УДК 519.853.62

Д.О. Жовновський, студ.
Л.В. Рудюк, студ.
К.Є. Саваневіч, викл.
С.І. Яремчук к.ф.-м.н., доц.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ МОДИФІКОВАНИМ МЕТОДОМ РОЗЕНА

Розглядається задача оптимізації розміщення джерел фізичного поля у випадку, коли область розміщення та джерела мають форму n вимірних прямокутників, наводиться модифікація методу проекції градієнта Розена для розв'язку цієї задачі.

При проектуванні складних технічних систем в багатьох випадках виникає необхідність оптимального розміщення дискретних джерел фізичного поля. Поля можуть мати різноманітну природу (бути тепловими, силовими, електромагнітними тощо).

Розглянемо наступну задачу.

Нехай фізичне поле, що індукується джерелами та навколишнім середовищем, описується крайовою задачею вигляду:

$$\Delta u - \beta^2 u = -f(x, Z), \quad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

де

$$f(x,\ Z) = \begin{cases} A^i\left(x - Z^i\right), & \text{якщо } x \in D_i, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i, \end{cases}$$

Z – параметр розміщення джерел; $x \in R^n$,

$Z^i\left(\xi_1^i,\ \xi_2^i,\ \ldots,\ \xi_n^i\right)$ – координати полюса i-го джерела.

На розміщення джерел накладаються геометричні обмеження, які є умовами [1]:

1) взаємного неперетинання джерел поля;

2) належності джерел області Ω.

Якщо між джерелами D_i і D_j задана мінімально можлива відстань l_{ij}, а між джерелом D_i та кордоном Γ області Ω – l_i, то умови 1) і 2) відповідно мають вигляд співвідношень:

$$\rho_{ij}\left(D_i,\ D_j\right) - l_{ij} \geq 0 \ \ (i = 1,\ \ldots,\ m-1;\ \ j = i+1,\ \ldots,\ m);$$

$$\rho_i\left(\Gamma,\ D_i\right) - l_i \geq 0 \ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Положення i-го джерела у просторі визначається координатами його полюса Z^i. Таким чином, обмеження на розміщення джерел в області Ω представляються у загальному випадку системою відповідних нерівностей:

$$\begin{cases} \varphi_{ij}\left(Z^i,\ Z^j,\ l_{ij}\right) \leq 0 & (i = 1,\ \ldots,\ m-1;\ \ j = i+1,\ \ldots,\ m) \\ \psi_i\left(Z^i,\ l_i\right) \leq 0 & (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \end{cases} \tag{1}$$

Система обмежень (1) задає G – область зміни параметра Z, що визначає розміщення m джерел.

Необхідно знайти таке розміщення джерел – вектор $Z\left(Z^1,\ Z^2,\ \ldots,\ Z^m\right)$, – при якому функція мети $\chi(Z)$ досягає екстремуму.

Отже, поставлена задача зводиться до відшукання екстремуму функції мети $\chi(Z)$ на множині G.

Тобто задача має вигляд:

$$\chi(Z) = u(x_0,\ Z) \to extr, \tag{2}$$

$$Z \in G\,. \tag{3}$$

Ця задача має вимірність $n \cdot m$ (n – вимірність простору, що містить Ω; m – кількість джерел), складну множину припустимих розв'язків та багатоекстремальну функцію мети.

Розглянемо випадок, коли область Ω і джерела фізичного поля $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_m$ мають вигляд n-вимірних прямокутників, а функція мети $\chi(Z)$ є значенням поля в заданій точці області Ω.

Доведено, що для випадків крайових задач еліптичного та параболічного типів розв'язки цих задач неперервно диференційовані за параметрами розміщення джерел [2]. Отже, функція мети (2) також неперервно диференційована по Z.

Розглянемо множину припустимих розв'язків задачі G. Як було зазначено раніше, ця множина задається умовами неперетинання джерел і належності їх області розміщення Ω.

