УДК 615.47

В.Г. Колобродов, д.т.н., проф. В.М. Сокуренко, асист. І.Г. Чиж, к.т.н., доц. Національний технічний університет України "КПІ"

ПОХИБКИ ВІДНОВЛЕННЯ ХВИЛЬОВОЇ АБЕРАЦІЇ ТА ПАРАМЕТРІВ ВАД ЗОРУ В ПРОСТОРОВО РОЗДІЛЬНІЙ РЕФРАКТОМЕТРІЇ ОКА

Досліджено вплив випадкових похибок вимірювання поперечних аберацій променя на сітківці ока на випадкову складову похибок відновлення хвильової аберації ока та параметрів аметропії та астигматизму. Знайдена залежність вказаних похибок від співвідношення між кількістю вимірювальних точок на зіниці ока і кількістю членів поліноміального ряду для різних сіток розташування вимірювальних точок на зіниці. Наведено рекомендації до вибору цих співвідношень.

1. Вступ

Останнім часом все більшого розповсюдження набуває хірургічна корекція зору, що здійснюється методами лазерної ретуші рогівки ока [1–3]. Ця технологія дозволяє досить точно і вибірково видаляти тіло рогівки, чим забезпечує корекцію не тільки аметропії, але й астигматизму і більш складних аберацій.

Успішне проведення операцій на рогівці неможливе без попереднього дослідження рефрактометричних властивостей оптичної системи ока. Тому зараз створюється нове покоління рефрактометрів, які здатні вимірювати абераційні характеристики ока в окремих точках зіниці (з просторовим розділенням) [4–7]. Така рефрактометрія має назву просторово роздільної. Переважна більшість вказаних рефрактометрів базується на вимірюваннях поперечного абераційного зсуву на сітківці тонкого світлового пучка (пучків) променів, які перетинають око у так званих вимірювальних точках – малих за розмірами площадках зіниці, кожна з яких має площу значно меншу за площу всієї зіниці. Із результатів цих вимірювань методом найменших квадратів знаходять коефіцієнти поліномів Церніке, які дозволяють відтворити функцію деформації хвильового фронту. Ця функція дає можливість потім знайти форму тіла рогівки, яке повинно бути видалене при операції, визначити параметри головних вад зору – аметропії (гіперметропії і міопії), астигматизму, а також зробити оцінку гостроти зору.

У зв'язку з тим, що вимірювання поперечних аберацій тонкого світлового пучка на сітківці завжди супроводжується похибками, а світловий пучок встановлюється в обмеженій кількості вимірювальних точок, виникає питання про похибки відновлення коефіцієнтів поліномів Церніке і похибки визначення вищезгаданих характеристик і параметрів ока. Тому метою даної роботи є дослідження впливу цих факторів на похибки відновлення функції хвильової аберації і параметрів вад зору. При цьому завдання полягає у встановленні кількісної залежності вказаних похибок від випадкової складової похибки вимірювання поперечних аберацій, а також від кількості поліномів Церніке, якими визначається функція хвильової аберації.

2. Методика відновлення функції хвильової аберації і параметрів вад зору

Відомо, що поліноми Церніке є поширеними в оптиці для представлення функції хвильової аберації в координатах зіниці і точок простору предметів [8]. Оскільки хвильова аберація оптичної системи ока і параметри вад зору визначаються відносно точки сітківки, що лежить на візуальній осі (в зоні жовтої плями), або відносно точки фіксації зору, а оптична система ока не має осьової симетрії відносно візуальної осі, то вираз для функції хвильової аберації має вигляд:

$$W_{j} = W(\rho_{j}, \varphi_{j}) = \sum_{n} \sum_{m} R_{n,m}(\rho_{j}) [C_{n,m} \cdot \cos m\varphi_{j} + S_{n,m} \cdot \sin m\varphi_{j}],$$
(1)

де ρ_j , φ_j – полярні координати *j*-ї вимірювальної точки, j = 1...q; q – загальна кількість вимірювальних точок; $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ – коефіцієнти поліномів Церніке; $R_{n,m}(\rho_j)$ – поліноми Церніке, які розраховуються в точках ρ_j , φ_j за формулою [8]:

де m – ціле число, яке визначає тип аберації, n – ціле число, яке визначає порядок аберації, причому $n \ge m$, n + m – парне число.

