

**В.В. Карачун, д.т.н., проф.  
Н.А. Кубрак, аспір.**

*Національний технічний університет України "КПІ"*

**КОМП'ЮТЕРНИЙ РОЗРАХУНОК ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ЗА СИСТЕМОЮ N ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 1-ГО ПОРЯДКУ**

*Розглянуто комп'ютерний алгоритм розрахунку частотних характеристик об'єкта, що описується системою n звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку.*

Розв'язання багатьох технічних задач вимагає визначення частотних характеристик об'єкта, що досліджується [1, 2, 3]. Нехай, наприклад, математична модель об'єкта має вигляд системи n звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку [1]:

$$\frac{dy_z}{dt} = \sum_{s=1}^n A_{z,s} y_s + \sum_{s=1}^m B_{z,s} x_s, \quad 1 \leq z \leq n, \tag{1}$$

де  $y_s$  – виходи об'єкта ( $1 \leq z \leq n$ );  $x_s$  – входи ( $1 \leq s \leq m$ ) об'єкта, записані в приростах відносно їх значень в усталеному режимі, прийнятому за базовий.

Щоб перейти від моделі (1) до частотних характеристик необхідного каналу об'єкта звичайно спочатку отримують відповідну передавальну функцію, в якій проводять заміну  $p$  на  $jw$ , в результаті чого одержують амплітудно-фазову характеристику.

Як стадія отримання передавальної функції, так і подальший розрахунок частотних характеристик, як правило, передбачають використання комп'ютера. У той же час можна запропонувати прямий метод розрахунку частотних характеристик потрібного нам каналу безпосередньо з системи (1).

Розглянемо цей метод.

Прийнемо, що з усіх можливих входів ( $1 \leq s \leq m$ ) нульовий приріст отримує тільки один, а саме  $x_{N_x}$ . Виконаємо перетворення Лапласа над (4.30) за нульових початкових умов і поділимо всі члени отриманого рівняння на зображення за Лапласом від  $x_{N_x}$ . Отримуємо:

$$pW_{N_x,z}(p) = \sum_{s=1}^n A_{z,x} W_{N_x,s}(p) + B_{z,N_x}, \quad 1 \leq z \leq n, \tag{2}$$

де  $W_{N_x,s}(p)$  – передавальна функція каналу в об'єкті, що досліджується.

Замінюючи  $p$  на  $jw$ , де  $j$  – уявна одиниця ( $j^2 = -1$ ),  $w$  – кругова частота, переходимо до амплітудно-фазових характеристик.

Позначимо

$$W_{N_x,s}(p) \Big|_{p=jw} = W_{N_x,s}(jw) = R_{N_x,s}(w) + jI_{N_x,s}(w).$$

Далі для спрощення запису будемо позначати дійсно- і уявно-частотну характеристики як  $R_s$  і  $I_s$ . Тоді система (2) набуває вигляду:

$$jw(R_z + jI_z) = \sum_{s=1}^n A_{z,s}(R_s + jI_s) + B_{N_x,z}, \quad 1 \leq z \leq n. \tag{3}$$

Кожне з рівнянь системи (3) розпадається на два незалежних рівняння (для дійсних і уявних частин). Запишемо їх для z-го рівняння системи (3):

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n A_{z,s} R_s + wI_z = -B_{N_x,z}; \\ -wR_z + \sum_{s=1}^n A_{z,s} I_s = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В результаті отримуємо систему 2n рівнянь відносно 2n невідомих ( $R_s, I_s, 1 \leq s \leq n$ ). Розташуємо невідомі в такому порядку:  $R_1, R_2, \dots, R_n, I_1, I_2, \dots, I_n$ , і спочатку поставимо рівняння для дійсних частин, а вже потім – для уявних. Тоді розширена матриця Ms отриманої системи рівнянь набуває вигляду:

	1	2	3	...	N	n + 1	n + 2	n + 3	...	2n	2n + 1
1	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	...	$A_{1,n}$	w	0	0	...	0	$-B_{1,N_x}$



```

        Y := A[Z, i]/A[i, i];
        for S := i+1 to N+1 do A[Z, S] := A[Z, S]-Y*A[i, S]
        end
    end;
    inc(i)
end;
if R then if abs(A[N, N]) < Eps then R := false;
if R then
begin
    X[N] := A[N, N+1]/A[N, N];
    For i := N-1 downto 1 do
        begin
            Y := 0;
            For S := i+1 to N do
                Y := Y + A[i, S]*X[S]; X[i] := (A[i, N+1]-Y) / A[i, i]
            end
        end
    end;
    if R then X[-1] := N
    else X[-1] := 0
end;
end;

