

**МОДЕЛЮВАННЯ УЩІЛЬНЕННЯ ДИСКРЕТНОГО МАТЕРІАЛУ  
З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ**

*Запропонована модель ущільнення дискретного матеріалу в умовах нелінійної нестационарної теплопровідності. З використанням чисельних методів контрольного об'єму і блокованих зон модель в одновимірній постановці реалізована у вигляді пакета прикладних програм. При розрахунку ущільнення враховується дія різноманітних деформаційних механізмів: пластичності, повзучості, дифузії. Модель та програма розрахунку дозволяють визначати температури та щільності матеріалу по товщині заготовки у будь-який час, а також час здобуття дискретним матеріалом щільності твердої фази по всій товщині заготовки.*

Процеси гарячого пресування дискретних матеріалів (гранул, волокон, губки та ін.) достатньо широко розповсюджені і досліджуються ([1] та ін.). Як правило, процеси гарячого пресування відбуваються в нестационарних умовах навантаження і при температурних умовах, що змінюються з часом на поверхні деформуємого матеріалу.

Одержання потрібних механічних властивостей та формування необхідної мікроструктури по всьому об'єму оброблюваного матеріалу визначається вибором раціональних технологічних параметрів ведення процесу, простіше усього – через вибір режиму нагрівання й навантаження. Для цього потрібно вміння моделювати процес ущільнення дискретного матеріалу з урахуванням його теплопровідності. Очевидно, що розподіл температури й щільності по об'єму деформованого матеріалу буде неоднорідним.

Роздивимося ізотропне тіло, температурні деформації елементарного об'єму якого дуже малі, в порівнянні з самим об'ємом, а температурне поле нестационарне. В умовах теплопередачі під дією зовнішнього тиску відбувається стиск аналізованого тіла. Для елементарного об'єму процес може бути описаний такими рівняннями:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho l) = -\text{div} q - \text{div}(\rho \bar{u} l) - p \text{div} \bar{u}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = F(\rho, p, T, t). \tag{3}$$

Рівняння (1) – це узагальнене диференціальне рівняння енергетичного балансу, друге рівняння є рівнянням нерозривності суцільного середовища, й останнє рівняння являє собою рівняння стану.

У рівняннях (1), (2), (3):  $\rho$  – відносна щільність, тобто відношення щільності матеріалу до щільності його твердої фази;  $l$  – питома внутрішня енергія елементарного об'єму;  $q$  – питомий тепловий потік;  $\bar{u}$  – локальні швидкості переміщення;  $p$  – зовнішній тиск;  $t$  – час;  $T$  – абсолютна температура.

Відповідно до закону Фур'є:

$$q = -\lambda \text{grad} T, \tag{4}$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

Питома внутрішня енергія  $l$  пов'язана з температурою  $T$  залежністю:

$$dl = c dT, \tag{5}$$

де  $c$  – питома теплоємність речовини.

Будемо вирішувати одновимірну задачу теплопровідності, тобто всі фізичні величини, що входять у рівняння, залежать тільки від однієї просторової координати  $x$ . У такій постановці рівняння (1)–(5) набувають вигляду:

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - c\rho u \frac{\partial T}{\partial x} - p \frac{\partial u}{\partial x}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = F(\rho, p, T, t). \tag{8}$$

© С.В. Подлесний, С.О. Казаков, 2000

Для більшості матеріалів, що використовуються у техніці, залежність коефіцієнта теплопровідності від температури можна апроксимувати формулою [2]:

$$\lambda = \lambda_0 \nu_1 \nu_2, \tag{9}$$

де  $\lambda_0$  – коефіцієнт теплопровідності при  $T = 300$  К;  $\nu_1 = 1 + \beta(T - 300)$  та  $\nu_2 = \rho^\varphi$  – коефіцієнти, що визначають залежність  $\lambda$  від температури і відносної щільності ( $\beta$  і  $\varphi$  – експериментальні коефіцієнти).

Питому теплоємність будемо приблизно розраховувати за формулою [3]:

$$c = c_0 [1 + \psi(T - 300)], \tag{10}$$

де  $c_0$  – коефіцієнт теплоємності при  $T = 300$  К;  $\psi$  – експериментальний коефіцієнт.

