УДК 536.12

О.А. Гутніченко, аспір.

Житомирський інженерно-технологічний інститут

МОДЕЛЮВАННЯ ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПОЛІВ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНОЇ ПРОВІДНОСТІ ДВОКОМПОНЕНТНИХ ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМ

(Представлено д. т. н., професором Чернишом І. Г.)

Запропонована математична модель двофазних гетерогенних систем із періодичним або квазіперіодичним розміщенням провідних частинок по шарах для розрахунку потенціальних (теплових або електричних) полів, а також для визначення ефективних коефіцієнтів провідності системи провідник-ізолятор.

У літературі по вивченню провідних властивостей багатокомпонентних систем [4-11] існує велика кількість математичних моделей. У більшості авторів одиничний елемент системи, через яку проходить потік (струм або тепловий), розбивається на сектори, горизонтальними площинами – ізотермами та вертикальними – адіабатами, що дозволяє визначити провідні властивості та характеристики композиційних матеріалів за допомогою складення еквівалентної схеми електричних або теплових опорів. Але у такому випадку не враховується потік між частинками, що розміщуються поряд і мають різні провідні властивості. Окрім того, розбивання одиничного елемента горизонтальними ізотермічними площинами не враховує залежність повідних властивостей від координат (тобто проводиться осереднення потенціалу у горизонтальних шарах).

Метою даної роботи є моделювання та дослідження температурних полів у будь-яких горизонтальних площинах двофазної системи, компоненти якої мають різні коефіцієнти провідності, та впливу концентрації компонентів на зміну поля та ефективного коефіцієнта провідності. Причому будемо вважати лише, що верхня горизонтальна площина ($z=0$) ізотермічна, а бічні грані одиничного елемента адіабатичні (*рис. 1*).

Розіб'ємо одиничний елемент вертикальними та горизонтальними площинами на елементарні куби із розміром сторони z_0, таким, що він відображає характерний найменший розмір частинок компонент. Будемо вважати, що система складається із діелектричноє фази із провідністю λ_2 та провідної фази з провідністю λ_1, а також, що частинки провідної фази рівномірно (або майже рівномірно) розміщені у шарах системи паралельних площині XOY. Причому температура на поверхні $z=0$ дорівнює T_0.

За певний фіксований проміжок часу частинки діелектричної фази на координаті $z=z_0$ нагріються до температури $T_2<T_0$, а частинки провідної компоненти – до температури $T_1<T_0$, але із-за різниці у провідностях маємо, що $T_2<T_1$. Внаслідок чого відбувається перехід тепла від частинок провідної компоненти до найближчих частинок діелектрика, внаслідок чого температура останніх T_2^* буде вищою по відношенню до T_2. Отже, із сказаного вище, маємо, що температурне поле у шарі буде мати періодичний (квазіперіодичний) характер. Нехай температурне поле у шарі

описується функцією $\Phi(x, y, z)$, яка має наступний вигляд:

$$\Phi = A \cdot \theta + B\ , \tag{1}$$

де A та B – функції від провідностей компонент та координати z;

θ – функції від координат x та y.

Визначимо зміст коефіцієнтів $A(z, \lambda_2)$ та $B(z, \lambda_2)$ у рівнянні температурного поля (1). Коефіцієнт B характеризує зміну температури у діелектричній фазі у напрямі координати z. Із [1, 2] відомо, що зміну температури від координати через необмежену стінку можна описати лінійною функцією, що допускається для нашої постановки задачі. Отже запишемо B у наступному вигляді:

$$\begin{gathered} B_1 = T_0 - \frac{q}{\lambda_2} \cdot Z\ , \\ 0 \le Z \le Z_0 \end{gathered} \tag{2}$$

де q – теплова потужність, *Вт*.