```

Описаний вище алгоритм обчислення частотних характеристик оформимо у вигляді підпрограми UrGod, яка буде користуватися глобальними масивами А, В, що містять коефіцієнти системи (1).

```

procedure UrGod;
var Z, S: integer;
    Ms: Matr;
    R: Coef;
begin
    for Z:=1 to n do
        begin
            for S:=1 to n do
                begin
                    Ms[Z, S] := A[Z, S]; Ms[Z+n, S+n] := A[Z, S];
                    if S=Z
                    then begin Ms[Z, S+n] := W; Ms[Z+n, S] := - W end
                    else begin Ms[Z, S+n] := 0; Ms[Z+n, S] := 0 end
                end;
                Ms[Z, 2n+1] := - B[Z, Nx]; Ms[Z+n, 2n+1] := 0
            end;
            Systur(2*n, Ms, R);
            X := R[Ny]; Y := R[Ny+n]
        end;
    end;

    Туг:
    type Coef=array [-1..30] of real;
        Matr=array[1..20, 1..21] of real;

```

При необхідності формувати на екрані комп'ютера зображення годографа амплітудно-фазової характеристики каналу, що розглядається, можна запропонувати процедури SZ, PointGod, Godo, розглянуті в [4].

Наведемо їх лістинги.

```

procedure SZ; {перетворює значення дійсно-частотної X та уявно-частотної Y характеристик для частоти w , що розглядається, в екранні координати S і Z відповідного пікселя годографа амплітудно-фазової характеристики}
begin
    UrGod; S:=X0+round(X/Dx); Z:=Y0- round(Y/Dy)
end;

```

Туг X0, Y0 – екранні координати пікселя, куди проектується початок координат комплексної площини; Dx, Dy – коефіцієнти масштабу вздовж дійсної (горизонтальної) та уявної (вертикальної) осей, тобто ціна одного пікселя по горизонталі та вертикалі.

```

procedure PointGod; { малює черговий піксель годографа амплітудно-фазової характеристики}
const Kw=1.2;

```

```

var Md, Mdx, Mdy, Sp, Zp:integer; Wp:real;
begin
  Sp:=S; Zp:=Z;
  repeat
    Wp:=W; W:=W+Dw; W1:=W; SZ; Mdx := abs (S-Sp); Mdy := abs (Z-Zp);
    if Mdx>Mdy then Md := Mdx
  else Md := Mdy;
    if Md<>1 then
      begin
        W:=Wp;
        if Md>1 then Dw := Dw/Md else Dw := Dw*Kw
      end
    until (Md=1) or (W1>Wk);
    if Md=1 then PutPixel (S, Z, 15)
  end;

```

Тут Kw – настроювальний параметр. Він коригує (у бік збільшення) крок Dw по частоті W, якщо попереднє значення кроку не здатне забезпечити перехід до чергового пікселя зображення годографа; Wk – верхня межа діапазону частот, що задається користувачем при формуванні годографа (теоретично частотні характеристики можна розглядати в діапазоні частот від 0 до ∞, але ∞ пропонувати комп’ютеру не можна).

```

Procedure Godo; {формує зображення годографа на екрані комп’ютера в заданій системі координат}
const Nw=50;
begin
  W:=Wn; Dw:=(Wk-Wn)/Nw; SZ; PutPixel (S, Z, 15);
  repeat
    PointGod
  until W1>Wk
end;

```

Тут Wn – початкове значення частоти (нижня межа діапазону частот); Nw – настроювальний параметр, він визначає початкове значення кроку Dw (надалі крок коригується процедурою PointGod).

Характерною рисою розглянутого алгоритму є те, що зображення годографа на екрані формується попикселно, тобто піксел за пікселем, чим гарантується, з одного боку, гранична акуратність, точність та неперервність зображення, з іншого боку, кожний піксел годографа зафарбовується тільки один раз. Остання обставина дозволяє реалізувати за необхідності інвертування кольору пікселів фону під годографом. А це зручно, коли доводиться «приміряти» годограф до зображення, що вже є на екрані.

Розглянутий алгоритм вже декілька років успішно експлуатується в навчальному процесі на кафедрі Автоматизації хімічних виробництв НТУУ “КПІ”.

### ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
2. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л.* Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.
3. *Карачун В.В., Дидковский В.С.* Методы расчета динамических систем. – К.: Будівельник, 1992. – 112 с.
4. *Карачун В.В., Кваско М.З., Кубрак Н.А.* Прикладний аналіз і візуалізація характеристик динамічних систем: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1999. – 157 с.

КАРАЧУН Володимир Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

– динаміка боргової апаратури носіїв.

КУБРАК Наталя Анатоліївна – аспірант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

– динаміка механічних систем носіїв.