Загальна кількість *t* одночленів у виразі (1) (а, отже, і коефіцієнтів Церніке) визначається максимальними значеннями індексів *n* і *m*:

$$t = \frac{2nm - m^2 + 2n + 2m + z}{4} - z_o,$$
(3)

де z_0 – кількість коефіцієнтів, які не впливають на значення хвильової аберації; $z_0 = (n + 4)/2$, якщо n_{\max} – парне; $z_0 = (n + 3)/2$, якщо n_{\max} – непарне; z = 4, якщо m_{\max} , n_{\max} – парні; z = 3, якщо m_{\max} , n_{\max} – непарні або m_{\max} – непарне, а n_{\max} – парне; z = 2, якщо m_{\max} – парне, а n_{\max} – непарне.

Систему рівнянь, складену з (1), для всіх q вимірювальних точок записують у матричному вигляді: **W** = **L C**,

де W – матриця-стовпець, складена з q елементів W_j ; L – прямокутна матриця розміром $q \times t$, складена з відповідних поліномів Церніке при $C_{n,m}$ і $S_{n,m}$ в системі рівнянь; C – матриця-стовпець, складена із t коефіцієнтів Церніке $C_{n,m}$ і $S_{n,m}$.

Сутність поліноміальної апроксимації (або регресії) функції хвильової аберації полягає у визначенні елементів матриці **С**, яке методом найменших квадратів здійснюється за формулою [9]:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{E} \ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{E} \ \mathbf{X} = \mathbf{B} \ \mathbf{X} , \tag{5}$$

де $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{E} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{E}$, \mathbf{A} – матриця розміром $2q \times t$, що складена з коефіцієнтів \mathbf{a}_{xc} , \mathbf{a}_{xs} , \mathbf{a}_{yc} і \mathbf{a}_{ys} системи рівнянь:

$$\Delta_{x}(\rho_{j}, \varphi_{j}) = \frac{f'}{n'} \cdot \sum_{n} \sum_{m} \left[\mathbf{a}_{xc} \cdot \mathbf{C}_{nm} + \mathbf{a}_{xs} \cdot \mathbf{S}_{nm} \right];$$

$$\Delta_{y}(\rho_{j}, \varphi_{j}) = \frac{f'}{n'} \cdot \sum_{n} \sum_{m} \left[\mathbf{a}_{yc} \cdot \mathbf{C}_{nm} + \mathbf{a}_{ys} \cdot \mathbf{S}_{nm} \right],$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{xc} &= \frac{\partial \mathcal{R}_{nm}(\rho)}{\partial \rho} \bigg|_{\rho = \rho_{j}} \cdot \cos\varphi_{j} \cdot \cos\varphi_{j} + m \frac{\mathcal{R}_{nm}(\rho_{j})}{\rho_{j}} \cdot \sin\varphi_{j} \cdot \sin\varphi_{j} \cdot \sin\varphi_{j}; \\ \mathbf{a}_{xs} &= \frac{\partial \mathcal{R}_{nm}(\rho)}{\partial \rho} \bigg|_{\rho = \rho_{j}} \cdot \cos\varphi_{j} \cdot \sin\varphi_{j} - m \frac{\mathcal{R}_{nm}(\rho_{j})}{\rho_{j}} \cdot \sin\varphi_{j} \cdot \cos\varphi_{j}; \\ \mathbf{a}_{yc} &= \frac{\partial \mathcal{R}_{nm}(\rho)}{\partial \rho} \bigg|_{\rho = \rho_{j}} \cdot \sin\varphi_{j} \cdot \cos\varphi_{j} - m \frac{\mathcal{R}_{nm}(\rho_{j})}{\rho_{j}} \cdot \cos\varphi_{j} \cdot \sin\varphi_{j}; \\ \mathbf{a}_{ys} &= \frac{\partial \mathcal{R}_{nm}(\rho)}{\partial \rho} \bigg|_{\rho = \rho_{j}} \cdot \sin\varphi_{j} \cdot \sin\varphi_{j} + m \frac{\mathcal{R}_{nm}(\rho_{j})}{\rho_{j}} \cdot \cos\varphi_{j} \cdot \cos\varphi_{j}, \end{aligned}$$

