УДК 517.97

П.І. Когут, д.ф.-м.н., проф.
Дніпропетровський державний технічний університет залізничного транспорту
П.М. Повідайко, к.т.н., доц.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В КЛАСІ СОЛЕНОЇДАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розглядається проблема існування розв'язків в задачі оптимального керування для лінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі за умови, що функціями керувань виступають коефіцієти в головній частині диференційного оператора. Показано, що така задача має оптимальні розв'язки в класі соленоїдальних функцій.

Нехай Ω – відкрита обмежена множина в R^N з локально ліпшіцевою границею Γ розмірності $n-1$, до того ж Ω розташована локально по одну сторону від Γ. Нехай ξ_1, ξ_2 – задані функції з простору $L^\infty(\Omega)$ такі, що

$$0 \le \beta \le \xi_1(x) \le \xi_2(x) \text{ майже всюди в } \Omega. \tag{1}$$

Покладемо

$$U_\partial = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) \mid \xi_1(x) \le u(x) \le \xi_2(x) \right\} \text{ майже всюди в } \Omega. \tag{2}$$

Для довільної функції $u \in U_\partial$ визначимо еліптичний оператор A другого порядку за правилом

$$A(u)\psi \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{ij}(x) u(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) + a_0(x)\psi, \tag{3}$$

де коефіцієнти a_{ij}, a_0 відповідають таким умовам:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i,j}, a_0 \in L^\infty(\Omega); & \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j \ge \alpha\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_n^2\right), & \\ \alpha \ge 0, \forall \zeta \in R^n & \text{майже всюди в } \Omega; \\ a_0(x) \ge \alpha \ge 0 & \text{майже всюди в } \Omega. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Розглянемо задачу оптимального керування:

$$I(u,y) = \int_\Omega [y - z_\partial]^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \to \inf; \tag{5}$$

$$A(u)y = f, \quad y \mid \Gamma = 0; \tag{6}$$

$$u \in U_0, \tag{7}$$

де $f \in L^2(\Omega)$; z_∂ – задані функції.

Як відомо, питання про існування оптимального розв'язку такої задачі залишається відкритим [1, 2]. Основна причина цього полягає в наступному. Нехай $\{(u_n, y_n)\}_{n\in N}$ – мінімізуюча послідовність для (5)–(7). Тоді, згідно з [1], кожному допустимому керуванню $u_N \in U_\partial$ відповідає єдиний розв'язок задачі Діріхле (6). В силу коерцитивності функціонала (5) легко встановити існування пари (u, y) такої, що $y_n \to y$ слабко в $H_0^1(\Omega)$, а $u_n \to u$ *-слабко в $L^\infty(\Omega)$. Проте цього не досить для того, щоб перейти до границі у виразі

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) u_n(x) \frac{\partial y_n(x)}{\partial x_j} \right).$$

Отже, в загальному випадку, умова $A(u_n)y_n \to A(u)y$ може не виконуватися, тобто може не існувати такого керування $\omega \in U_\partial$, для якого $y(\omega) = y$.

Як зазначено в [1], для того, щоб обійти цю проблему, можливі такі підходи до розв'язання поставленої задачі:

(1) збурити оператор A більш регулярним оператором [1];

(2) регуляризувати клас допустимих керувань.

Перш за все, покажемо, що регуляризація оператора A за схемою Ліонса не призводить до бажаного результату. Нехай $b(\varphi,\psi)-$ неперервна білінійна форма на $H_0^2(\Omega)$ така, що

$$b(\varphi,\psi) \ge \gamma\|\psi\|^2_{H0_2(\Omega)}, \quad \gamma \succ 0, \forall \psi \in H_0^2(\Omega), \tag{8}$$

а $B \in L\left(H_0^2(\Omega); H^{-2}(\Omega)\right)$ – відповідний їй оператор. Якщо, наприклад, $b(\varphi,\psi) = \int\limits_\Omega \Delta\phi\Delta\psi dx$, то легко показати, що така форма задовольняє вимогам (8) і $B = \Delta^2$.

