УДК 681.142.7

М.М. Колодницький, к.т.н., доц., докторант
Житомирський інженерно-технологічний інститут

УЗАГАЛЬНЕНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЯДУ ВІДОМИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

З метою прояснення математичного змісту різноманітних функціональних перетворень, що використовуються в інформаційних технологіях, в даній роботі показується зв'язок між ними. Побудовано узагальнений алгоритм – послідовність функціональних перетворень, – з якого деякі відомі види функціональних перетворень (крива Пеано, фрактали, рекурентні функції тощо) отримуються як окремий випадок. Показано взаємозв'язок між класичними та деякими новими числовими характеристиками функціональних перетворень (такими як: точка біфуркації, фрактальна розмірність тощо).

Нажаль, зараз склалась така ситуація, що дослідження, які ведуться в різних предметних областях, недостатньо враховують результати інших досліджень, що стосуються цієї ж тематики. Як наслідок, наприклад, у випадку певної нової ідеї, популярної на час її виникнення, ми маємо, з одного боку, шалену кількість публікацій з цієї тематики, а з іншого боку – так би мовити, "повальне" недостатнє розуміння математичної суті справи.

Яскравим прикладом такої ситуації можуть бути "фрактали" та деякі пов'язані з ними поняття. На підтвердження сказаного, можна навести цитату відомого вченого в цій галузі, професора Мун, взяту з його монографії: "...ми намагаємося надати більш точного математичного змісту для терміна "фрактальна структура". Це, швидше, спроба інженера зрозуміти, що таке фрактальна структура".

Як бачимо, задача "зрозуміння" математичного змісту різноманітних понять та об'єктів, що отримали широке використання у різних прикладних сферах, є досить актуальною. Дана робота присвячена її розв'язанню. В роботі показано, що деякі окремі види функціональних перетворень (чи давно відомі, такі, наприклад, як крива Пеано, чи відносно нові – фрактали, рекурентні функції) можуть бути отримані як окремий випадок, що випливає з єдиного, узагальненого алгоритму – <u>послідовності функціональних перетворень</u>.

Як відомо, *функція*, або *функціональне відношення* (*перетворення*), $f : X \to Y$ є в самому загальному випадку *бінарним відношенням* між деякими абстрактними множинами. Чи не найпоширенішим випадком є функціональне відношення, при якому множинами X та Y є числові множини, а саме, множина дійсних чисел R. Вибираючи різні можливі типи множин X та Y, приходимо до різних можливих типів функціональних відношень [1]. Деякі з них мають досить велике прикладне значення, деякі – менш поширені у застосуванні. Окремі викликають особливу зацікавленість в певні історичні моменти.

Комбінуючи різні типи множин X та Y, а також нарощуючи складність таких комбінацій, можна отримувати різні, досить складні типи функціональних відношень.

Дещо більш складний вид функціональних відношень можна отримати, якщо розглянути не одне відношення $f : X \to Y$, тобто перетворення множини X в множину Y, а *послідовність* функціональних перетворень (ПФП). У загальному випадку таку послідовність можна описати у вигляді алгоритму. Розглянемо його.

<u>Крок 1</u>. Вибираємо вид початкової множини, що підлягатиме послідовності перетворень. Такою множиною може бути, наприклад, числовий сегмент [0, 1] – рис. 1,*а* – або геометричне місце точок, таке як: відрізок лінії – рис. 1,*б*; трикутник – рис. 1,*в*; квадрат – рис. 1,*г*; куб – рис. 1,*д* тощо.

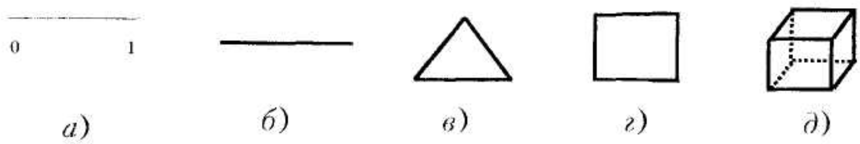


Рис. 1. Приклади виду початкової множини для послідовності перетворень

Іноді в літературі таку початкову множину називають "затравкою".

Крок 2. Ділимо початкову множину на k частин певним чином. В залежності від того, який спосіб поділу буде обрано, отримаємо різні типи ПФП. Розглянемо деякі з них.