де $\Delta_x(\rho_j, \varphi_j)$, $\Delta_y(\rho_j, \varphi_j)$ – проекції на осі X і Y відповідно поперечної аберації тонкого пучка, який перетинає зіницю у вимірювальній точці з номером j, на сітківці; \mathbf{X} – матриця-стовпець, складена з елементів $\Delta_x(\rho_j, \varphi_j)$ і $\Delta_y(\rho_j, \varphi_j)$; \mathbf{E} – діагональна матриця вагових коефіцієнтів, f' – задня фокусна відстань ОС ока, n' – показник заломлення скловидного тіла ока. Для «стандартного» ока: f' = 22,89 мм, n' = 1,337 мм.

Відповідно до (5) вираз (4) приймає вигляд:

$$\mathbf{W} = \mathbf{L} (\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{E} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{E} \mathbf{X}$$

або

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}\mathbf{X} , \qquad (6)$$

 $de \mathbf{H} = \mathbf{L} (\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{E} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{E} = \mathbf{L} \mathbf{B}.$

У роботі [10] показано, що величини аметропії A_D (як аберації дефокусування), первинного астигматизму $|A'_s - A'_m|$ та кута φ_{max} між горизонтальною площиною і площиною, в якій розмір плями на сітківці внаслідок астигматизму є найбільшим, розраховуються за допомогою коефіцієнтів при відповідних цим абераціям поліномах Церніке:

$$A_{D} = \frac{8C_{2,0}}{D};$$
(7)

109

(4)

Технічі³ ідо́ее

$$\begin{aligned} \left| A'_{s} - A'_{m} \right| &= \frac{8}{D} \sqrt{C_{2,2}^{2} + S_{2,2}^{2}} ; \\ \varphi_{ma_{x}} &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} & \text{при } C_{2,0} > 0; \\ -\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} & \text{при } C_{2,0} < 0; \end{cases} \\ \beta &= \operatorname{arctg} \left(\frac{C_{2,2}}{S_{2,2}} \right) + \pi \cdot \mathbf{Z}_{B} ; \end{aligned}$$

$$\tag{8}$$

 $z_{\beta}=0,\pm 1,$

причому z_{β} повинно мати значення, при якому

$$\sin \beta = \frac{C_{2,2}}{\sqrt{C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2}};$$
$$\cos \beta = \frac{S_{2,2}}{\sqrt{C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2}},$$

де D – діаметр вхідної зіниці ока в мм, $C_{2,0}$, $C_{2,2}$ і $S_{2,2}$ – значення відповідних коефіцієнтів Церніке, які визначені в мкм при нормованих значеннях (за максимальним значенням) радіальних координат ρ_j вимірювальних точок на зіниці.

Таким чином, для відновлення значень W_j і розрахунку параметрів A_D , $|A'_s - A'_m|$ і φ_{max} потрібно:

1) вибрати сітку вимірювальних точок на зіниці;

2) призвести вимірювання $\Delta_x(\rho_i, \phi_i), \Delta_y(\rho_i, \phi_i)$ в цих точках для складання матриці **X**;

3) вибрати кількість *t* потрібних коефіцієнтів $C_{n,m}$ і $S_{n,m}$;

4) за формулою (5) знайти значення цих коефіцієнтів;

5) за формулами (4) або (6) знайти значення функції *W*, а за формулами (7)...(9) – значення параметрів вад зору.