Умови взаємного неперетинання джерел D_1, D_2, ..., D_m у випадку, що розглядається, можна записати так:
якщо розмір k-го ($k = 1, ..., m$) джерела задається вектором $L^k\left(l_1^k, l_2^k, ..., l_n^k\right)$, то для кожної пари D_s, D_p джерел існує хоча б одне i таке, що:

$$\left|\xi_i^s - \xi_i^p\right| \geq \frac{l_i^s + l_i^p}{2},\ i = 1, ..., n,\ s = 1, ..., m,\ p = 1, ..., m,\ s \neq p. \qquad (4)$$

Умови належності джерела поля області Ω мають такий вигляд:
нехай розміри області Ω визначаються вектором $a(a_1, a_2, ..., a_n)$, тоді для кожного джерела D_j виконується:

$$\frac{l_i^j}{2} \leq \xi_i^j \leq a_i - \frac{l_i^j}{2},\ \ i = 1, ..., n,\ \ j = 1, ..., m. \qquad (5)$$

(4) та (5) утворюють систему нерівностей, що описує множину G, яка є об'єднанням опуклих n-вимірних багатогранників G_i:

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i\,,$$

де $r = (2n)^{C_m^2}$ – кількість багатогранників.

Кожний багатогранник описується системою лінійних нерівностей, кількість яких залежить від кількості джерел фізичного поля та розмірності простору і становить $N = C_m^2 + 2 \cdot m \cdot n$.

Таким чином, маємо r підзадач вигляду:

$$\chi(Z) = u(x_0, Z) \to extr,\ \ Z \in G_i,\ \ i = \overline{1, r}.$$

Необхідно розв'язати задачу оптимізації неперервно диференційованої функції мети $\chi(Z)$ на кожній з підмножин G_i, що є опуклими багатогранниками.

До розв'язання кожної з таких задач можна застосувати різні методи умовної оптимізації. Один з них – метод проекції градієнта Розена.

Наведемо схему методу для випадку, коли множина припустимих розв'язків – опуклий багатогранник, що задається лінійними нерівностями [3].

Як відомо, напрямком найшвидшого спуску є антиградієнт функції мети. Але, при наявності обмежень, рух вздовж напрямку найшвидшого спуску може привести в неприпустимі точки. В методі проекції градієнта Розена антиградієнт проектується на множину припустимих розв'язків у вектор, при русі вздовж якого значення функції мети покращується та, водночас, зберігається припустимість точок траєкторії.

Введемо позначення:
A – матриця коефіцієнтів системи лінійних нерівностей, що задають підмножини G_i;
b – матриця-стовпчик вільних членів системи лінійних нерівностей, що задають підмножини G_i;
E – одинична матриця;
d_k – вектор спуску;
P – матриця проектування.
Деякі теоретичні відомості [3].

Визначення. Матриця P порядку $n \times n$ називається матрицею проектування, якщо $P = P^T$ та $PP = P$.

Лема. Розглянемо задачу мінімізації функції $\chi(Z)$ при умовах $AZ \leq b$. Нехай Z – припустима точка, для якої $A_1 Z = b_1$, $A_2 Z < b_2$, де $A = (A_1, A_2)$ і $b = (b_1, b_2)$. Функція χ диференційована в Z. Якщо P – матриця проектування, така, що $P\nabla\chi(Z) \neq 0$, то вектор $d = -P\nabla\chi(Z)$ є напрямком спуску для функції χ в точці Z. І якщо матриця A_1 має повний ранг та $P = E - A_1^{-1}(A_1\ A_1^m)^{-1}A_1$, то d – можливий напрямок спуску.

Теорема. Розглянемо задачу мінімізації $\chi(Z)$ при умовах $AZ \leq b$. Нехай Z – припустима точка, для якої $A_1 Z = b_1$, $A_2\ Z < b_2$, де $A = (A_1, A_2)$ і $b = (b_1, b_2)$. Припустимо, що A_1 має повний ранг і нехай $P = E - A_1^{-1}(A_1\ A_1^m)^{-1}A_1$. Надалі будемо припускати, що $P\nabla\chi(Z) = 0$ і $u = -(A_1 A_1^m)^{-1}A_1\nabla\chi(Z^k)$. Якщо $u \geq 0$, то Z – точка Куна-Таккера. Нехай деяка компонента u_j вектора u від'ємна і матриця B_1 отримана з A_1 викреслюванням рядка, що відповідає u_j. Позначимо $P^I = E - B_1^{-1}(B_1\ B_1^m)^{-1}B_1$ і нехай $d = -P^I\nabla\chi(Z)$. Тоді вектор d є припустимим напрямком спуску.