За аналогією з [1], збуримо оператор A таким чином: $\varepsilon By + A(u)y$, де $\varepsilon > 0$ – "малий" параметр. Тоді вихідна задача оптимального керування набуде вигляду:

$$I_\varepsilon(u,y) = \int\limits_\Omega [y - z_\partial]^2 dx + \int\limits_\Omega u^2 dx \to \inf; \tag{9}$$

$$\varepsilon By + A(u)y = f; \qquad y \mid \Gamma = 0, \ \frac{\partial y}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0; \tag{10}$$

$$u \in U_\partial. \tag{11}$$

Зауважимо, що при кожному значенні $\varepsilon > 0$ та $u \in U_\partial$ крайова задача (10) допускає єдиний розв'язок $y_\varepsilon(u)$ в класі $H_0^2(\Omega)$, і, до того ж, мають місце наступні результати [1].

Теорема 1. Для фіксованого $u \in U_\partial$

$$y_\varepsilon(u) \to y(u) \text{ в } H_0^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{12}$$

де $y(u)$ – розв'язок незбуреної задачі (6).

Теорема 2. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ існує оптимальна пара в задачі (9)–(11), тобто такі елементи $u_\varepsilon^0 \in U_\partial$ та $y_\varepsilon^0 = y_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \in H_0^2(\Omega)$, що

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \le I_\varepsilon(u,y) \quad \forall (u,y) \in \Xi_\varepsilon, \tag{13}$$

де $\Xi_\varepsilon \subseteq L^\infty(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ – множина допустимих пар задачі (9)–(11).

Проте, як випливає з теореми 2, $\limsup_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon \le I$, і, отже, не ясно, чи буде мати місце збіжність найменших значень функціоналів якості $\inf I_\varepsilon \to \inf I$. Покажемо, що в загальному випадку такої збіжності може не існувати. Для того, щоб встановити цей факт, скористаємося концепцією варіаційної збіжності [3]. З цією метою перепишемо сингулярно збурену задачу оптимального керування (9)–(11) у вигляді задачі умовної мінімізації:

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,y) \right\rangle, \tag{14}$$

де $I_\varepsilon : \Xi_\varepsilon \to \overline{R}$ – функціонал, який означено в (9);

$$\Xi_\varepsilon = \left\{ (u,y) \in L^\infty(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon By + A(u)y = f \\ y \mid \Gamma = 0, \dfrac{\partial y}{\partial n}|\Gamma = 0 \\ u \in U_\partial \end{array} \right\}.$$

Позначимо через τ топологію на $L^\infty(\Omega) \times H_{10}(\Omega)$ як добуток $*$-слабкої топології в $L^\infty(\Omega)$ та слабкої топології в $H_0^1(\Omega)$. Таким чином, граничний перехід в (9)–(11) можна розглядати як пошук абсолютної варіаційної границі в τ-топології для такої послідовності задач:

$$\left\{ \left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,y) \right\rangle, \varepsilon \to 0 \right\}. \tag{15}$$

Як випливає з теореми 1, для сукупності множин допустимих пар $\{\Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$ існує непорожня нижня топологічна границя, за Куратовським, $\tau - Li\Xi_\varepsilon$ [4]. Отже, приймаючи до уваги рівномірну τ-коерцитивність функціонала якості (9) та результати роботи [3], робимо висновок: із сукупності задач умовної мінімізації (15) можна вилучити підпослідовність, яка S-збігається до

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\tau - Lm\Xi_\varepsilon} \tau - lm_s I_\varepsilon(u,y) \right\rangle. \tag{16}$$

Задачу (16) називають абсолютною варіаційною S-границею для (15).

Перейдемо до ідентифікації множини допустимих пар $\tau - Lm\Xi_\varepsilon$ та функціонала $\tau - lm_s I_\varepsilon : \tau - Lm\Xi_\varepsilon \to \overline{R}$.

Теорема 3. При виконанні вихідних припущень для функціонала $\tau - lm_s I_\varepsilon : \tau - Lm\Xi_\varepsilon \to \overline{R}$ буде справедливим подання:

$$\tau - lm_s I_\varepsilon(u,y) = \int_\Omega [y - z_\partial]^2 dx + \int_\Omega u^2 dx. \tag{17}$$