3. Розрахунок дисперсій значень хвильової аберації і параметрів вад зору

Вирази (5)...(9) свідчать про те, що випадкові похибки відновлення W_j , A_D , $|A'_s - A'_m|$ і φ_{max} залежать від величин випадкових похибок вимірювань елементів матриці **X**, а також від структури і розмірів матриць **A** і **H**, які визначаються числами q і t. З метою дослідження цих залежностей знайдемо формули розрахунку дисперсій перелічених вище параметрів. Для цього використаємо теорію функцій випадкових аргументів, з якої відомо, що дисперсія значень такої функції є сума добутків квадратів часткових похідних цієї функції від аргументів і дисперсій аргументів при умові їх некорельованості [11]. Зазначена умова в нашій задачі виконується, оскільки випадкові похибки вимірювань аберацій $\Delta_x(\rho_j, \varphi_j)$,

 $\Delta_{y}(\rho_{j}, \phi_{j})$ в сусідніх точках є незалежними внаслідок фізичної природи цих вимірювань.

Відповідно виразам (5) і (6), елементи матриць **С** і **W** є лінійними функціями від випадкових аргументів матриці **X**, тому дисперсії

$$\sigma_{C_i}^2 = \sum_{k=1}^{2q} B_{ik}^2 \sigma_{X_k}^2 ; \qquad (10)$$

$$\sigma_{W_j}^2 = \sum_{k=1}^{2q} H_{jk}^2 \sigma_{X_k}^2 , \qquad (11)$$

де i – порядковий номер елемента матриці **С**, $\sigma_{X_k}^2$ – дисперсія вимірювання елемента з номером k матриці **X**.

Дисперсії похибок розрахунку параметрів A_D , $|A'_s - A'_m|$, φ_{max} визначаються аналогічно:

$$\sigma_{A_{D}}^{2} = \frac{64 \sigma_{C_{2,0}}^{2}}{D^{2}}; \qquad (12)$$

$$\sigma_{|A'_{s}-A'_{m}|}^{2} = \frac{64}{D^{2}} \cdot \frac{\left(C_{2,2}^{2} \cdot \sigma_{C_{2,2}}^{2} + S_{2,2}^{2} \cdot \sigma_{S_{2,2}}^{2}\right)}{C_{2,2}^{2} + S_{2,2}^{2}};$$
(13)

$$\sigma_{\varphi_{max}}^{2} = \frac{32}{D^{2}} \cdot \frac{\left(S_{2,2}^{2} \cdot \sigma_{C_{2,2}}^{2} + C_{2,2}^{2} \cdot \sigma_{S_{2,2}}^{2} \right)}{\left(C_{2,2}^{2} + S_{2,2}^{2} \right)^{2}}, \tag{14}$$

де $\sigma_{C_{2,0}}$, $\sigma_{C_{2,2}}$, $\sigma_{S_{2,2}}$ – середньоквадратичні значення похибок розрахунку коефіцієнтів Церніке $C_{2,0}$, $C_{2,2}$ і $S_{2,2}$ (в мкм) відповідно, які розраховуються за формулою (10). Формули (1)...(6) та (10)...(14) є інструментом для проведення запропонованих досліджень.

4. Результати досліджень дисперсій значень хвильової аберації і параметрів вад зору

Дослідження дисперсії W_j та параметрів вад зору проводилися шляхом розрахунків дисперсій за формулами (10)...(14) і (1)...(6), для яких була створена спеціальна комп'ютерна програма. Було вибрано дев'ять сіток вимірювальних точок трьох типів (рис. 1). Перший тип (сітки № 1, 4, 7) має радіальне розміщення точок. Сітки другого тип (сітки № 2, 5, 8) синтезовані таким чином, щоб відстань між сусідніми точками була приблизно однаковою. Сітки третього типу (сітки № 3, 6, 9) мають рівний крок між точками вздовж осей прямокутної системи координат. Вибір таких типів сіток враховує особливості роботи оптичних дефлекторів, які переміщують світловий промінь по зіниці, та особливості конструкції лінзових растрів датчиків Гартмана-Шека.