Амплітуда у формулі (1), тобто коефіцієнт A, відображає різницю у температурі провідника та діелектрика у напрямі координати z. Отже, як видно із *рис.2*, значення амплітуди визначається за наступною формулою:

$$\begin{gathered} A = q \cdot Z \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \\ 0 \le Z \le Z_0 \end{gathered} \tag{2*}$$

Таким чином, потенціальне поле для i-го шару описується наступним рівнянням, що отримуємо після перетворення формул (1)-(2*):

$$\Phi_i = q \cdot Z_0 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \cdot \theta_i + \Phi_{i-1} - \frac{q \cdot Z_0}{\lambda_2}\ . \tag{3}$$

Отже як видно із (6) розподіл температури у будь-якому шарі залежить від координат, температурного поля попереднього шару, коефіцієнтів провідності та потужності теплового поля, являється складною неперіодичною функцією.

Враховуючи, що $\Phi_0 = T_0$ для останнього шару отримаємо наступний вираз:

$$\Phi_N = q \cdot Z_0 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \cdot \sum_{i=1}^{N} \theta_i - \frac{N \cdot q \cdot Z_0}{\lambda_2} + T_0\ . \tag{4}$$

Щоб отримати хаотичну структуру композиційної системи, кожне наступне рівняння (для шару одиничного елемента) повинне бути зсунуте по фазі на деяку випадкову величину відносно попереднього. Отже для кожного рівняння, що описує розподіл температури у шарі, функція $\theta(x, y)$ буде різною. Слід також сказати, що максимуми температурного поля відповідають частинкам провідної компоненти у шарі, а основа максимума може мати площу більшу ніж площа однієї частинки.

Зробимо наступне позначення:

$$\vartheta_л = \sum_{j=1}^{k} \theta_j\ ,$$

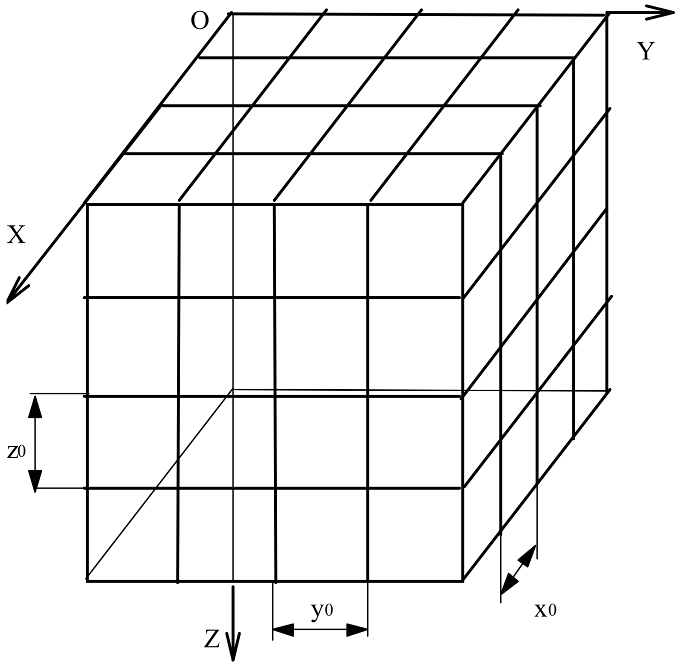

Рис. 1 Одиничний елемент двокомпонентної системи

Тоді для всієї системи, тобто $к=N$, враховуючи, що кількість усіх шарів $N=1/z_0$, перепишемо (4) у наступному вигляді:

$$\Phi_N = \frac{q \cdot Z_0}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) \cdot \vartheta_N - \frac{q}{\lambda_2} + T_0 \,. \tag{5}$$

Визначимо зміст функції υ_N. Як видно із постановки задачі, температурне поле буде вирівнюватися із кожним наступним шаром, що залежить від вірогідності знаходження у даному шарі частинки провідної компоненти, тобто концентрації, та від розмірів основи максимума температурного поля навколо частинки провідника, що дозволяє розглядати середнє значення величини υ_N, як вірогідність перетину основ опуклостей у сусідніх шарах системи.

