УДК 621.37:621.391

В.Г. Ципоренко, к.т.н., доц.
Житомирський інженерно технологічний інститут

ВИЗНАЧЕННЯ АПОСТЕРІОРНОЇ ЙМОВІРНОСТІ РАДІОСИГНАЛУ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Показано, що достатню статистику при визначенні апостеріорної ймовірності радіосигналу забезпечує обчислення розподілу частотної функції правдоподібності. Суттєвою операцією в цьому випадку є визначення частотної функції взаємокореляції.

В сучасних радіоелектронних системах реалізуються операції пошуку, селекції, виявлення та аналізу радіосигналів. Звичайно пошук та селекція радіосигналів реалізуються в частотній або просторовій областях, а виявлення та аналіз – у часовій. Таке поєднання реалізації основних операцій (етапів) радіоприйому призводить до суттєвих часових та апаратурних витрат. Тому актуальною є задача реалізації усіх основних етапів радіоприйому в одній області – або часовій, або частотній.

Розглянемо задачу визначення апостеріорної ймовірності $P_{ps}(\lambda)$ параметра λ корисного дійсного сигналу $S(t,\ \lambda)$, що приймається, в адитивній суміші $U(t)$ зі статистично незалежним та обмеженим по смузі $\{0,\ f_B\}$ білим гауссівим шумом $n(t)$:

$$U(t) = S(t,\ \lambda) + n(t), \tag{1}$$

де: $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=\overline{1,m}}$ – вектор параметрів, від яких залежить сигнал;

$S(t,\ \lambda)$ – відома детермінована функція аргументів t та λ.

Нехай відомі всі необхідні імовірнісні характеристики випадкової величини λ та шуму $n(t)$:

$P_{pr}(\lambda)$ – апріорна щільність розподілу параметра λ;

D_n – дисперсія шуму $n(t)$;

$N = const$ – спектральна щільність потужності шуму $n(t)$.

У часовій області поставлена задача вирішується відомими методами на основі кореляційного аналізу та узгодженої фільтрації [1, 2].

Розв'яжемо цю задачу в частотній області.

Аналіз та обробка прийнятої суміші $U(t)$ у часовій області можуть виконуватися в двох формах: безперервній (аналоговій) та дискретній. Кожному варіанту часової форми обробки можуть відповідати дві форми обробки в частотній формі – безперервна та дискретна.

При безперервній часовій обробці прийнята суміш $U(t)$ задається незліченною множиною її значень в межах інтервалу аналізу T_a.

При дискретній часовій обробці прийнята суміш $U(t)$ задається зліченною множиною її дискретних відліків $\{U(t_k)\}_{k=1,\ m}$:

$$U(t_k) = U(k \cdot T_Д) = S(t_k,\ \lambda) + n(t_k), \tag{2}$$

де: $k = 1,\ 2,\ ...,\ M$ – номер відліку;

$T_Д$ – період дискретизації;

$M = \dfrac{T_a}{T_Д}$ – розмірність масиву.

При дотримуванні відомих вимог [3] часова реалізація сигналу має однозначне спектральне розкладання, тобто зображення у частотній області.

Розглянемо частотне зображення сигналів, що базується на перетворенні Фур'є [4].

При безперервному часовому аналізі періодичному сигналу $S(t,\ \lambda)$, незалежно від часу аналізу T_a, у частотній області відповідає дискретний лінійчатий комплексний спектр $\{S(j\omega_k,\lambda)\}_{k=\overline{-\infty,\ \infty}}$. При аналізі такого сигналу в частотній області це призводить до дискретної обробки.

Якщо сигнал неперіодичний, то при безперервному часовому аналізі у частотній області йому відповідає суцільний (безперервний) спектр, або спектральна щільність $S(j\omega,\ \lambda)$, що зумовлює безперервний частотний аналіз.