Геометрична інтерпретація проектування градієнта.

На рис. 1 зображено процес проектування градієнта функції мети наведеної задачі. В точці Z активним є тільки одне обмеження, градієнт якого дорівнює A_1, $d = -P\nabla\chi(Z)$ – можливий напрямок спуску.

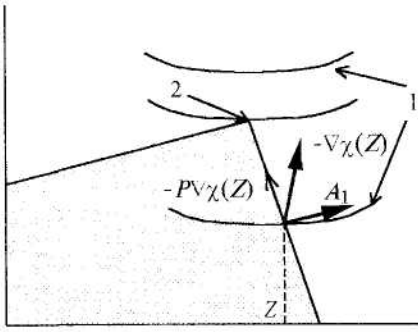

Рис. 1. Проектування градієнта: 1 – лінії рівня функції мети; 2 – оптимальний розв'язок

Алгоритм методу проекції градієнта Розена.

Початковий етап. Задається точка $Z^0 \in G_i$. Представимо матриці A та b у вигляді (A_1, A_2) і (b_1, b_2) відповідно, де $A_1 Z^0 = b_1$, $A_2\ Z^0 < b_2$. Приймемо $k = 1$ та перейдемо до основного етапу.

Основний етап. Крок 1. Якщо A_1 пуста (не містить жодного стовпчика), то покладемо $P = E$. В іншому випадку приймемо $P = E - A_1^{-1}(A_1\ A_1^{m})^{-1}A_1$. Знайдемо вектор спуску $d_k = -P\nabla\chi(Z^k)$. Якщо $d_k \neq 0$, то перейдемо до кроку 2. Якщо $d_k = 0$ і A_1 пуста, то зупинитися; Z^k – точка Кунна-Таккера. В іншому випадку (A_1 не пуста) приймемо $u = -(A_1A_1^{m})^{-1}A_1\nabla\chi(Z^k)$. Якщо $u \geq 0$, то зупинитися; Z^k – точка Кунна-Таккера. В іншому випадку виберемо від'ємну компоненту u_j цього вектора і перевизначимо матрицю A_1, викресливши рядок, який відповідає u_j та повторимо крок 1.

Крок 2. Знаходиться наближення $Z^{k-1} = Z^k + \beta_k \cdot d_k$, яке належить променю, що виходить з точки Z^k і має напрямок вектора d_k. β_k знаходиться з умови:

$$\beta_k = argmin\chi(Z^k + \beta\ d_k), \quad 0 \leq \beta \leq \beta_{max},$$

де

$$\beta_{max} = \begin{cases} \infty \text{ якщо } d \leq 0 \\ min\left\{\dfrac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i}\right\}, \text{ в іншому випадку} \end{cases}$$

$$\hat{b}_i = b_2 - A_2 Z^k,\ d = a_2 d_k.$$

Необхідно зауважити, що в загальному випадку функція мети наведеної задачі багатоекстремальна, тобто для знаходження β_k недоцільно використовувати симетричні методи (такі як метод Фібоначі, метод золотого перетину). Найбільш придатним для використання в загальному випадку є метод простого перебору.

В загальному випадку кількість підмножин G_i, а значить і підзадач мінімізації функції мети, дуже велика.

Наприклад, нехай необхідно розмістити m джерел у двовимірній ($n = 2$) області Ω. Далі наводяться деякі розрахунки кількості підзадач, які необхідно буде розв'язати, в залежності від кількості розміщуваних джерел (табл. 1).

Таблиця 1

Вимірність простору n	2			
Кількість джерел m	3	4	5	6
Кількість підзадач r	64	4096	1048576	2^{30}

Як бачимо, вже у випадку 6-ти джерел кількість підзадач вже настільки велика, що всіх їх розв'язати за якийсь прийнятний відрізок часу неможливо.