Спосіб 1. Початкову множину ділимо на k частин, але так, щоб отримані від поділу частини були *подібні* до початкової множини. Для цього, як правило, її ділять на певну кількість однакових (або подібних між собою) підмножин. Крім того, обов'язковим є те, щоб ці частини були подібні до початкової.

Так, наприклад, числовий сегмент [0, 1] можна поділити на три рівних частини; кожна з результуючих частин є "подібною" до початкового сегмента – рис. 2,*а*. В чому полягає ця подібність стане зрозуміло з наступного кроку алгоритму. Теж саме застосовуємо до відрізка лінії (рис. 2,*б*). Трикутник можна поділити на 4 частини так, що кожна з них буде подібною до початкового трикутника (рис. 2,*в*); квадрат можна поділити в такий спосіб на 9 частин (рис. 2,*г*); куб – на 27 (рис. 2,*д*).

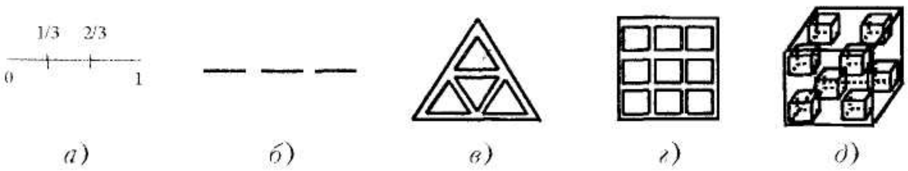


Рис. 2. Приклади виконання 2-го кроку ПФП – поділ початкової множини на "подібні" підмножини

В ряді випадків кількість поділів k значення немає; головне, щоб результуючі елементи були подібні до початкового.

Спосіб 2. Початкову множину перетворюємо довільним чином, наприклад, використовуючи випадкові числа для поділу відрізка на частини, виконуючи деякі перетворення над областю комплексних чисел тощо; всю решту модифікацій ПФП проводимо на наступному 3-му кроці алгоритму.

Спосіб 3. Множина взагалі не ділиться, а переходимо відразу до 3-го кроку алгоритму. Як побачимо далі, такий тип ПФП подібний до простих рекурентних функцій.

Зауважимо, що у фізичних та технічних застосуваннях велике поширення отримав "Спосіб 1" послідовності функціональних перетворень, для якого використовують навіть спеціальну назву "самоподібність", "автомодельність" або "скейлінг" (від англ. scale – масштаб). У поєднанні зі спеціальним способом виконання кроку 3 цього алгоритму, він також призводить до ПФП, яку в літературі останнім часом прийнято називати "фракталами". Отже розглянемо третій крок алгоритму.

Крок 3. Над отриманими частинами виконуємо деяке функціональне перетворення. Тепер головною вимогою до перетворення є те, що воно, так би мовити, не повинно "спотворювати" подібність множин, які перетворюються. "Подібність" потрібна для забезпечення рекурентності всього алгоритму, тобто щоб "результат y" поточного кроку можна було використати як "аргумент x" для наступного кроку. Таким чином, ця "подібність" фактично означає рекурентність (!).

Так, одним із найпростіших видів перетворення, що задовольняє вказаній вимозі, є перетворення, при якому нічого додаткового ("ускладнюючого", "спотворюючого подібність") над елементами отриманої множини не робиться, а лише певна частина елементів вилучається для подальшого перетворення. Наприклад, для числового сегмента, що поділений на три рівні частини, вилучається його центральна частина (рис. 3,*а*); для трикутника, що поділений на чотири подібних, вилучається один з них, наприклад, центральний (рис. 3,*б*); для квадрата чи куба так само (рис. 3,*в*).

Рис. 3. Приклади виконання 3-го кроку ПФП – вилучення елементів

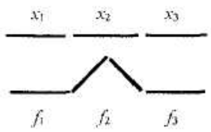
Як бачимо, на цьому кроці ми маємо можливість вилучати будь-який елемент із отриманої множини та будь-яку їх кількість. (Справа полягає лише в тому, наскільки "гарний" (або симетричний) малюнок ми отримаємо наприкінці нашого алгоритму; "краса фракталів" від цього може постраждати).