Визначимо вищезгадану вірогідність. Середнє значення періоду (у випадку квазіперіодичної функції) або період (у випадку періодичної) функції θ_i визначається за наступною формулою:

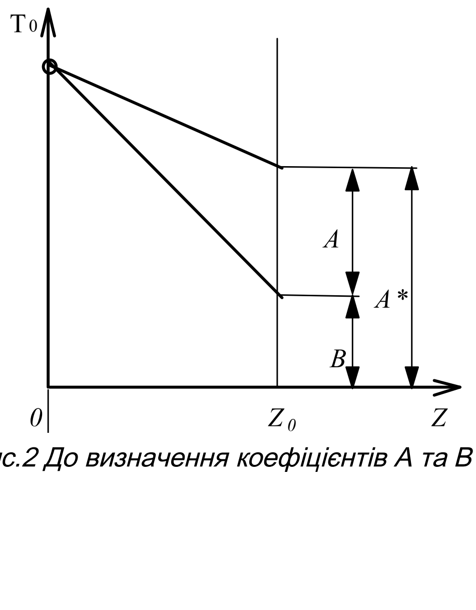

Рис.2 До визначення коефіцієнтів А та В

$$l = \frac{Z_0}{\sqrt{m_1} - Z_0}, \tag{6}$$

розмір основи опуклості l_1 задаємо наступною формулою

$$l_1 = k \cdot Z_0, \tag{7}$$

враховуючи, що l_1 величина постійна до певного значення концентрації m*, коли $l_1 = l$. Якщо ж $m > m^*$, то l_1 змінюється за наступним законом:

$$l_1 = \frac{Z_0}{\sqrt{m}}.$$

Таким чином величину к можна описати рівнянням

$$k = \begin{cases} 0, & m_1 = 0 \\ const, & 0 < m < m^* \\ \dfrac{1}{\sqrt{m_1}}, & m^* < m \le 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Вірогідність перетину основ максимумів у напрямах вісей x та y позначимо як p_x та p_y. Зміщення випадкові та незалежні, тому повна вірогідність рівна $p=p_x p_y$. Отже отримаємо

$$\begin{gathered} p_x = p_y = 1 - \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 \\ p = \left\{1 - \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2\right\}^2 \end{gathered}. \tag{9}$$

Визначимо середнє значення температурного поля із врахуванням (5).

$$\begin{gathered} \overline{\Phi} = \frac{q \cdot Z_0}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \overline{\vartheta} - \frac{q}{\lambda_2} + T_0 \\ \overline{\vartheta} = \iint\limits_S \vartheta \cdot dxdy \end{gathered} \tag{10}$$

Визначимо вигляд функції θ. Нехай на періоді функція має вигляд як показано на *рис. 3*. Продовжимо її парним чином так, що її можна описати за допомогою ряда Фур'є:

$$\theta_x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot cos\left(\frac{2 \cdot \mu_n}{l} \cdot x\right). \tag{11}$$

У (11) вважаємо, що функцію θ можна представити у вигляді добутку двох складових θ_x та θ_y.

Знайдемо невідомі коефіцієнти ряда (11).

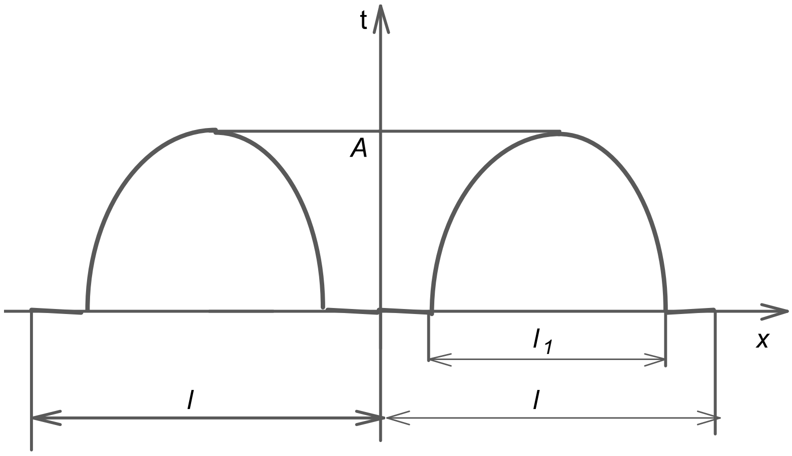

Рис. 3 До визначення функції θ_x

$$a_0=\frac{2}{l}\cdot\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\theta_x\cdot dx=2\cdot p_x$$

$$a_n=\frac{2}{l}\cdot\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\theta_x\cdot cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)dx= \tag{12}$$

