови спектрів кумулянтних функцій вищих порядків, виходячи з певних властивостей модулюючої функції.

**Розв'язання.** Як математичну модель корисного сигналу в системі з ЧМ оберемо випадковий процес виду:

$$s(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi \int_0^t \lambda(x) dx\right), \tag{1}$$

де  $A_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$  – відповідно амплітуда, частота і початкова фаза сигналу;  $\Delta\varphi$  – сталий коефіцієнт;  $\lambda(x)$  – модулююча функція;  $t$  – параметр часу.

Зауважимо, що  $\varphi_0$  – рівномірно розподілена на проміжку  $[0; 2\pi)$  випадкова величина.

Для більш компактного запису введемо позначення:

$$\Lambda(t) = \Delta\varphi \int_0^t \lambda(x) dx. \tag{2}$$

Тоді двовимірні моментні функції ЧМ сигналу, згідно з визначенням, будуть визначатися виразом:

$$m_{p,q}^{(s)} = m_{p,q}^{(s)}(t_1^{[p]}, t_2^{[q]}) = M(s^p(t_1) \cdot s^q(t_2)) = A_0^{p+q} M(\cos^p(\omega_0 t_1 + \varphi_0 + \Lambda(t_1)) \cos^q(\omega_0 t_2 + \varphi_0 + \Lambda(t_2))), \tag{3}$$

де  $M$  – символ математичного сподівання.

Виходячи із структури наведеного виразу (3), потрібно розглядати таке розбиття множини можливих значень пар  $(p, q)$ : 1)  $p, q$  – парні; 2)  $p, q$  – непарні; 3)  $p$  – парне,  $q$  – непарне.

1. Розглянемо випадок парних  $p$  і  $q$ . Нехай  $p = 2k$ ,  $q = 2n$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}_+$ . Будемо вважати, що  $k \leq n$ . У протилежному випадку у формулах потрібно буде виконати перейменування змінних.

Враховуючи відомий [1] розклад:

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left( 2 \sum_{i=0}^{n-1} C_{2n}^i \cos 2(n-i)x + C_{2n}^n \right)$$

та властивості тригонометричних функцій, отримаємо:

$$m_{2k,2n}^{(s)} = \left(\frac{A_0}{2}\right)^{2(k+n)} \left( C_{2k}^k C_{2n}^n + 2 \left( \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^i C_{2n}^{n-k+i} \times (\cos 2(k-i)\omega_\tau M(\cos 2(k-i)\Lambda_\tau) - \sin 2(k-i)\omega_\tau M(\sin 2(k-i)\Lambda_\tau)) \right) \right), \tag{4}$$

де  $\omega_\tau = \omega_0(t_2 - t_1)$ ,  $\Lambda_\tau = \Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)$ .

У виразах, що знаходяться під знаком математичного сподівання, розкладемо тригонометричні функції в ряд і застосуємо формулу бінома Ньютона до степенів виду  $(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))^n$ . Користуючись лінійністю, можна внести символ математичного сподівання під знак суми так, щоб аргументом були лише добутки виду  $\Lambda^n(t_1) \cdot \Lambda^k(t_2)$ . Для отриманих таким чином розкладів введемо позначення:

$$\Psi_c(\ell) = M(\cos \ell \Lambda_\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( (-1)^j \frac{(\ell \Delta \varphi)^{2j}}{(2j)!} \sum_{v=0}^{2j} (-1)^v C_{2j}^v \times \right. \\ \left. \times M(\Lambda^v(t_1) \cdot \Lambda^{2j-v}(t_2)) \right); \tag{5}$$

$$\Psi_s(\ell) = M(\sin \ell \Lambda_\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( (-1)^{j+1} \frac{(\ell \Delta \varphi)^{2j-1}}{(2j-1)!} \sum_{v=0}^{2j-1} (-1)^v C_{2j-1}^v \times \right. \\ \left. \times M(\Lambda^v(t_1) \cdot \Lambda^{2j-v-1}(t_2)) \right); \tag{6}$$

$$\Psi(\ell) = \cos \ell \omega_\tau \Psi_c(\ell) - \sin \ell \omega_\tau \Psi_s(\ell). \tag{7}$$

Враховуючи позначення (2) та здійснюючи перехід від добутку  $(v + \eta)$  інтегралів до  $(v + \eta)$ -кратного інтеграла, отримаємо:

$$M(\Lambda^v(t_1) \cdot \Lambda^\eta(t_2)) = \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_2} m_{v+\eta}^{(\lambda)}(\varphi_1, \dots, \varphi_v, \theta_1, \dots, \theta_\eta) \times \\ \times d\varphi_1 \dots d\varphi_v d\theta_1 \dots d\theta_\eta. \tag{8}$$

Підстановка (7) в (4) з урахуванням (5), (6) і (8) дає компактний запис виразу моментної функції сигналу  $\mathbf{s}(t)$ , заданого (1), через моментні функції процесу  $\lambda$ :

$$m_{2k, 2n}^{(s)} = \left( \frac{A_0}{2} \right)^{2(k+n)} \left( C_{2k}^k C_{2n}^n + 2 \left( \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^i C_{2n}^{n-k+i} \Psi(2(k-i)) \right) \right). \tag{9}$$

2. Нехай тепер  $p$  і  $q$  – непарні, тобто  $p = 2k - 1$ ,  $q = 2n - 1$ ,  $k, n \in N$ .

