УДК 621.396.69

І.П. Атаманюк, к.т.н., доц.
Інститут підприємництва та сучасних технологій, м. Житомир

ПОЛІНОМІАЛЬНИЙ КАНОНІЧНИЙ РОЗКЛАД СКАЛЯРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ЗМІНИ ПАРАМЕТРІВ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ

На базі апарата лінійного канонічного розкладу векторної поліноміальної випадкової послідовності отримано нелінійний розклад скалярного випадкового процесу зміни параметрів радіоелектронних пристроїв у дискретному ряді точок.

Канонічний розклад випадкових процесів є універсальним засобом для розв'язання багатьох прикладних задач радіотехніки, таких як: фільтрація та екстраполяція значень параметрів радіоелектронних пристроїв, виявлення відказів, прогнозуючий контроль надійності тощо. Для деякого випадкового процесу $X(t)$, що описує зміну станів досліджуємого пристрою та є повністю заданим у дискретному ряді точок t_i, $i=\overline{1,I}$ моментними функціями $M[X^{\nu}(i)X^{\mu}(j)]$, $i,j=\overline{1,I}$, $\nu,\ \mu=\overline{1,N-1}$, $\nu+\mu\le N$ може бути побудовано лінійний канонічний розклад [1, 2]:

$$X(i)=M[X(i)]+\sum_{\nu=1}^{i}V_{\nu}\varphi_{\nu}(i),\ i=\overline{1,I}\,, \tag{1}$$

де V_{ν}, $i=\overline{1,I}$ – випадковий коефіцієнт: $M[V_{\nu}]=0$; $M[V_{\nu}V_{\mu}]=0$, $\nu\ne\mu$; $M[V_{\nu}^{2}]=D_{\nu}$;

$\varphi_{\nu}(i)$, $\nu,\ i=\overline{1,I}$ – невипадкова координатна функція: $\varphi_{\nu}(\nu)=1$, $\varphi_{\nu}(i)=0$, якщо $\nu>i$.

Елементи канонічного розкладу визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$V_{i}=X(i)-M[X(i)]-\sum_{\nu=1}^{i-1}V_{\nu}\varphi_{\nu}(i),\ i=\overline{1,I}; \tag{2}$$

$$D_{i}=M[X^{2}(i)]-\{M[X(i)]\}^{2}-\sum_{\nu=1}^{i-1}D_{\nu}\varphi_{\nu}^{2}(i),\ i=\overline{1,I}\,; \tag{3}$$

$$\varphi_{\nu}(i)=\frac{1}{D_{\nu}}\{M[X(\nu)X(i)]-M[X(\nu)]M[X(i)]-$$
$$-\sum_{j=1}^{\nu-1}D_{j}\varphi_{j}(\nu)\varphi_{j}(i)\},\nu=\overline{1,I},\ i=\overline{\nu,I}. \tag{4}$$

Представлення (1) точно визначає процес $X(t)$ у дискретних точках t_i, $i=\overline{1,I}$, однак забезпечує мінімум середнього квадрата похибки приближення у проміжках між ними тільки в рамках лінійних (кореляційних) зв'язків. Для побудови канонічного розкладу, з урахуванням зв'язків більш вищого порядку: $M[X^{\nu}(i)X^{\mu}(j)]$, $\nu\ge1$, $\mu\ge2$ або $\nu\ge2$, $\mu\ge1$, розглянемо масив випадкових величин:

$$X=\begin{vmatrix} X(1) & X(2) & \dots & X(I-1) & X(I)\\ X^{2}(1) & X^{2}(2) & \dots & X^{2}(I-1) & X^{2}(I)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ X^{N-2}(I-1) & X^{N-2}(I-1) & \dots & X^{N-2}(I-1) & X^{N-2}(I)\\ X^{N-1}(I-1) & X^{N-1}(I-1) & \dots & X^{N-1}(I-1) & X^{N-1}(I) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Інформація про процес $X(t)$ у точках дискретизації t_i, $i=\overline{1,I}$ може бути отримана шляхом визначення взаємної кореляції елементів масиву X. Розглянемо даний масив у якості векторної випадкової послідовності $\overline{X}(i)=\{X(i),\ X^{2}(i),\ \dots,\ X^{N-2}(i),\ X^{N-1}(i)\}$, $i=\overline{1,I}$, складові якої є рядками масиву, а їх порядковий номер точки дискретизації однозначно пов'язаний з порядковим номером точки дискретизації. До $\overline{X}(i)$, $i=\overline{1,I}$ може бути застосовано апарат лінійних векторних канонічних розкладів. Одна з модифікацій такого розкладу для деякої векторної послідовності $\{X_1(i), ..., X_h(i), ..., X_H(i)\}$, $i = \overline{1, I}$ має вигляд [3]:

$$X_h(i) = M[X_h(i)] + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{H} V_\nu^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i),\ i = \overline{1, I}, \tag{7}$$