розвяжемо другий інтеграл методом розподілу змінних, маємо

$$\left|\begin{matrix} u=cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right) & dV=\theta_x\cdot dx \\ du=-\frac{l}{2\cdot\mu_n}\cdot sin\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)\cdot dx & V=\int\theta_x\cdot dx\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\left[cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)\cdot\int\theta_x\cdot dx\Big|_{-l/2}^{l/2}+\frac{l}{2\cdot\mu_n}\cdot\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left[\int\theta_x\cdot dx\cdot sin\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)\right]dx\right].$$

$$cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)\cdot\int\theta_x dx\Big|_{-l/2}^{l/2}=cos(\mu_n)\cdot\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\theta_x dx=cos(\mu_n)\cdot l\cdot p_x$$

Розглянемо другий інтеграл:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left[\int\theta_x dx\cdot sin\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)\right]dx=$$

$$\left|\begin{matrix} & \theta_x dx \quad dV=sin\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}x\right)dx \\ u=\int & \\ & du=\theta_x dx \quad V=-\frac{l}{2\mu_n}\cdot cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\right)\end{matrix}\right|$$

$$=-\frac{l}{2\cdot\mu_n}cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)\int\theta_x dx\Big|_{-l/2}^{l/2}+\frac{l}{2\cdot\mu_n}\cdot\int\theta_x\cdot cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}x\right)dx$$

Отже отримали, що

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \theta_x \cdot cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)dx = \frac{l\cdot p_x \cdot cos(\mu_n)\cdot\left[1-\frac{l^3}{4\cdot\mu_n^2}\right]}{1-\frac{l^2}{4\cdot\mu_n^2}}.$$

$$a_n = \frac{2\cdot p_x \cdot cos(\mu_n)\cdot\left[1-\frac{l^3}{4\cdot\mu_n^2}\right]}{1-\frac{l^2}{4\cdot\mu_n^2}} \tag{13}$$

Таким чином, рівняння (11) перепишемо у наступному вигляді:

$$\theta_x = p_x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot p_x \cdot cos\,\mu_n \cdot\left[1-\frac{l^3}{4\cdot\mu_n^2}\right]}{1-\frac{l^2}{4\cdot\mu_n^2}}\cdot cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right). \tag{14}$$

Знайдемо середнє значення функції θ_x.

$$p_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\theta_x dx = p_x + \frac{1}{l}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot p_x\cdot cos\,\mu_n\cdot\left(1-l^3\big/\left(4\cdot\mu_n^2\right)\right)}{\left[1-l^2\big/\left(4\cdot\mu_n^2\right)\right]}\cdot\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}cos\left(\frac{2\cdot\mu_n}{l}\cdot x\right)dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot p_x\cdot l\cdot cos\,\mu_n\cdot\left(1-l^3\big/\left(4\cdot\mu_n^2\right)\right)\cdot sin\,\mu_n}{\left[1-l^2\big/\left(4\cdot\mu_n^2\right)\right]\cdot\mu_n} = 0 \tag{15}$$

Визначимо значення переметра μ_n.

$$\frac{2\cdot p_x\cdot l\cdot\left[1-\frac{l^3}{4\cdot\mu_n^2}\right]}{\left[1-\frac{l^2}{4\cdot\mu_n^2}\right]} = 0 \qquad cos\,\mu_n = 0 \qquad sin\,\mu_n = 0 \tag{16}$$

$$\mu_{n1} = \frac{l\cdot\sqrt{l}}{2} \qquad \mu_{n2} = \frac{\pi}{2}+\pi\cdot n \qquad \mu_{n3} = \pi\cdot n$$