Більш складний вид перетворення отриманих поділених множин, який ми можемо використати на цьому кроці, полягає у наступному. Поставимо у відповідність кожній отриманій в результаті поділу множині своє певне перетворення. Основна вимога до перетворень на цьому кроці алгоритму залишається в силі: кожне з них не повинно порушувати подібність. Так, наприклад, якщо множина X є лінією, то множина Y також повинна бути лінією або набором ліній.

Наприклад, до першої та третьої частини відрізка з рис. 2,*б* застосовуємо тотожне перетворення (тобто нічого не "спотворюємо"), а до його середньої частини застосуємо перетворення, що є, так би мовити, певним лінійним сплайном. Тобто, до кожного з множини трьох відрізків застосовуємо окреме перетворення (рис. 4,*а*). Геометрична інтерпретація такого набору перетворень показана на рис. 4,*б*.

$$f_1 = E \cdot x_1; \quad \text{для } \{x_1\};$$
$$f_2 = \begin{cases} A \cdot x_2 & \text{для } \{x_{2-}\}; \\ -A \cdot x_2 & \text{для } \{x_{2+}\}; \end{cases}$$
$$f_3 = E \cdot x_3; \quad \text{для } \{x_3\}.$$

а)



б)

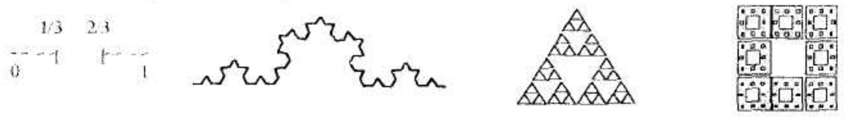
Рис. 4. Геометрична інтерпретація 3-го кроку для одного типу ПФП

Таким чином, в результаті 3-го кроку ми отримали m множин об'єктів f_i.

В літературі кроки 2 та 3 іноді називають "утворюючими елементами (фрактала)".

Крок 4. До множини отриманих результатів $\{f_i\}$ рекурентно застосовуємо крок 2. Кількість n рекурентного виконання k кроків описаної послідовності функціональних перетворень може бути якою завгодно.

Так, наприклад, повторюючи алгоритм для вищеописаних прикладів три рази ($n = 3$), отримаємо множини, зображені на рис. 5.



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 5. Результат третьої ітерації алгоритму ($n = 3$)

Як бачимо, використовуючи на різних кроках алгоритму різні види множин (крок 1), способи поділу множин (крок 2), типи функціональних перетворень цих множин (крок 3), приходимо до різноманітних ПФП. Так, наприклад, ПФП, що відповідає рис. 1,*а*; 2,*а*; 3,*а*; 5,*а*, відома як *Канторова множина;*, послідовність функціональних перетворень, що відповідає рис. 1,*б*; 2,*б*; 4,*б*; 5,*б*, відома як *крива Кох;* ПФП, що відповідає рис. 1,*в*; 2,*в*, 3,*в*, 5,*в*, відома як *серветка Серпінського;* а рис. 1,*г*, 2,*г*, 3,*г*, 5,*г*, – як *килим Серпінського* тощо. В літературі наводяться також інші приклади "фракталів": "чортова драбина", "дракон Хартера-Хейтуея", "крива Мандельброта-Гівена", "перетворення пекаря" тощо.

Аналогічно приходимо до інших прикладів відомих перетворень. Так, на третьому кроці алгоритму можна на перетворення f_i не накладати вимогу "не порушувати подібність". В принципі, тут можна використовувати будь-який вид перетворення множини X в множину Y. Тоді, фактично, весь акцент уваги переноситься на рекурентність процедури, тобто на крок 4. Причому, крок 2 – поділ множини – та вимога подібності поділених множин залишаються в силі (і навіть є обов'язковими). Вся процедура рекурентно повторюється для кожної з поділених множин. Прикладом такої реалізації ПФП є відома з літератури так звана *крива Пеано* (рис. 6).