При розрахунках за формулами (5)...(14) був врахований експериментально перевірений факт незалежності $\sigma_{X_k}^2$ від координат світлового пучка на зіниці (номера *k*). Це обумовлено тим, що $\sigma_{X_k}^2$ є пропорційним рівню електричного шуму фотоприймального пристрою та аналого-цифрового перетворювача, який від вказаних координат, зрозуміло, не залежить. Тому параметр $\sigma_{X_k}^2 = \sigma_X^2$ як константу було винесено за знак сум, а дисперсії значень W_i , A_D , $|A'_s - A'_m|$ і φ_{max} були віднесені до σ_x^2 .

Розрахунки показали, що для кожної сітки вимірювальних точок характерною є сталість дисперсій W_j , якщо вимірювальні точки розташовані на зіниці на однаковій відстані від центра зіниці. Тому відно-

сні значення середньоквадратичних відхилень W_j (позначено $\frac{\sigma_w}{\sigma_x}$), як функції від $K_{qt} = \frac{2q}{t}$, показані на графіках № 1...9 для трьох різних значень радіуса *R*. Радіус *R* = 3 мм відповідає краю зони зіниці, для якої роблять хірургічну корекцію рогівки.

Відносні середньоквадратичні відхилення σ_A / σ_X , $\sigma_{|A'_S - A'_M|} / \sigma_X$ відповідно до виразу (5) залежать переважно від кількості точок сітки *q* (рис. 3).





Рис. 1. Сітки вимірювальних точок в площині вхідної зіниці ока







№ 9: *I – R* = 0,4 мм; *2 – R* = 2,1 мм; *3 – R* = 2,9 мм

Рис. 2. Графіки похибки відновлення хвильової аберації



Рис. 3. Графіки похибки відновлення параметрів аметропії і первинного астигматизму:

 $I - \frac{\sigma_{A}}{\sigma_{X}} \left[\frac{\mathrm{д} \mathrm{n} \mathrm{T} \mathrm{p}}{\mathrm{M} \mathrm{K} \mathrm{M}} \right], \ 2 - \frac{\sigma_{|A_{\mathrm{S}}' - A_{\mathrm{M}}'|}}{\sigma_{X}} \left[\frac{\mathrm{d} \mathrm{n} \mathrm{T} \mathrm{p}}{\mathrm{M} \mathrm{K} \mathrm{M}} \right]$

Аналіз отриманих результатів дозволяє відзначити:

1) відносна похибка σ_W / σ_X взагалі суттєво залежить від типу сітки і кількості вимірювальних точок на сітці, але якщо показник K_{qt} належить інтервалу 5...10, то вказана відносна похибка практично мало залежить від вигляду сітки та знаходиться в інтервалі значень 0,04...0,01;

2) відносна похибка $\frac{\sigma_w}{\sigma_x}$ незалежно від вигляду сітки різко зростає, якщо значення K_{qt} наближається до одиниці;

3) при q = 64...80 і $K_{qt} > 3$, при q = 156 і $K_{qt} > 4$ та при q = 380...385 і $K_{qt} > 5$ тип сітки практично не впливає на значення σ_W / σ_V ;

4) відносні похибки σ_{A}/σ_{X} , $\sigma_{|A_{S}-A_{M}'|}/\sigma_{X}$ практично не залежать від типу сітки та є обернено пропорційними до кількості вимірювальних точок;

5) відносна похибка $\sigma_{\varphi_{max}} / \sigma_{\chi}$ має такий же характер, як і функції σ_A / σ_{χ} , $\sigma_{|A'_5 - A'_M|} / \sigma_{\chi}$, але зменшується при збільшенні величини астигматизму ока.