Таким чином, ми обчислили всі коефіцієнти ряда (11) для функції θ_x, причому дану функцію вважали періодичною. Функція θ_y маєтакий же вигляд, лише потрібно замінити змінну x змінною y. Отже кінцева формула поля в одному i-му шарі, із врахуванням випадкового змішення у площині xOy. має вигляд:

$$\theta = \left[p_x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot p_x\cdot cos\,\mu_n\cdot\left[1-\frac{l^3}{4\cdot\mu_n^2}\right]}{1-\frac{l^2}{4\cdot\mu_n^2}}\cdot cos\left(\frac{2\mu_n}{l}x+\Delta_{xi}\right)\right]\times$$

$$\times\left[p_y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot p_y\cdot cos\,\mu_n\cdot\left[1-\frac{l^3}{4\cdot\mu_n^2}\right]}{1-\frac{l^2}{4\cdot\mu_n^2}}\cdot cos\left(\frac{2\mu_n}{l}y+\Delta_{yi}\right)\right] \tag{17}$$

Визначимо коефіцієнт провідності. Із [1, 2] відомо, що коефіцієнт провідності визначається за наступною формулою:

$$\lambda = -\frac{q}{\left|grad\,\Phi\right|}\,. \tag{18}$$

Ефективний коефіцієнт провідності системи будемо визначати за допомогою формул (5-10), враховуючи, що

$$p = \int_0^1 \int_0^1 \theta\,dxdy\,, \tag{19}$$

отже отримуємо

$$\lambda_{еф} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 - \left[\lambda_1 - \lambda_2\right] \cdot p}\,. \tag{20}$$

Розрахунки ефективного коефіцієнта провідності, що визначається формулою (20), у залежності від концентрації провідної фази, приведені на *рис. 4*.

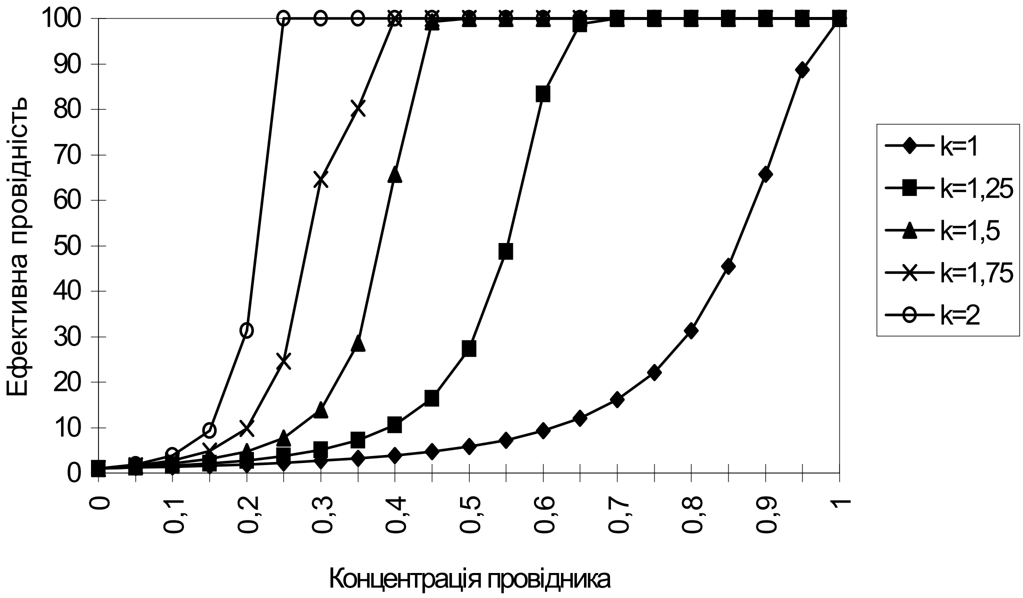

Рис.4 Залежність ефективної провідності системи від концентрації провідної фази в залежності від параметра ***к***