Вважатимемо, що  $k \leq n$  з аналогічними до пункту 1) застереженнями.

Враховуючи розклад

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{2n}^i \cos 2(n-i)x,$$

відомий з [1], при збереженні позначень (7) отримаємо:

$$m_{2k-1, 2n-1}^{(s)} = 2 \left( \frac{A_0}{2} \right)^{2(k+n-1)} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k-1}^i C_{2n-1}^{n-k+i} \Psi(2k-2i-1). \tag{10}$$

3. Нарешті, у випадку, коли одне з чисел  $p$  або  $q$  парне, а інше непарне:

$$m_{p, q}^{(s)} = 0. \tag{11}$$

Наведемо вирази для кумулянтних функцій сигналу  $\mathbf{s}(t)$  (до шостого порядку включно), які отримуються за допомогою відомих з [2] формул зв'язку моментних і кумулянтних функцій підстановкою в них значень моментних функцій з рівностей (9)–(11):

$$\begin{aligned} \kappa_{0,1} &= 0; & \kappa_{0,2} &= \frac{A^2}{2}; & \kappa_{0,3} &= 0; \\ \kappa_{0,4} &= -\frac{3A^4}{8}; & \kappa_{0,5} &= 0; & \kappa_{0,6} &= \frac{5A^6}{4}; \\ \kappa_{1,1} &= \frac{A^2}{2} \Psi(1); & \kappa_{1,2} &= 0; & \kappa_{1,3} &= -\frac{3A^4}{8} \Psi(1); \\ \kappa_{1,4} &= 0; & \kappa_{1,5} &= \frac{5A^6}{4} \Psi(1); \\ \kappa_{2,2} &= \frac{A^4}{8} (\Psi(2) - 4\Psi^2(1)); & \kappa_{2,3} &= 0; \\ \kappa_{2,4} &= \frac{A^6}{4} (-\Psi(2) + 6\Psi^2(1)); \\ \kappa_{3,3} &= \frac{A^6}{32} (\Psi(3) + 9\Psi(1) - 18\Psi(1)\Psi(2) + 48\Psi^3(1)). \end{aligned} \tag{12}$$

Часто буває корисним використання безрозмірних кумулянтних коефіцієнтів:

$$\gamma_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j}}{\kappa_{0,2}^{(i+j)/2}}; \quad i, j \in Z_+.$$

Підставляючи в останній вираз значення з (12), отримаємо:

$$\gamma_{0,1} = 0; \gamma_{0,2} = 1; \gamma_{0,3} = 0; \gamma_{0,4} = -\frac{3}{2};$$

$$\gamma_{0,5} = 0; \gamma_{0,6} = 10; \dots$$

Наведені вирази показують, що сигнал з ЧМ є негауссовим випадковим процесом, звідки впливає можливість підвищення ефективності обробки таких сигналів шляхом використання нелінійних систем.

Розглянемо тепер як  $\lambda(t)$  гауссовий випадковий процес з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією виду:

$$\kappa_{1,1}^{(\lambda)} = D_{\lambda} e^{-\alpha|\tau|},$$

де  $D_{\lambda}$  – дисперсія модулюючої функції  $\lambda(t)$ ;  $1/\alpha$  – її інтервал кореляції.

З урахуванням властивостей гауссових процесів та наведених вище умов отримаємо істотне спрощення в записі (7) функції  $\Psi(\ell)$ . Спираючись на матеріал, викладений в [3], отримаємо:

$$\Psi(\ell) = \cos \ell \omega_0 \tau \cdot \exp\left(\ell^2 D \left(1 - \alpha|\tau| - e^{-\alpha|\tau|}\right)\right)$$

де  $D = (\Delta\varphi/\alpha)^2 D_{\lambda}$ .

Виконуючи підстановку отриманого виразу у формули (9)–(11) моментних і (12) кумулянтних функцій, будемо мати відповідні до обраної моделі спрощення. Застосовуючи перетворення Фур'є, можна отримати спектри кумулянтних функцій.

Аналіз спектрів кумулянтних функцій (КФ) сигналів з ЧМ показує, що вони мають однакові знаки та положення головних пелюсток зі спектрами КФ фазомодульованих сигналів [4]. Однак спектри КФ ЧМ сигналів мають ряд особливостей: вони не містять дискретної складової, їх пелюстки більш сконцентровані біля частот, кратних  $\omega_0$ , і не зберігають симетрії відносно вузлових частот при несиметрії процесу  $\lambda(t)$ .

Обвідні кумулянтних функцій асимптотично спадають до нуля, що веде до досить швидкого згасання КФ ЧМ сигналів, на відміну від КФ сигналів з фазовою модуляцією, обвідні яких мають асимптоти, відмінні від нуля.