При дискретному часовому аналізі з обмеженим часом $T_a < \infty$ сигналу $S(t_k,\ \lambda)$ у частотній області відповідає періодичний лінійчатий (дискретний) комплексний спектр $\{S(j\omega_k,\ \lambda)\}_{k=\overline{0,\ m-1}}$, що визначається на базі дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) і має період повторювання $F_Д = \dfrac{1}{T_Д}$, де $F_Д$ – частота дискретизації. Даний варіант відповідає дискретній частотній обробці. Якщо час аналізу наближається до нескінченності $T_a = M \cdot T_Д \to \infty$ при $T_Д = const$, то спектр сигналу перетворюється у спектральну щільність $S(j\omega,\ \lambda)$, що зумовлює безперервний частотний аналіз. Таким чином, можливі чотири варіанти прийому та обробки сигналу у часо-частотній області: безперервно-безперервний, безперервно-дискретний, дискретно-дискретний, дискретно-безперервний.

Спочатку розглянемо випадок дискретно-дискретної обробки, коли $T_a = M \cdot T_Д < \infty$, а M – парне число. Дискретній часовій суміші $U(t_k)$, що приймається, відповідає масив дискретних комплексних частотних відліків $U(j\omega_k)$ у смузі аналізу $\{0,\ F_Д\}$:

$$\begin{aligned} &U(t_k) = S(t_k,\ \lambda) + n(t_k),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1; \\ &U(j\omega_k) = S(j\omega_k,\ \lambda) + n(j\omega_k),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1. \end{aligned} \tag{3}$$

Відліки $U(t_k)$ – випадкові взаємонезалежні величини, закон розподілу щільності ймовірності яких визначається законом розподілу відліків шуму $n(t_k)$. Спектр $\{U(j\omega_k)\}_{k=\overline{0,\ M-1}}$ є випадковим лінійчатим, комплексним. Рівень кожного частотного відліку $U(j\omega_k)$ – випадкова комплексна величина.

Враховуючи, що вхідний шум $n(t)$ є гауссівим, можна показати, що частотні відліки шуму $n(j\omega_k)$ з номерами $k = 0,\ \ldots,\ \dfrac{M}{2} - 1$ є взаємонезалежними комплексними випадковими двомірними гауссівими величинами з нульовим математичним сподіванням та дисперсією D_{nf} [5]:

$$D_{nf} = \frac{NF_Д}{M} = N \cdot \Delta f,$$

де

$$\Delta f = \frac{F_Д}{M};$$

$$n(j\omega_k) = \mathrm{Re}_{nk} + j\,\mathrm{Im}_{nk}, \tag{4}$$

де Re_{nk}, Im_{nk} – дійсна та уявна складові частотних відліків шуму.

Дійсна та уявна частини шуму кожного частотного відліку є також гауссівими величинами з дисперсією D_{nf}.

Для реалізації прийнятого корисного вхідного сигналу $\{S(t_k,\ \lambda)\}_{k=\overline{1,\ M}}$, значення параметра λ є постійним. Тому статистичні властивості прийнятої суміші $\{U(t_k)\}_{k=\overline{1,\ M}}$, а також її спектра $\{U(j\omega_k)\}_{k=\overline{0,\ M-1}}$, визначаються адитивним шумом $n(t_k)$ і $n(j\omega_k)$ відповідно.

Під час аналізу прийнятої суміші в частотній області вся доступна інформація про параметр λ міститься в апостеріорній імовірності $P_{ps}(\lambda)$, що дорівнює умовній імовірності:

$$P_{ps}(\lambda) = P\left(\lambda \middle| U(j\omega_0),\ \ldots,\ U\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}\right)\right). \tag{5}$$

Імовірність $P_{ps}(\lambda)$ можна виразити через частотну функцію правдоподібності $L_f(\lambda)$:

$$P_{ps}(\lambda) = K_н \cdot P_{pr}(\lambda) \cdot L_f(\lambda), \tag{6}$$

де $L_f(\lambda) = P\left[U(j\omega_0),\ \ldots,\ U\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}\right) \middle| \lambda\right]$.