Рівняння (8) визначає швидкість ущільнення речовини в кожній точці об'єму. Будемо виходити з умови ізостатичного навантаження. Тоді рівняння (8) записується у вигляді [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & A \rho^k \rho^2 \left( \frac{3\sqrt{a(1-\rho)^m}}{\rho^n} \right)^{k+1} + \frac{9a(1-\rho)^m \rho}{\rho^{2(n-1)}} g + \\ & + \frac{43(1-\rho_0)^2}{(\rho-\rho_0)^2} \left[ \frac{\delta D_b + R_p(\rho-\rho_0) D_v}{KTR_p^3} \right] \Omega \rho \text{ при } \rho < 0,9; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = & A \rho^k \rho^2 \left( \frac{3\sqrt{a(1-\rho)^m}}{\rho^n} \right)^{k+1} + \frac{9a(1-\rho)^m \rho}{\rho^{2(n-1)}} g + \\ & + \frac{54\Omega \left[ \delta D_b + R_p \left( \frac{1-\rho}{6} \right)^{\frac{1}{3}} D_v \right]}{KTR_p^3} \sqrt[5]{1-\rho} \rho \text{ при } 0,9 < \rho < 1, \end{aligned} \tag{12}$$

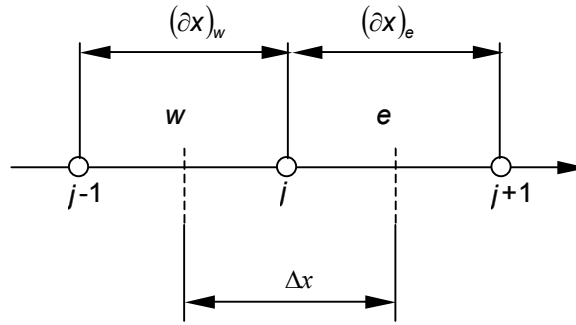
де  $A, a, m, n, k$  – експериментально визначені коефіцієнти;  $\rho$  – зовнішній тиск;  $g$  – текучість;  $D_b, D_v$  – коефіцієнти граничної й об'ємної дифузії;  $R_p$  – радіус частки;  $\Omega$  – атомний об'єм;  $\delta$  – ефективна ширина меж зерна;  $K$  – постійна Больцмана;  $R$  – універсальна газова постійна.

Геометричними характеристиками пористого тіла будуть початкова довжина  $l_0$  та її поточне значення  $l = l(t)$ .

Початкові умови задамо у вигляді  $T(x, t_0) = T_0 = \text{const}$  та  $\rho(x, t_0) = \rho_0 = \text{const}$ . Це означає, що в початковий момент часу температура й щільність усіх точок тіла однакові та дорівнюють  $T_0$  і  $\rho_0$  відповідно. У якості граничних умов приймаємо граничну умову першого роду, відповідно до якої задаємо температуру на правій та лівій межах аналізованого об'єму як функції часу  $T_1 = T_1(t)$  та  $T_2 = T_2(t)$ .

Для розв'язання поставленої задачі доцільно використовувати чисельний метод. З множини відомих методів скористаємося методом контрольного об'єму [5]. Важливою його перевагою є те, що він багато в чому заснований на фізичних розуміннях, а не тільки на математичних висновках. Цей метод має характер кінцево-різницевого методу, проте він містить деякі ідеї, властиві методу кінцевих елементів. Суть методу така. Розрахункову область розбивають на деяке число контрольних об'ємів, що не перетинаються, таким чином, що кожна вузлова точка утримується в одному контрольному об'ємі. Диференціальні рівняння інтегрують по кожному контрольному об'ємі. Отриманий таким чином дискретний аналог відбиває закон зберігання для кінцевого контрольного об'єму. Однією з важливих властивостей методу контрольного об'єму є те, що у ньому закладене точне інтегральне зберігання енергії на будь-якому контрольному об'ємі і, отже, на всій розрахунковій області. Ця властивість виявляється при будь-якій кількості вузлових точок, а не тільки у граничному випадку їхньої великої кількості.

На типовому часовому відрізку за заданими значеннями температури та щільності у вузлових точках для часу  $t$  необхідно визначити значення цих параметрів для часу  $t + \Delta t$ . Старі (відомі) значення у вузлових точках позначимо верхнім індексом  $i - 1$ . Шаблон вузлових точок для одновимірної задачі показаний на рис. 1.