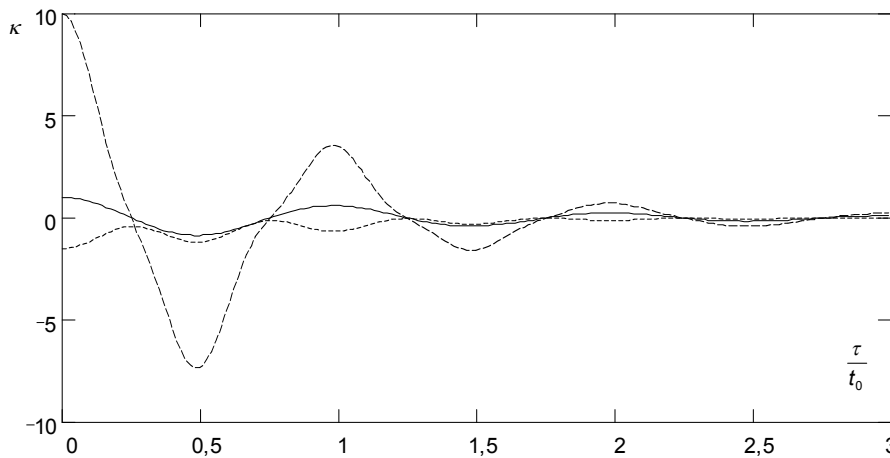


Рис. 1. Кумулянтні функції сигналів з ЧМ

На рис. 1 наведено графіки кумулянтних функцій  $\kappa_{1,1}(\tau)$ ,  $\kappa_{2,2}(\tau)$ ,  $\kappa_{3,3}(\tau)$ , а на рис. 2 – їх спектрів  $w_{1,1}(\omega)$ ,  $w_{2,2}(\omega)$ ,  $w_{3,3}(\omega)$ . Криві, що відповідають графікам  $\kappa_{1,1}(\tau)$  та  $w_{1,1}(\omega)$ , зображено на рисунках неперервною лінією, графікам  $\kappa_{2,2}(\tau)$  та  $w_{2,2}(\omega)$  – лінією з коротким штрихом, а  $\kappa_{3,3}(\tau)$  та  $w_{3,3}(\omega)$  – лінією з довгим штрихом.

**Висновки.** У роботі отримано вирази, що пов'язують моментні функції модулюючої функції з моментними та кумулянтними функціями сигналу з ЧМ. Наведено приклад побудови спектрів КФ таких сигналів для випадку гауссового розподілу модулюючої функції. Показано, що в загальному випадку випадковий процес, що відповідає сигналу з ЧМ, є негауссовим, і тому обробку сигналів даного типу раціонально проводити за допомогою нелінійних систем. Нині проводиться розробка програмного забезпечення для цифрової нелінійної фільтрації сигналів з ЧМ на базі ЕОМ. Викладений матеріал є математичною базою, що дозволяє визначити оптимальні ядра фільтра в тих чи інших умовах прийому.

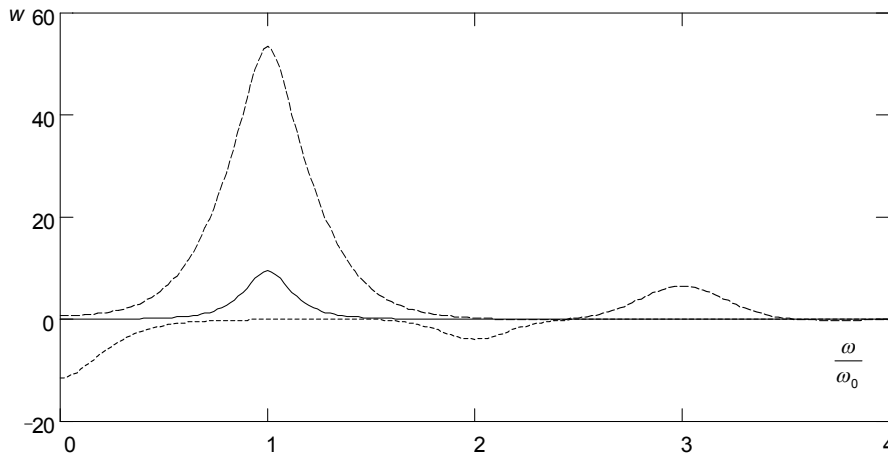


Рис. 2. Спектри кумулянтних функцій сигналів з ЧМ

Результати роботи можуть бути використані як в інформаційних системах (радіомовлення тощо), так і в системах дистанційного керування, де проблема завадостійкості стоїть особливо гостро.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
3. Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986. – 296 с.
4. Первунінський С.М., Дідковський Р.М. Визначення двовимірних кумулянтних функцій сигналів з фазовою модуляцією та їх спектрів // Радіотехніка. – 2000. – Вип. 114. – С. 163–168.

ДІДКОВСЬКИЙ Руслан Михайлович – аспірант Черкаського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- проблеми приладобудування;
- прикладна математика.

ПЕРВУНІНСЬКИЙ С.М. – кандидат технічних наук, доцент Черкаського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- проблеми приладобудування;
- прикладна математика.

Подано 25.09.2000