Доведення. Нехай (u,y) – довільна пара з множини $\tau - Lm\Xi_\varepsilon$, а $\{(u_k, y_k)\}_{k\to\infty}$ – довільна τ-збіжна до (u,y) послідовність, для якої знайдуться $\varepsilon_k \to 0$ такі, що: $(u_k y_k) \in \Xi_{\varepsilon_k}$. Тоді, приймаючи до уваги компактність вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ та напівнеперервність норми $\|\cdot\|$ відносно $*$-слабкої збіжності в $L^\infty(\Omega)$, одержимо:

$$\int_\Omega [y - z_\partial]^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega [y_k - z_\partial]^2 dx + \int_\Omega u_k^2 dx. \tag{18}$$

Для доведення оберненого співвідношення розглянемо довільну пару $(u,y) \in \tau - Lm\Xi_\varepsilon$ та побудуємо послідовність $\{(u_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)\}_{\varepsilon\to 0}$ за правилом: $u_\varepsilon^* \equiv u$, y_ε^* – розв'язок сингулярно збуреної задачі (10). Оскільки, за теоремою 1, $y_\varepsilon^* \to y^*$ сильно в $H_0^1(\Omega)$, то $(u_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*) \to (u, y^*)$ в τ-топології, тобто $(u, y^*) = (u,y) \in \tau - Lm\Xi_\varepsilon$. Таким чином,

$$\int_\Omega [y - z_\partial]^2 dx + \int_\Omega u^2 dx = \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega [y_\varepsilon^* - z_\partial]^2 dx + \int_\Omega (u_\varepsilon^*)^2 dx. \tag{19}$$

Отже, згідно з результатами роботи [3], виконання умов (18)–(19) гарантує рівність (17), що і потрібно було встановити.

Теорема 4. При виконанні вихідних припущень для множини допустимих пар $\tau - Lm\Xi_\varepsilon$ буде справедливим таке включення:

$$\tau - Lm\Xi_\varepsilon \supseteq \left\{ (u,y) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \middle| \begin{array}{l} A(u)y = f, y \mid \Gamma = 0 \\ u \in U_\partial \end{array} \right\}. \tag{20}$$

Доведення. Нехай (u^*, y^*) – довільна пара з множини

$$\left\{ (u,y) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \middle| \begin{array}{l} A(u)y = f, y \mid \Gamma = 0 \\ u \in U_\partial \end{array} \right\}.$$

За аналогією зі схемою доведення попередньої теореми, побудуємо послідовність $\{(u_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)\}_{\varepsilon\to 0}$ за правилом: $u_\varepsilon^* \equiv u$, y_ε^{**} – розв'язки сингулярно збуреної задачі (10). Тоді при всіх $\varepsilon \succ 0$ мають місце очевидні включення $(u_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*) \in \Xi_\varepsilon$. З іншої сторони, за теоремою 1, $y_\varepsilon^* \to y^{**}$ сильно в $H_0^1(\Omega)$, де $y^\times$ – розв'язок вихідної задачі (6) при $u = u^*$. Тому $y_\varepsilon^* = y^{**}$. Таким чином, $\Xi_\varepsilon \ni (u_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*) \to (u^*, y^*)$ в τ-топології, а це означає, що $(u^*, y^*) \in \tau - Lm\Xi_\varepsilon$ [5]. Отже, в силу довільності вибору пари (u^*, y^*), включення (20) встановлено.

Зауважимо, що існуючі контрприклади щодо неіснування оптимального розв'язку для вихідної задачі (5)–(7), які наведено в роботі [2], дають підстави стверджувати, що в загальному випадку включення (20) може бути строгим. Отже, для "регуляризованої" задачі (9)–(11) буде виконуватися нерівність $\limsup_{\varepsilon\to 0} \inf I_\varepsilon \prec \inf I$. Таким чином, підхід, який грунтується на сингулярному збуренні системи (6) більш регулярним оператором, не розв'язує проблему існування оптимальних розв'язків в задачі (5)–(7). Тому дана робота має за мету дати відповідь на поставлене питання через регуляризацію класу допустимих керувань, а саме – перейти до соленоїдальних керувань в $L^2(\Omega)$.