При цьому:

$$K_н = \left[\int\limits_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} P_{pr}(\lambda) \cdot L_f(\lambda) d\lambda \right]^{-1}. \qquad (7)$$

Визначимо функцію правдоподібності $L_f(\lambda)$, враховуючи, що якобіан перетворення від змінної $U(j\omega_k)$ до змінної $n(j\omega_k)$ дорівнює одиниці:

$$\begin{aligned} L_f(\lambda) &= P\left(U(j\omega_0), \ldots, U\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}\right) \middle| \lambda\right) = \\ &= P\left(U(j\omega_0) - S(j\omega_0), \ldots, U\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}\right) - S\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}\right) \middle| \lambda\right) = \\ &= P\left(U(j\omega_0) - S(j\omega_0, \lambda), \ldots, U\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}\right) - S\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}, \lambda\right)\right) = P\left(n(j\omega_0, \lambda), \ldots, n\left(j\omega_{\frac{M}{2}-1}, \lambda\right)\right). \end{aligned} \qquad (8)$$

Оскільки частотні відліки шуму $n(j\omega_k)$ є взаємонезалежними і нормально розподіленими, імовірність $L_f(\lambda)$ можна подати як добуток імовірностей відліків:

$$\begin{aligned} L_f(\lambda) &= \prod_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} P(n(j\omega_k, \lambda)) = \frac{1}{(4\pi^2 \cdot D_{nf})^{\frac{M}{4}}} \cdot exp\left\{ - \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \frac{n^2(j\omega_k, \lambda)}{2D_{nf}} \right\} = \\ &= \frac{1}{(4\pi^2 \cdot D_{nf})^{\frac{M}{4}}} \cdot exp\left\{ - \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \frac{n^2(j\omega_k, \lambda) \cdot (\Delta f)^2}{2N \cdot \Delta f} \right\} = \frac{1}{(4\pi^2 \cdot D_{nf})^{\frac{M}{4}}} \cdot exp\left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} n^2(j\omega_k, \lambda)\Delta f \right\} = \\ &= \left(4\pi^2 \cdot D_{nf}\right)^{-\frac{M}{4}} \cdot exp\left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (U(j\omega_k) - S(j\omega_k, \lambda))^2 \cdot \Delta f \right\} = \\ &= K_L \cdot exp\left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (U(j\omega_k) - S(j\omega_k, \lambda))^2 \cdot \Delta f \right\}, \end{aligned} \qquad (9)$$

де $K_L = \left(4\pi^2 \cdot D_{nf}\right)^{-\frac{M}{4}}$.

Виконаємо аналіз рівняння (9), зробивши деталізацію показника експоненти та враховуючи, що частотні відліки є величини комплексні:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (U(j\omega_k) - S(j\omega_k, \lambda))^2 \cdot \Delta f = \\ &= -\frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} U^2(j\omega_k) \cdot \Delta f - \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} S^2(j\omega_k, \lambda) \cdot \Delta f + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathrm{Re}\left(U(j\omega_k) \cdot S^*(j\omega_k, \lambda)\right) \cdot \Delta f, \end{aligned} \qquad (10)$$

де: $S^*(j\omega_k, \lambda)$ – комплексно спряжений відлік по відношенню до $S(j\omega_k, \lambda)$;

$\mathrm{Re}(\bullet)$ – дійсна частина комплексного числа.

Перший доданок в правій частині рівняння (10) не залежить від параметра λ та є пропорційним енергії прийнятої суміші $\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} U^2(j\omega_k) \cdot \Delta f = \frac{E_U}{2}$. Тому множник $exp\left(-\frac{E_U}{4N}\right)$ можна включити до постійної K_L (9).

Другий доданок рівняння (10) є пропорційним енергії E_S корисного сигналу $S(t, \lambda)$, що несе повідомлення, яка в загальному випадку може залежати від λ:

$$E_S = 2\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} S^2(j\omega_k, \lambda) \cdot \Delta f.$$

Оскільки частотні відліки $U(j\omega_k)$ та $S^*(j\omega_k, \lambda)$ – величини комплексні, третій доданок можна виразити через дійсні та уявні складові частотних відліків:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathrm{Re}\left(U(j\omega_k) \cdot S^*(j\omega_k, \lambda)\right) \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (\mathrm{Re}_{Uk} \cdot \mathrm{Re}_{Sk} + \mathrm{Im}_{Uk} \cdot \mathrm{Im}_{Sk})\Delta f,$$

де: Re_{Uk}, Re_{Sk}, Im_{Uk}, Im_{Sk} – відповідно дійсні та уявні складові k-го комплексного відліку суміші та корисного сигналу.