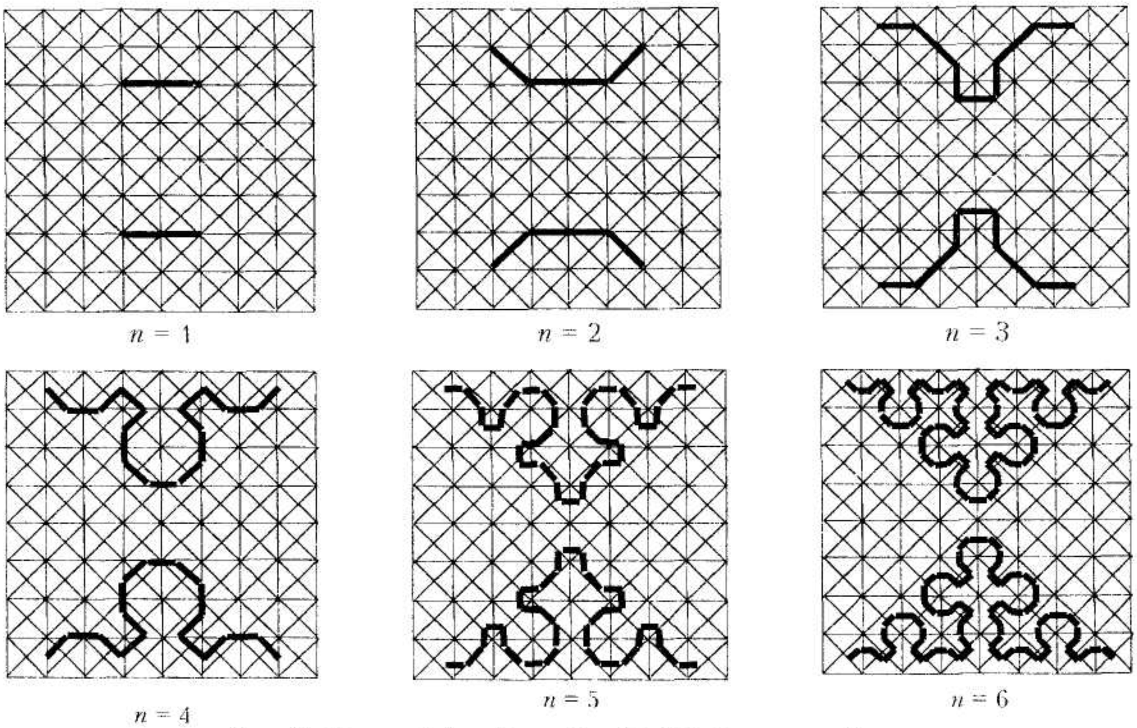


Рис. 6. Приклад іншої реалізації ПФБ – крива Пеано

Зазначимо також, що для того, щоб геометрична ілюстрація кривої "виглядала гарно", на вид перетворення f_i часто накладають додаткові вимоги: певну симетричність та зв'язаність (а іноді також замкнутість) кривої.

Іноді за множину X обирають область в комплексній площині, а її ітеративний поділ (чи зміна) може бути залежним від значень (комплексно значної) функції f_i. Тоді область значень функції f_i при ітераційному повторенні алгоритму є, фактично, ще одним прикладом реалізації ПФП. (Іноді говорять, що ця область має фрактальну границю). До такого класу прикладів ПФП відносяться: "множина Мандельброта", "множина Джуліа" тощо.

Нарешті, як зазначалося вище, на другому кроці алгоритму вказаний поділ множини на підмножини можна взагалі не проводити, а переходити відразу до кроку 3 – функціонального перетворення. Тоді для реалізації послідовності функціональних перетворень важливо, щоб, по-перше, вид функціональної залежності f_i, що використовується на кроці 3 алгоритму, міг змінюватися на кожному кроці; по-друге, такі зміни повинні відбуватися ітераційно. Очевидно, що якщо зміни виду f_i пов'язані лише зі зміною виду аргументів f_i, то ми, фактично, або повертаємося до розглянутого вище класу прикладів, таких як крива Пеано, або попадаємо до класу рекурентних функцій.