Тому є сенс застосувати до розв'язування наведеної задачі оптимізації направлений перебір підмножин припустимих розв'язків.

Направлений перебір підмножин полягає у виборі наступної підзадачі для розв'язування таким чином, щоб до її множини припустимих розв'язків G_k належав би розв'язок Z^{k-1*} попередньої підзадачі.

Спочатку знаходиться розв'язок першої підзідачі – Z^{1*}, тобто знаходиться розв'язок задачі оптимізації на першій підмножині області припустимих розв'язків G_1, що задана системою лінійних нерівностей. Наступна підмножина області припустимих розв'язків, на якій буде проводитись подальша оптимізація, визначається як підмножина, якій належить розв'язок Z^{1*} і що не співпадає з G_1. Якщо в результаті пошуків не знайдено жодної підмножини, відмінної від вихідної G_1, то процес розв'язку припиняється, так як знайдена точка не належить ніякій іншій підмножині області припустимих розв'язків. Інакше відшукується розв'язок задачі на знайденій G_i. За початкову точку при розв'язуванні цієї підзадачі методом проекції градієнта Розена обирається розв'язок попередньої підзадачі.

Якщо отриманий розв'язок підзадачі співпадає з розв'язком попередньої підзадачі, і всі підмножини, яким належить даний розв'язок, вже розглядалися, то процес розв'язання припиняється, і знайдений розв'язок останньої підзадачі буде розв'язком задачі оптимізації. В іншому випадку, знаходиться наступна підмножина, і процес розв'язування повторюється.

На основі вищенаведеного, алгоритм модифікованого методу проекції градієнта Розена для розв'язування задачі оптимізації розміщення дискретних джерел фізичного поля матиме такий вигляд:

1. Задається початкова точка $Z^0 \in G_1$; i присвоюється значення 1.

2. Знаходиться розв'язок задачі на підмножині G_i. В результаі отримується точка Z^{i^*}.

3. Знаходиться номер k підмножини припустимих розв'язків, якій належав би знайдений розв'язок Z^{i^*} і виконувалась би умова $k \neq i$.

4. Якщо розв'язок Z^{i^*} належить лише підмножині G_i, чи задача вже розв'язувалась на кожній зі знайдених підмножин, і розв'язок задачі на них не змінився, то процес розв'язання припиняється, і знайдене наближення Z^{i*} визнається за розв'язок задачі. В іншому випадку, Z^{i^*} вважається початковою точкою, і присвоюється значення k та здійснюється перехід до пункту 2 алгоритму.

Модифікацію даного методу можна доповнити, якщо на початку розв'язання задачі шукати розв'язок не на першій підмножині області припустимих розв'язків, а вибрати будь-яку з можливих, наприклад, випадковим чином. Тоді в першому пункті алгоритму значення i може бути в діапазоні від 1 до r. Також можна робити декілька проб оптимізації, кожного разу починаючи оптимізацію з різних підмножин. В такому разі критерієм зупинки може стати, наприклад, час, витрачений на розв'язування задачі. За розв'язок задачі визнається найкращий з одержаних за цей час результатів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г., Путятін В.П.* Розміщення джерел фізичних полів. – К.: Наук. думка, 1981. – 184 с.
2. *Стоян Ю.Г., Яремчук С.И., Крыжановский В.Б.* Дифференцируемость поля дискретных источников по параметрам их размещения / Доповіді національної Академії наук України, 1995. – № 10. – С. 38–40.
3. *Базара М., Шетті К.* Нелінійне програмування. Теорія і алгоритми. – М.: Мир, 1982. – 583 с.

ЖОВНОВСЬКИЙ Дмитро Олександрович – студент Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- методи оптимізації;
- комп'ютерне моделювання.

РУДЮК Лідія Василівна – студентка Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- методи оптимізації;
- комп'ютерне моделювання.

САВАНЕВІЧ Костянтин Євгенович – викладач кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- оптимізація комунікації між відкритими системами;
- комп'ютерне моделювання.

ЯРЕМЧУК Світлана Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- екстремальні задачі;
- математичне моделювання.

Подано 16.12.1999.