У загальному випадку можна використовувати будь-яку функцію розподілу частинок провідника у шарі композиційної системи. Взагалі для визначення температурного поля у шарі навколо частинки провідника потрібно розвязати диференційне рівняння з частинними похідними другого порядку, як мінімум у двох координатних напрямках, типу

$$\nabla^2 T = 0\,.$$

Окрім того, визначалося температурне поле у стаціонарному стані, тобто не залежне від часу, що значно спрощує розрахунки. Також вважалось, що коефіцієнти провідності не залежать від температури, тобто постійні. У випадку лінійної залежності коефіцієнтів провідності від температури, зміна температури у вертикальному напрямі буде відбуватися по наступному закону

$$t = \frac{1}{b}\sqrt{D} - \frac{1}{b}$$
$$D = 1 - 2 \cdot b \cdot \left(\frac{q}{\lambda_0} \cdot Z - T_0 \cdot \left[1 + \frac{b}{2} \cdot T_0 \right] \right),$$

де T_0 – початкова температура;

b – кутовий коефіцієнт залежності провідності від температури;

z – координата.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача. Учебник для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: «Энергия», 1975
2. *Юдаев Б. Н.* Теплопередача: Учебник для вузов.- 2е изд. перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1981.
3. *Беляев Н. М.* Основы теплопередачи: Учебник.- К.: Выща школа. Головное изд-во, 1989.
4. *Эфрос А.Л.* Физика и геометрия беспорядка.-М.: Наука, 1982.-175 с.
5. *Заричняк Ю.П., Орданян С.С.,, Соколов А.Н., Степаненко Е.К.* Взвимосвязь электропроводности спечённых композиций и дисперсности исходных компонентов. // Порошковая металлургия. – 1986.-№6.
6. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Теория протекания и проводимость сильно неоднородных сред. // УФН.-1975.-117, вып. 3.
7. *Заричняк Ю.П., Новиков В.В.* Эфективная проводимость гетерогенных систем с хаотической структурой. // ИФЖ.--1978.-34, №4.
8. *Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П.* Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: «Энергия», 1974.
9. *Киркпатрик С.* Перколяция и проводимость.- В кн.: Теория и свойства неупорядоченых материалов. / Под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. М.: Мир, 1977.
10. *Скан А.С., Шкловский Б.И.* Топология бесконечного кластера в теории протекания и теории прыжковой проводимости. //ФТП.-1974, т. 8.
11. *Дульнев Г.Н., Кругликов В.К., Сахова Е.В.* Математическое моделирование гетерогенных изотропных систем. // ИФЖ, 1981, т.41, №5.
12. *Тареев Б.М.* Физика диэлектрических материалов: Учеб. пособие для вузов.- М.: Энергоиздат, 1982.
13. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности: Учеб. пособие для вузов.- М.: Высш. школа, 1978.

ГУТНІЧЕНКО Олександр Анатолійович – аспірант кафедри технології машинобудування та конструювання технічних систем.

Наукові інтереси:

– перколяційні процеси;

– моделювання гетерогенних композиційних матеріалів.

Подано 14.09.2000

Гутніченко О.А. Моделювання потенціальних полів та визначення ефективної провідності двокомпонентних гетерогенних систем

Гутниченко А.А. Моделирование потенциальных полей и определение еффективной проводимости двух компонентных гетерогенных систем.

Gutnichenko A.A. The simulating of potential fields and determination of effective conductivity of two-components heterogeneous systems.

УДК 536.12

Моделирование потенциальных полей и определение еффективной проводимости двух компонентных гетерогенных систем / А.А. Гутниченко

Предложенна математическая модель двухфазных гетерогенных систем с переодическим или квазипериодическим распределением проводящих частичек в слоях, а также для определения еффективных коэффициентов проводимости системы проводник-изолятор.

УДК 536.12

The simulating of potential fields and determination of effective conductivity of two-components heterogeneous systems / A.A. Gutnichenko

The mathematical model of two – phases heterogeneous systems was offered with periodical or nearly periodical distribution of conductivity components into layers and for determination of effective conductivity of system conductor – insulator.