Додамо також, що всі рекурентні функції, які тут розглядаються, дещо відрізняються одна від одної, тобто поділяються на певні класи. Так, наприклад, крива Кох є рекурентною ПФП, але її особливістю є те, що тут вся множина значень функції (рекурентно) розглядається (ми скажимо так: "підставляється") як множина аргументів для наступного кроку перетворень. (Принциповим нюансом є можливість такої підстановки, що забезпечується "подібністю" перетворень – див. вище). Крива Пеано є також прикладом рекурентної ПФП, але тут рекурентність полягає у послідовному перетворенні множини аргументів функції f_i, і таке перетворення ніяк не використовує значення функції f_i. Іншими словами, множина значень, чи окреме значення функції, ніколи не стає значенням своїх аргументів (як це повинно бути у рекурентних функцій). І нарешті, у звичайних рекурентних функцій виду $f_i = \Psi(f_{i-1})$ значення функції стає значенням своїх аргументів. Інший приклад – множина Мандельброта; тут маємо систему двох рекурентних функцій двох аргументів. Ще раз звернемо увагу на те, що якщо у випадку, наприклад, кривої Кох аргументом рекурентної функції є відразу вся множина X на кожному кроці, то аргументом звичайної рекурентної функції, скажімо такої, як відображення Пуанкаре $x_i = \lambda\, x_{i-1}(1 - x_{i-1})$, чи звичайний скінченний автомат Мілі або Мура, на кожному кроці є одне єдине значення з усієї множини значень X.

Приклади інших відомих "не класичних кривих", "фракталів" та "відображень", що підпадають під загальну схему послідовності функціональних перетворень, можна продовжувати.

Отже, описаний тут алгоритм виконання послідовності функціональних перетворень є досить загальним. Відомі з літератури приклади ПФП випливають з нього як окремі випадки.

Як бачимо, функціональні відношення можуть утворюватись досить різноманітним способом і призводити до суттєво не схожих за своїми властивостями функцій. Оскільки в самому загальному випадку функція – це множина пар елементів $<x, y>$, то для представлення (зображення) функцій та дослідження їх властивостей зручно використовувати геометричну інтерпретацію, тобто розглядати функцію як сукупність точок площини з координатами x, y. Такий геометричний образ називають *графіком функції*, *лінією*, *кривою лінією* або просто *кривою*.

В той же час, геометричне поняття лінії чи кривої досить по-різному визначається в різних розділах геометрії. Так, в рамках елементарної геометрії поняття лінії не отримує чіткого формулювання та іноді визначається як "довжина без ширини" або "границя поверхні". В аналітичній геометрії лінія визначається як множина точок, координати яких задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$, причому на функцію F повинні накладатися такі обмеження, щоб, з одного боку, це рівняння мало нескінченну множину розв'язків, і, з іншого боку, щоб ця множина розв'язків не заповнювала "куска площини". В диференціальній геометрії лінія визначається за допомогою параметричних рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$, $y(t)$ – неперервні функції, визначені на відрізку $a \le t \le b$, і множина точок (x, y) відповідає всім можливим значенням параметра t при умові, що ці точки розглядаються у визначеному порядку, тобто точки, що відповідають різним значенням параметра, вважаються різними.

Всі ці означені вище криві (лінії) вважаються *класичними*.

Більш складний тип кривих можна отримати, якщо прийняти, що для лінії, заданої параметричним рівнянням, точки, що відповідають різним значенням параметра, але мають однакові координати, вважаються однаковими (або *кратними* – див. нижче). Таким чином, множина пар (x, y), яким відповідає крива, є неупорядкованою відносно параметра t. Такі криві називають *жордановими кривими* (або *кривими Жордана*). В загальному випадку говорять, що множина точок топологічного простору, що є неперервним образом відрізка, називається жордановою кривою.

Ще одне загальне означення кривої для випадку площини приводить нас до поняття кривої Кантора. *Крива Кантора* – це плоский континууму, у будь-якому околі кожної точки якого є точки площини, що не належать континууму. Іншими словами – це будь-яка замкнута, зв'язна множина, яка є не щільною на площині, або це – одновимірний континуум, що має метрику. Приклад канторової кривої дає килим Серпинського.

Як бачимо, деякі типи функціональних перетворень мають певні особливості та для їх кількісної оцінки необхідні певні числові характеристики. До них, в першу чергу, відносяться: *кратність точки*, *індекс розгалуженості*, співвідношення між *точками біфуркацій*, а також метричні характеристики, такі, наприклад, як *метрична розмірність – розмірність Хаусдорфа* (*фрактальна розмірність*) – тощо.