Ρις. 1. Σαβλον βυζλοβιχ τοοοι για οονομίρνοι ζαοαοί

Для цілком неявної схеми та рівномірної сітки вузлів був отриманий дискретний аналог рівняння (6) у вигляді:

$$a_j^i T_j^i = b_{j+1}^i T_{j+1}^i + e_{j-1}^i T_{j-1}^i + d_j^i, \tag{13}$$

де  $a_j^i = b_{j+1}^i + e_{j-1}^i + \rho_j^{i-1} c_j^{i-1} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ;  $b_{j+1}^i = \frac{\lambda_e}{\Delta x}$ ;  $e_{j-1}^i = \frac{\lambda_w}{\Delta x}$ ;

$$d_j^i = \rho_j^{i-1} c_j^{i-1} T_j^{i-1} \frac{\Delta x}{\Delta t} - [\rho(\xi_{j+1}^{i-1} - \xi_j^{i-1}) + c_j^{i-1} \rho_j^{i-1} \xi_j^{i-1} (T_{j+1}^{i-1} - T_j^{i-1})] \Delta x;$$

$$\lambda_w = \frac{2\lambda_{j-1}^{i-1} \lambda_j^{i-1}}{\lambda_{j-1}^{i-1} + \lambda_j^{i-1}} \text{ та } \lambda_e = \frac{2\lambda_j^{i-1} \lambda_{j+1}^{i-1}}{\lambda_j^{i-1} + \lambda_{j+1}^{i-1}} - \text{коефіцієнти теплопровідності на гранях контрольного об'єму};$$

$$\xi_{j+1}^{i-1} = \frac{u_{j+1}^{i-1}}{\Delta x} \text{ та } \xi_j^{i-1} = \frac{u_j^{i-1}}{\Delta x} - \text{відносні швидкості переміщення.}$$

При побудові дискретного аналога (13) була виконана умова, відповідно до якої тепловий потік, що покидає один контрольний об'єм через його межу, повинен дорівнювати потокові, що входить через цю межу в сусідній контрольний об'єм.

При розв'язанні рівняння (13) утворюється система лінійних рівнянь із трьохдіагональною матрицею, що ефективно вирішується методом прогонки. В результаті знаходимо значення температур у вузлах. Знаючи розподіл температур у вузлах пористого тіла, за рівнянням стану (8) розраховується щільність у вузлах на кожному тимчасовому кроці, а також швидкість ущільнення. Після цього визначається швидкість деформації за формулою:

$$\xi_j^i = \frac{(\rho_j^i)^{n-2}}{3\sqrt{a(1-\rho_j^i)^m}} \dot{\rho}_j^i. \tag{14}$$

Потім розрахунок повторюється на наступному часовому відрізьку.

Через те, що контрольні об'єми й вузлові точки були прийняті нерухомими, а у процесі ущільнення відбувається стиск дискретного матеріалу, при побудові алгоритму розв'язання задачі був використаний метод блокованих зон [5]. Він складається з того, що при виході контрольних об'ємів за межі пористого тіла їм присвоюються значення температури, яка дорівнює температурі на межі  $T_2(t)$ , значення  $\lambda$  береться дуже великим, а значення  $\rho$  – дуже малим. Використання цього методу дозволяє розв'язати задачу з рухливою межею на регулярній сітці.

Роздивимося визначення характерного розміру  $l(t)$  пористого тіла у процесі пресування. Початковий розмір  $l_0 = l(t_0)$ . Розіб'ємо аналізований об'єм на  $M$  просторових інтервалів довжиною  $\Delta x = \frac{l_0}{M}$ . На довжині  $l_0$  буде  $K = M + 1$  вузлів. Лінійний розмір пресуємого тіла  $l$  на  $i$ -му часовому кроці визначаємо за формулою:

$$l^i = l^{i-1} - \left[ \sum_{j=2}^N \Delta \rho_j^i + \frac{\Delta \rho_1^i}{2} \right] \frac{\Delta x}{\rho_s^i}, \tag{15}$$

де  $\Delta \rho_j^i = \rho_j^i - \rho_j^{i-1}$ ;  $\Delta \rho_1^i = \rho_1^i - \rho_1^{i-1}$ ;  $\rho_s$  – відносна щільність на вільній межі;  $M$  – кількість вузлів, що знаходяться у середині пористого тіла.

Запропонована методика розрахунку була реалізована на ЕОМ.

Як приклад розрахунку процесу ущільнення порошкового матеріалу був проведений розрахунок гарячого ізостатичного пресування порошку жароміцного сплаву на нікелевій основі. Початкові та гранич-