Для цього введемо такі позначення:

$$v_i(x) = a_{ij}(x)u(x) \quad \forall_i = 1, 2, \ldots, n$$

і будемо вважати, що матриця $\left[a_{ij}(x)\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ має діагональну форму, тобто $a_{ij} = 0$ якщо $i \neq j$. Тоді, згідно з вихідними припущеннями, буде справедливим включення $v \in (L^\infty(\Omega))^n$. Для будь-якого вектора $v \in (L^\infty(\Omega))^n$ позначимо його дивергенцію як елемент простору $H^{-1}(\Omega)$ за правилом:

$$\langle div\, v, \phi \rangle = -\int_\Omega (v, \Delta\phi)_{R^n}\, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Як відомо [6], вектор v називають соленоїдальним, якщо $div v = 0$. Введемо до розгляду простір соленоїдальних керувань:

$$V = \left\{ v \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^n \middle| \; div v = 0 \right\}.$$

Лема 1. Для будь-яких $c_i > 0$ та $i = 1, 2, \ldots, n$ множина

$$M = \left\{ v \in V \;\middle|\; \|v_I\|_{L^\infty} \le c_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

секвенційно компактна в $*$-слабкій топології простору $(L^\infty(\Omega))$.

Доведення. Відомо, що всяка куля $B_i = \left\{\|v_i\|_{L^\infty} \le c_i\right.$ в $L^\infty(\Omega)$ секвенційно $*$-слабко компактна, тобто із будь-якої послідовності $\{v_{in}\}_{n \in N} \subset B_i$ можна вилучити підпослідовність $\left\{v_{in_k}\right\}_{k \in N}$ таку, що

$$\int_\Omega v_{in_k} \phi_i\, dx \to \int_\Omega v_{i0} \phi_i\, dx \quad \forall \phi_i \in L^1(\Omega), \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

і при цьому $\|v_{i0}\|_{L^\infty} \le c_i$. Отже, в векторному запису отримаємо:

$$\int_\Omega (v_{n_k} \phi)_{R^n}\, dx \to \int_\Omega (v_0 \phi)_{R^n}\, dx \quad \forall \phi \in (L^1(\Omega))^n. \tag{21}$$

Проте співвідношення (21) є істинним для всіх $\phi \in (L^1(\Omega))^n$, тому воно буде також виконуватися і для векторів $\forall \phi \in (L^1(\Omega))^n$ таких, що $\phi = \Delta p$, де $p \in H_0^1(\Omega)$. А оскільки $v_{n_k} \in V$, то

$$\int_\Omega \left(v_{n_k}, \Delta p\right)_{R^n} dx = -\left\langle div\; v_{n_k}, p \right\rangle = 0 \quad \forall k \in N.$$

Отже, згідно з (21),

$$\int_\Omega \left(v_0, \Delta p\right)_{R^n} dx = 0.$$

Таким чином, в силу умов $\|v_{i0}\|_{L^\infty} \le c_I$, $i = 1, 2, \ldots, n$, включення $v_0 \in M$ встановлено. Приймаючи до уваги наведений факт, розглянемо задачу оптимального керування:

$$I(u, y) = \int_\Omega \left[y - z_\partial\right]^2 dx + i = 1\sum^n \int_\Omega v_i^2\, dx \to \inf, \tag{22}$$

$$A(v) y = f, \;\; y|\Gamma = 0; \tag{23}$$

$$v \in V_\partial = \left\{ v \in V \;|\xi_{i1}(x) \le v_i(x) \le \xi_{i2}(x) \right. \text{ майже всюди в } \Omega, \quad i = \overline{1, n}, \tag{24}$$

де $\quad A(v)\varphi \equiv -\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + a_0(x)\varphi$; $f \in L^2(\Omega)$; z_∂ – задані функції.

Суттєвою відмінністю цієї задачі від вихідної (5)–(7) є належність допустимих керувань до класу більш регулярних функцій, а саме – класу соленоїдальних керувань. Покажемо, що наведена задача (22)–(24) є розв'язною, тобто існує хоча б одна пара функцій $\left(v^0, y^o\right) \in V_\partial \times H_0^1(\Omega)$ така, що

$$I\left(v^0, y^0\right) \le I(v, y) \quad \forall (v, y) \in \Xi .$$

Тут через Ξ позначено множину допустимих пар в задачі (22)–(24), тобто

$$\Xi = \left\{ (v, y) \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^n \times H_0^1(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} A(v)y = f, \quad y|\Gamma = 0 \\ v \in V_Д \end{array} \right\}.$$

Нехай $\{(v_k, y_k) \in \Xi\}_{k\in N}$ – мінімізуюча послідовність для (22)–(24), тобто $I(v_K y_k) \to \inf\limits_{(v,y)\in\Xi} I(v, y)$.