Якщо крива Жордана має однакові точки для декількох різних значень параметра, то такі точки називаються *кратними точками*. Крива Жордана без кратних точок називається *простою дугою*. Якщо початкова та кінцева точки кривої співпадають, то вона називається *замкнутою кривою*. Якщо замкнута крива не перетинає саму себе, то її називають *простим замкнутим контуром* або *замкнутою кривою без кратних точок*. Будь-який простий замкнутий контур ділить площину на дві області, одна з яких є *внутрішньою* по відношенню до цієї кривої, інша – *зовнішньою*. Точки площини, що не належать до певної області, поділяються на два класи: *граничні точки* та *зовнішні точки*. Область називається *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати полігональною лінією, яка належить площині, тобто неперервною ламаною лінією, що складається зі скінченної кількості прямолінійних ланцюгів. Область E називається *однозв'язною* (*випуклою*), якщо внутрішня частина будь-якого замкнутого многокутника, периметр якого належить E, також цілком належить E.

Доведено, що будь-яка крива Пеано має кратні точки, а також, що не існує кривих Пеано, будь-яка точка яких була б простою, або двократною. Це означає, що якщо рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$ визначають криву Пеано, то обов'язково існують точки $M(x_0, y_0)$ площини, які крива проходить хоча б *три рази*, коли змінна t зростає від 0 до 1. Іншими словами, це означає, що система двох рівнянь $x_0 = x(t)$, $y_0 = y(t)$ має хоча б *три* кореня: t_1, t_2, t_3, таких, що $x_0 = x(t_i)$, $y_0 = y(t_i)$, де $i = 1, 2, 3$.

Цей факт підводить нас також до пояснення того, у чому полягає сутність поняття "кількість виміру або *розмірність простору*", і чим відрізняється, наприклад, площина (як множина точок) від прямої лінії (як множини точок). Саме завдяки тому, що крива Пеано має кратні точки, вона суцільно (при $n \to \infty$) заповнює квадрат чи трикутник. Тим самим, "одновимірна крива" стає подібною до "двовимірного куска" площини та нібито перетворюється з кривої у плоску фігуру.

До речі, те, що крива Пеано залишається при цьому кривою, а не стає фігурою, можна побачити, якщо до параметричних рівнянь кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$ приєднати ще одне рівняння вигляду $z = t$, тобто добавити ще один вимір, ще одну просторову координату. Тоді, у такому тривимірному просторі, початкова "плоска фігура" – крива Пеано – ніби "розтягнеться" вздовж осі z. В результаті ми отримаємо просторову дугу, проекція якої на площину $0XY$ дає початкову криву ("суцільну плоску фігуру"), а проекції на інші площини дають звичайні ("одновимірні") криві. У зв'язку з цим, кажуть, що така дуга може бути дахом, через який не пропикне дощ, але, в той же час, вона не є неперервною поверхнею. Ще раз звернемо тут увагу на те, що крива Пеано є послідовністю функціональних перетворень, і такі її особливі властивості з'являються лише при виконанні умови $n \to \infty$.

У дослідженні ліній поруч з поняттям кратної точки, що, як бачимо, породжує цілий потік нових понять, важливу роль відіграє також поняття *індексу розгалуженості кривої*. Не будемо наводити формальне визначення поняття індексу розгалуженості, яке є досить громіздким, а пояснимо його на прикладах.

Так, для всіх внутрішніх точок відрізка індекс розгалуженості дорівнює 2; індекс розгалуженості кінців відрізка дорівнює 1. Коло у кожній своїй точці має індекс розгалуженості 2; точка, з якої виходить n променів, має індекс розгалуженості n.

Якщо у лінії немає точок розгалуженості, тобто якщо у кожній точці лінії індекс розгалуженості дорівнює 1 чи 2, то така лінія є або *простою дугою* (топологічним образом відрізка), або *простою замкнутою лінією* (топологічний образ кола). Якщо лінія має скінченну кількість точок розгалуженості, то вона може бути поділена на скінченну кількість простих дуг, що не мають попарно ніяких інших спільних точок, крім своїх кінців.

Якщо крива має точки розгалуженості, виникає проблема їх дослідження: визначення кількості, виду, числових значень (координат) тощо. Особливо часто ця задача виникає при дослідженні нелінійних алгебраїчних або функціональних рівнянь та відома як проблема *розгалуженості розв'язків* таких систем рівнянь.