Отже, рівняння (8) можна представити у вигляді:

$$L_f(\lambda) = K_L \cdot exp\left(-\frac{E_S}{4N}\right) \cdot exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathrm{Re}\big(U(j\omega_k)\cdot S^*(j\omega_k,\ \lambda)\big)\cdot \Delta f\right\} =$$

$$= K_L \cdot exp\left(-\frac{E_S}{4N}\right)\cdot \mu(\lambda), \qquad (11)$$

де: $K_L = \left(4\pi^2 N \cdot \Delta f\right)^{-\frac{M}{4}} \cdot exp\left(-\frac{E_U}{4N}\right)$;

$$\mu(\lambda) = exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathrm{Re}\big(U(j\omega_k)\cdot S^*(j\omega_k,\ \lambda)\big)\cdot \Delta f\right\}.$$

У багатьох випадках множник $exp\left(-\frac{E_U}{4N}\right)$ можна також включити до постійної K_L, якщо енергія сигналу не залежить від параметра λ:

$$L_f(\lambda) = K_L \cdot exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathrm{Re}\big(U(j\omega_k)\cdot S^*(j\omega_k,\ \lambda)\big)\cdot \Delta f\right\}. \qquad (12)$$

Аналіз рівняння (9) показує, що при збільшенні M та зменшенні Δf значення $L_f(\lambda)$ буде наближатися до нуля, оскільки збільшується загальна кількість можливих реалізацій прийнятої суміші $U(j\omega_k)$. Тому доцільно використовувати відношення правдоподібності $e_f(\lambda)$, що дорівнює відношенню функцій правдоподібності при наявності та відсутності корисного сигналу $S(t,\ \lambda)$:

$$e_f(\lambda) = \frac{L_f(\lambda)\big|S(t,\ \lambda)\neq 0}{L_f(\lambda)\big|S(t,\ \lambda)=0} = \frac{exp\left\{-\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1}\big(U(j\omega_k) - S(j\omega_k,\lambda)\big)^2\cdot\Delta f\right\}}{exp\left\{-\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} U^2(j\omega_k)\cdot\Delta f\right\}}. \qquad (13)$$

У випадку безперервно-дискретного прийому сигналу рівняння (11) і (13) в загальному випадку будуть відповідати:

$$L_f(\lambda) = K_L \cdot exp\left(-\frac{E_S}{4N}\right)\cdot exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathrm{Re}\big(U(j\omega_k)\cdot S^*(j\omega_k,\ \lambda)\big)\cdot \Delta f\right\}; \qquad (14)$$

$$e_f(\lambda) = \frac{exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}\big(U(j\omega_k)\cdot S^*(j\omega_k,\ \lambda)\big)\cdot \Delta f\right\}\cdot exp\left\{-\frac{E_S}{4N}\right\}}{exp\left\{-\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{\infty} U^2(j\omega_k)\cdot\Delta f\right\}}. \qquad (15)$$

Для обмеженої по смузі частот прийнятої суміші сигналу $U(t)$ рівняння (14) і (15) будуть збігатися з (11) і (13) відповідно.

У випадках дискретно-безперервного та безперервно-безперервного прийомів суміші рівняння (11) і (13) можна показати як

$$L_{f_н}(\lambda) = \lim_{\substack{\Delta f\to 0\\ M\to\infty}}\left\{K_L \cdot exp\left(-\frac{E_S}{4N}\right)\cdot exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \mathrm{Re}\big(U(j\omega_k)\cdot S^*(j\omega_k,\ \lambda)\big)\cdot \Delta f\right\}\right\} =$$

$$= K_{L_н}\cdot exp\left(-\frac{E_S}{4N}\right)\cdot exp\left\{\frac{2}{N}\cdot\int_0^{f_B} \mathrm{Re}\big(U(jf)\cdot S^*(jf,\ \lambda)\big)df\right\} =$$

$$= K_{L_н}\cdot exp\left(-\frac{E_S}{4N}\right)\cdot exp\{-\mu_f(\lambda)\}, \qquad (16)$$