5. Висновки

1. Матеріали та результати проведених досліджень дозволяють зробити оцінки потенційної точності відновлення функції хвильової аберації ока і параметрів вад зору, якщо відомі функціональні параметри основних елементів рефрактометра з просторовим розділенням. З іншого боку, вони дають можливість обгрунтовано спроектувати відповідні елементи рефрактометра, якщо відома потрібна точність відновлення розглянутих функцій та параметрів вад оптичної системи ока.

2. Для досягнення практичної незалежності значень похибки відтворення хвильової аберації ока від типу сітки потрібно мати кількість вимірювальних точок приблизно в 2,5 раза більшу за кількість членів поліноміального ряду (кількість коефіцієнтів поліномів Церніке).

3. Кількість членів поліноміального ряду не повинна бути більшою за потрібну для медичної практики, оскільки при цьому (відповідно до п. 2) виникає потреба у значному збільшенні кількості вимірювальних точок на зіниці, що може вступити в протиріччя з вимогою просторового розділення рефрактометра на зіниці.

ЛІТЕРАТУРА:

- 1. *Marsall J., Trokel S., Rothery S., and Krueger R.R.* Photoablative reprofiling of the cornea using an excimer laser: photorefractive keratectomy // Lasers Ophthalmol., 1986. Vol. 1. P. 21–48.
- 2. Pallikaris I., Papatzanaki M., Stathi E., Frenschock E., and Georgiadis A. A corneal flap technique for laser in situ keratomileusus: human studies // Laser Surg. Med, 1990. Vol. 10. P. 463–468.
- 3. *Littlefield T.R., Koepnick R.G., Binder P.S., and Geggel H.S.* New method for reshaping the cornea // J. Biomedical Optics, 1997. Vol. 2. P. 106–114.
- 4. *Liang J., Grimm B., Goelz S., and Bille J. F.* Objective measurement of wave aberrations of the human eye with the use of a Hartmann-Shack wave-front sensor // J. Opt. Soc. Am. A., 1994. Vol. 11. P. 1949–1957.
- 5. *Webb R.H., Penney C.M., and Thompson K.D.* Measurement of ocular local wavefront distortion with a spatially resolved refractometer // Applied Optics, 1992. Vol. 31. P. 3678–3686.
- 6. *Molebny V.V., Pallikaris I.G., Naoumidis L.P., Chyzh I.H., Molebny S.V., Sokurenko V.M.* Retina raytracing technique for eye-refraction mapping. // Proc. of SPIE, 1997. – Vol. 2971. – P. 175–183.
- 7. *Молебний В.В., Чиж І.Г., Сокуренко В.М.* Однопроменевий метод вимірювання локального розподілу аберацій ока // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. 1998. № 4. С. 130–135.
- 8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
- 9. *Родионов С.А.* Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: Машиностроение, 1982. 270 с.
- 10. Молебний В.В., Чиж І.Г., Сокуренко В.М. Розрахунок первинних аберацій ока за допомогою поліномів Церніке // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2000. – № 1. – С. 85–88.
- 11. Вентцель Е.С., Овгаров Л.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973. 364 с.

КОЛОБРОДОВ Валентин Георгійович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри оптичних та оптично-електронних приладів Національного технічного університету України «КШ».

Наукові інтереси:

- інфрачервона техніка;
- оптично-електронні прилади космічного зондування земної поверхні;
- оптичні медичні прилади.

СОКУРЕНКО В'ячеслав Михайлович – асистент кафедри оптичних та оптично-електронних приладів Національного технічного університету України «КПІ».

Наукові інтереси:

- офтальмологічне приладобудування;
- автоматизація проектування оптичних систем.

ЧИЖ Ігор Генріхович – кандидат технічних наук, доцент кафедри оптичних та оптичноелектронних приладів Національного технічного університету України «КПІ».

Наукові інтереси:

- офтальмологічне приладобудування;

- теорія і проектування оптичних систем.

Подано 20.04.2000