де

$$V_\nu^{(\lambda)} = X_\lambda(\nu) - M[X_\lambda(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} V_\mu^{(j)}\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} V_\nu^{(j)}\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu),\ \nu = \overline{1, I}; \tag{8}$$

$$D_\lambda(\nu) = M\left[\left\{V_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right] = M\left[\{X_\lambda(\nu)\}^2\right] - M^2[X_\lambda(\nu)] - \\ - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} D_j(\mu)\left\{\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\right\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\left\{\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\right\}^2,\ \nu = \overline{1, I}; \tag{9}$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M\left[V_\nu^{(\lambda)}(X_h(i) - M[X_h(i)])\right]}{M\left[\left\{V_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right]} = \frac{1}{D_\lambda(\nu)}(M[X_\lambda(\nu)X_h(i)] - \\ - M[X_\lambda(\nu)]M[X_h(i)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} D_j(\mu)\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\varphi_{h\mu}^{(j)}(i) - \\ - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\varphi_{h\nu}^{(j)}(i),\ \lambda = \overline{1, h},\ \nu = \overline{1, i}. \tag{10}$$

Координатні функції $\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$, $h, \lambda = \overline{1, H}$, $\nu, i = \overline{1, I}$ мають такі властивості:

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \begin{cases} 1, & h = \lambda\ \&\ \nu = i; \\ 0, & i < \nu. \end{cases} \tag{11}$$

Застосування канонічного розкладу (7) до послідовності $X(i)$, $i = \overline{1, I}$ дає такий вираз для першої складової:

$$X(i) = M[X(i)] + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1} W_\nu^{(\lambda)}\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i),\ i = \overline{1, I}. \tag{12}$$

Елементи канонічного розкладу визначаються рекурентними співвідношеннями:

$$W_\nu^{(\lambda)} = X^\lambda(\nu) - M\left[X^\lambda(\nu)\right] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N-1} W_\mu^{(j)}\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} W_\nu^{(j)}\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu),\ \nu = \overline{1, I}; \tag{13}$$

$$D_\lambda(\nu) = M\left[\left\{W_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right] = M\left[X^{2\lambda}(\nu)\right] - M^2\left[X^\lambda(\nu)\right] - \\ - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N-1} D_j(\mu)\left\{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\right\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\left\{\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\right\}^2,\ \nu = \overline{1, I}; \tag{14}$$

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M\left[W_\nu^{(\lambda)}\left(X^h(i) - M\left[X^h(i)\right]\right)\right]}{M\left[\left\{W_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right]} = \frac{1}{D_\lambda(\nu)}(M\left[X^\lambda(\nu)X^h(i)\right] - \\ - M\left[X^\lambda(\nu)\right]M\left[X^h(i)\right] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N-1} D_j(\mu)\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\mu}^{(j)}(i) - \\ - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\nu}^{(j)}(i),\ \lambda = \overline{1, h},\ \nu = \overline{1, i}. \tag{15}$$

Нелінійний випадковий процес $X(t)$ представлено за допомогою N масивів $\left\{W^{(\lambda)}\right\}$, $\lambda = \overline{1, N}$ некорельованих центрованих випадкових коефіцієнтів $W_i^{(\lambda)}$, $i = \overline{1, I}$. Кожний з даних процесів містить інформацію про значення відповідної послідовності $X^\lambda(i)$, $\lambda = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, I}$, а координатні функції $\beta_{h\nu}^{\lambda}(i)$, $\lambda, h = \overline{1, N}$, $\nu, i = \overline{1, I}$ описують ймовірностні зв'язки порядку $\lambda + h$ між перерізами t_ν та t_i, $\nu, i = \overline{1, I}$. Вираз (12) є також справедливим, якщо у випадковому процесі $X(t)$ відсутні деякі зв'язки. При цьому відповідні координатні функції приймають значення нуль і дані зв'язки автоматично виключаються з канонічного розкладу.

Правомірність підходу, що використовується для отримання представлення (12) підтверджується положенням [1] про можливість побудови канонічного розкладу послідовності

$\{f_1(\bar{z}_1), \ldots, f_n(\bar{z}_n)\}$, де $\bar{z}_\nu$, $\nu = \overline{1,n}$ – векторна випадкова величина, а $f_\nu(\ )$, $\nu = \overline{1,n}$ – нелінійна функція.

Вираз (12) може бути використаний для розв'язання задачі моделювання нелінійного процесу $X(t)$ в досліджуємому ряді точок t_i, $i = \overline{1,I}$, що зводиться до моделювання випадкових коефіцієнтів $W_i^{(\lambda)}$ і перетворення отриманих значень координатними функціями $\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$, λ, $h = \overline{1,N}$, ν, $i = \overline{1,I}$. Єдиним обмеженням, яке накладається на досліджуємий випадковий процес при отриманні його канонічного розкладу, є вимога скінченності моментів $M[X^\nu(i)X^\mu(j)]$, i, $j = \overline{1,I}$, ν, $\mu = \overline{1,N-1}$, $\nu + \mu \le N$. Оскільки вона завжди виконується для реальних випадкових процесів, представлення (12) є досить універсальним.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение. – М.: Физматгиз, 1962. – 720 с.
2. *Кудрицкий В.Д.* Прогнозирование надежности радиоэлектронных устройств. – К.: Техніка, 1982. – 168 с.
3. *Атаманюк І.П.* Лінійний канонічний розклад векторного випадкового процесу з повним урахуванням взаємокореляційних зв'язків для кожної складової //Вісник ЖІТІ, 1998. – № 8. – С. 119–121.

АТАМАНЮК Ігор Павлович – кандидат технічних наук, доцент Інституту підприємництва та сучасних технологій, м. Житомир.

Наукові інтереси:

– методи фільтрації та екстраполяції випадкових процесів.

Подано 22.12.1999.