де: $K_{L_н} = \lim_{\Delta f\to 0}\left(4\pi^2\cdot D_{нf}\right)^{-\frac{f_B}{4\Delta f}}$;

$$\mu_f(\lambda) = \frac{2}{N}\int_0^{f_B}\mathrm{Re}\big(U(jf)\cdot S^*(jf,\lambda)\big)df$$

і

$$e_f(\lambda) = \frac{L_{f_н}(\lambda)\left|S(t,\ \lambda) \neq 0\right.}{L_{f_н}(\lambda)\left|S(t,\ \lambda) = 0\right.} = \frac{exp\left\{-\frac{2\pi}{N}\int\limits_0^{f_в} \mathrm{Re}\left(U(jf)\cdot S^*(jf,\ \lambda)\right)df\right\}\cdot exp\left(-\frac{E_S}{4N}\right)}{exp\left\{-\frac{2\pi}{N}\int\limits_0^{f_в} U^2(jf)df\right\}}. \tag{17}$$

Отримані результати дозволяють визначити шукану апостеріорну імовірність $P_{ps}(\lambda)$ для різних варіантів прийому.

Для дискретно-безперервного та безперервно-безперервного прийому:

$$P_{ps} = K_н \cdot P_{pr}(\lambda)\cdot exp\left(-\frac{E_s}{4N}\right)\cdot exp\left\{\frac{2\pi}{N}\int\limits_0^{f_в} \mathrm{Re}(U(jf)\cdot S^*(jf,\lambda))df\right\}, \tag{18}$$

де $K_н$ – коефіцієнт, що обчислюється з умови нормування (7).

Для дискретно-дискретного та безперервно-дискретного прийомів:

$$P_{ps} = K_н \cdot P_{pr}(\lambda)\cdot exp\left(-\frac{E_s}{4N}\right)\cdot exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M-1} \mathrm{Re}(U(jf_k)\cdot S^*(jf_k))\Delta f\right\}, \tag{19}$$

де $K_н$ – коефіцієнт, що обчислюється з умови нормування (7).

Із рівнянь (18) і (19) випливає, що при визначенні апостеріорної імовірності $P_{ps}(\lambda)$ основною операцією є обчислення $\mu_f(\lambda)$. Це зумовлюється тим, що експоненціальна функція змінюється монотонно при зміні свого показника. Тому функція $\mu_f(\lambda)$ однозначно, з певною деформацією, визначає функціональну залежність апостеріорної імовірності $P_{ps}(\lambda)$. Функцію $\mu_f(\lambda)$ доцільно визначити як частотну функцію взаємної кореляції між прийнятою сумішшю $U(j\omega)$ та очікуваним сигналом $S(j\omega,\ \lambda)$.

Отже, основним етапом обробки прийнятої суміші $U(j\omega)$ у частотній області, з метою визначення розподілу апостеріорної імовірності параметра, є визначення частотної функції взаємокореляції. Обчислення функції $\mu_f(\lambda)$ – суттєва операція прийому, що забезпечує достатню статистику для оцінки параметра λ.

З метою полегшення практичної реалізації та теоретичних обчислень доцільно використовувати логарифм апостеріорної ймовірності:

$$ln\ P_{ps}(\lambda) = ln\ K_н + ln\ P_{pr}(\lambda) - \frac{Es}{4N} + \mu_f(\lambda). \tag{20}$$

Таким чином, використовуючи частотну функцію взаємокореляції, можна однозначно визначити шукану апостеріорну імовірність параметра λ корисного сигналу, виконуючи обробку в частотній області. При цьому обчислення частотної функції взаємокореляції можуть виконуватись в дискретній або безперервній формах.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Тихонов В.И.* Оптимальний прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
2. *Гуткин Л.С.* Теория оптимальних методов радиоприема при флуктуационных помехах. – М.: Советское радио, 1972. – 448 с.
3. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986.
4. *Мартинов В.А., Селихов Ю.И.* Панорамные приемники и анализаторы спектра / Под ред. Г.Д. Заварина. – М.: Советское радио, 1980. – 312 с., ил.
5. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.

ЦИПОРЕНКО Валентин Григорович – кандидат технічних наук, доцент кафедри радіотехніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– радіоелектроніка з використанням цифрової обробки сигналів.

Подано 6.12.1999.