Ясно, що y_n є розв'язком крайової задачі (23) при $v = v_k$.

Із властивості коерцитивності вихідного еліптичного оператора $A: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ випливає, що [1]

$$\|y_k\|_{H_0^1(\Omega)} \le const .$$

Тому, в силу обмеженості множини допустимих керувань V_∂, можна вибрати таку послідовність (яку знову ж позначимо через $\{(v_k, y_k) \in \Xi\}_{k\in N}$), що:

$$y_k \to y_0 \text{ слабко в } H_0^1(\Omega);$$

$$v_K \to v^0 \;\; *\text{-слабко в } \left(L^\infty(\Omega)\right)^n .$$

Проте, згідно з лемою 1, множина допустимих керувань V_∂ $*$-слабко компактна, отже має місце включення $v^0 \in V_\partial$. Таким чином, для того, щоб встановити оптимальність знайденої пари $\left(v^0, y^0\right)$, потрібно показати, що функція y^0 є розв'язком задачі Діріхле (23) при $v = v^0$. Встановлення цього факту підтвердимо відомим результатом [6].

Теорема 5. (Соленоїдально-компенсована компактність)

Нехай $p_k \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$, $u_k \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^n$ при всіх значеннях $k \in N$ та

$$p_k \to p \text{ слабко в } (L^2(\Omega))^n ,$$

$$u_K \to u \;\; *\text{-слабко в } \left(L^\infty(\Omega)\right)^n .$$

Якщо $rot\ p_k = 0, div\ u_k \to 0$ слабко в $H^{-1}(\Omega)$, то $(u_k, p_k)_{R^n} \to (u, p)_{R^n}$ в $*$-слабкій топології $L^1(\Omega)$.

Тут через $rot\ p$ позначено кососиметричну матрицю, компоненти якої є функціями з $H^{-1}(\Omega)$, що визначаються за правилом:

$$\langle rot\ p, \phi \rangle = -\int_\Omega \left(p_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - p_J \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Повертаючись до проблеми розв'язності задачі оптимального керування (22)–(24), зауважимо, що при кожному значенні $k \in N$ функції v_K та y_k пов'язані співвідношенням

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_{ik}(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) + a_0(x) y_k = f, \quad y_k|\Gamma = 0 . \tag{25}$$

Отже, граничний перехід в (25) є нетривіальним через наявність добутку двох слабко збіжних послідовностей. Проте для вектора $p_k = \Delta y_k \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ виконується очевидна умова $rot\ p_k = 0$, а функції v_k, згідно з включенням $v_k \in V_\partial$, задовольняють умові $div\ u_k = 0$. Крім того, маємо:

$$p_k \to \Delta y^0 \text{ слабко в } (L^2(\Omega))^n ,$$

$$u_K \to v^0 \;\; *\text{-слабко в } \left(L^\infty(\Omega)\right)^n .$$

Тому, згідно з теоремою 5, граничний перехід у співвідношенні (25) дає таку тожність:

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu_i^0(x)\frac{\partial y^0}{\partial x_i}\right)+a_0(x)y^0=f,\quad y^0|\Gamma=0\,.$$

Таким чином, пара $(\nu^0,\, y^0)$ є оптимальною в задачі (22)–(24), що і потрібно було встановити.

Отже, перехід до класу соленоїдальних керувань дозволяє розв'язати проблему існування оптимальних розв'язків в тих задачах, в яких функції керувань входять до головної частини диференційного оператора як коефіцієнти.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами 11, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
2. *Райтум У.* Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 277 с.
3. *Когут П.И.* S-сходимость в теории усреднения задач оптимального управления // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 47. – № 6. – С. 1488–1498.
4. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
5. *Dal Maso G.* Introduction to Г-convergence. – Boston: Birkhauser, 1993. – 337 p.
6. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.

КОГУТ Петро Ілліч – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри комп'ютерних інформаційних технологій Дніпропетровського державного технічного університету залізничного транспорту.

Наукові інтереси:

– варіаційне числення та теорія оптимального керування.

ПОВІДАЙКО Петро Михайлович – кандидат технічних наук, професор кафедри автоматизованого управління в технічних системах Житомирського інженерно-технологічного інституту, декан факультету інформаційно-комп'ютерних технологій.

Наукові інтереси:

– проектування систем оптимального керування.

Подано 13.09.2000