Так, нехай нелінійне рівняння

$$F(x, \lambda) = 0 \qquad (1)$$

з параметром λ має при фіксованому значенні λ_0 розв'язок x_0. Тоді при значеннях λ, близьких до λ_0, рівняння (1) може мати декілька (тобто більше одного) розв'язків $x(\lambda)$, близьких до x_0. В таких випадках говорять, що відбувається розгалуження розв'язку x_0, а пара (x_0, λ_0) називається *точкою розгалуження рівняння* (1). Іноді говорять, що точка (x_0, λ_0), є точкою, в якій народжується новий розв'язок. Тоді таку точку часто називають точкою *біфуркацій*. Так, наприклад, якщо досліджується розв'язок диференціального рівняння та його залежність від параметра λ, і якщо при деякому значенні λ_0 з'являється новий розв'язок цього рівняння, причому ці розв'язки є періодичними функціями, то говорять, що така точка (x_0, λ_0) є *точкою народження циклу* або точкою *біфуркації циклу* (біфуркації Хопфа). Часто в літературі використовують також і інші терміни, наприклад, народження нових розв'язків в точках розгалуженості називають народженням *катастроф* (див. так звану "теорію катастроф").

Задача дослідження точок розгалуженості виникає також при дослідженні параметричної залежності границь числових послідовностей – усталених значень ПФП, таких, наприклад, як відображення Пуанкаре. Для деяких конкретних видів таких задач встановлено певні співвідношення між точками біфуркацій, наприклад, константа Фейгенбаума.

Ще одні особливості послідовностей функціональних перетворень виражаються в їх метричних характеристиках.

Так, наприклад, для килима Серпинського може постати задача визначення площі (міри) фігури, обмеженої кривою, що отримується в результаті перетворень початкового квадрата, а також питання про довжину такої кривої. В загальному випадку доцільно розглядати питання про те, щоб отриманим в результаті послідовності перетворень числовим множинам (функціям) поставити у відповідність певну метричну характеристику.

Такі числові характеристики можуть бути отримані, наприклад, на основі так званої міри Лебега (1911 р.) або міри Хаусдорфа (1918 р.) – колективної назви класу мір, що визначаються за допомогою покриття множини "еталонами міри". Кількість таких еталонів визначають *метричну розмірність*.

Нехай F – замкнута множина, $N_F(\varepsilon)$ – мінімальна кількість множин з діаметром не більшим за ε, яка необхідна для того, щоб вони покривали F. Ця функція, що звичайно залежить від метрики, введеної на множині F, приймає цілочисельні значення для всіх $\varepsilon > 0$ і безмежно зростає при $\varepsilon \to 0$. Її називають *функцією об'єму множини F*. *Метричним порядком* множини F називають число

$$k = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\frac{\ln N_F(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}\right).$$

Нижню границю метричних порядків для всіх метрик множини F називають *метричною розмірністю*.

Для класичних кривих, або фігур, метрична розмірність співпадає з топологічною і є цілою величиною. Для об'єктів, отриманих в результаті послідовності функціональних перетворень, вона може бути дробовою. Звідси походить "нова" назва – "*фрактальна розмірність*", яку останнім часом часто вживають в технічній та фізичній літературах для позначення давно відомих в математиці об'єктів. Так, наприклад, метрична (фрактальна) розмірність канторової множини складає ln 2/3, метрична (фрактальна) розмірність кривої Кох – ln 4/3.

Таким чином, ми показали, що деякі окремі види функціональних перетворень (наприклад, крива Пеано, фрактали, рекурентні функції) можуть бути отримані як окремий випадок, що випливає з єдиного, узагальненого алгоритму – послідовності функціональних перетворень. Цей алгоритм було побудовано, детально описано та проілюстровано прикладами. Ми показали також взаємозв'язок між класичними та деякими новими числовими характеристиками функціональних перетворень (точка біфуркації, фрактальна розмірність тощо). Гадаємо, що викладений матеріал буде сприяти проясненню та розумінню математичного змісту різноманітних понять та об'єктів, що отримали широке використання у різних прикладних сферах.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Колодницький М.М.* Типологія математичних моделей технічних систем. Частина 2 // Вісник ЖІТІ, 1998. – № 7. – С. 208–218.

КОЛОДНИЦЬКИЙ Микола Михайлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри ПЗОТ, докторант Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- математичне моделювання складних систем;
- комп'ютерні інформаційні технології.

Подано 30.11.1999.