УДК 681.325

**Т.М. Локтікова, ст. викл.**
**Є.А. Остринський, студ.**
*Житомирський інженерно-технологічний інститут*

# ВИКОРИСТАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ОЗНАК ПРИ РОЗПІЗНАВАННІ ТРИВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ

*Вибір простору ознак, в якому здійснюється розпізнавання, багато в чому визначає ефективність цієї процедури. В залежності від застосування в тій або іншій системі ознаки повинні задовольняти ряду вимог. Зокрема, на практиці часто виникає задача розпізнавання довільно розташованих об'єктів. Розглядаються принципи організації процедури виділення ознак, що інваріантні до зсуву та повороту об'єкта, на основі використання моментів.*

Серед існуючих підходів до розпізнавання об'єктів можна виділити такі: методи, засновані на визначенні міри подібності за збігом значень яскравості точок потокового та еталонного зображень; кореляційні методи, засновані на обчисленні взаємної кореляційної функції; методи, що використовують обчислення відстані Левенштейна, що виконується з застосуванням методу динамічного програмування; метод крос-кореляції; методи, що використовують для розпізнавання системи геометричних ознак. Проте перераховані методи або дозволяють одержати прийнятні часові характеристики тільки при значному розпаралелюванні обчислювального процесу, або мають обмежену розподільчу можливість і слабку завадозахищеність.

З точки зору завадозахищеності, найбільш зручно в якості ознак використовувати інтегральні характеристики зображення, у якості яких багатьма авторами обираються моменти. До достоїнств інтегрального опису зображення відносять порівняльну простоту його одержання та легкість нарощування ансамблю властивостей, високу завадозахищеність.

### Параметри положення тривимірного об'єкта

Будемо розглядати випадок, коли розпізнавання виконується, виходячи з візуальної інформації, що отримана від однієї ТВ-камери (2D підхід), і коли відстань від ТВ-камери до об'єкта набагато більша його лінійних розмірів.

Положення тривимірного об'єкта відносно однієї ТВ-камери характеризується шістьма параметрами (рис. 1,*а*):

$\alpha, \beta, \gamma$ – кути повороту об'єкта відносно осей координат;

$\Delta x$, $\Delta y$ – зсуви об'єкта в площині ТВ-камери;

$k$ – коефіцієнт зміни масштабу зображення при переміщенні об'єкта.

Зміна положення об'єкта на зображенні характеризується параметрами $\Delta x$, $\Delta y$, $k$, $\alpha$ (рис. 1,*б*), інваріантності розпізнавання до яких будемо добиватися шляхом вибору відповідної системи ознак. Для одержання інваріантності розпізнавання по параметрах $\beta$, $\gamma$ необхідно побудувати еталонну систему ознак для різних значень кутів $\beta$ та $\gamma$.

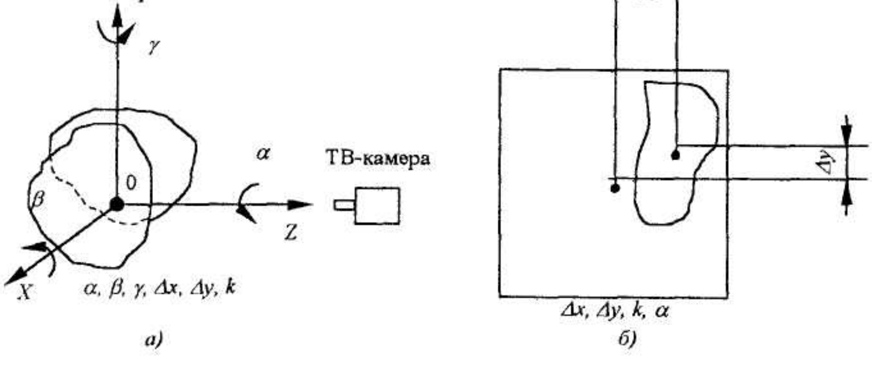


*Рис. 1. Параметри положення тривимірного об'єкта*

**Знаходження інваріантних ознак**

Будемо розглядати зображення об'єкта як бінарну функцію $f(x, y)$ яскравості точок з координатами $x$ та $y$. У загальному вигляді функція яскравості описується як $f(x, y, \Delta x, \Delta y, k, \alpha)$. Зміну положення об'єкта на зображенні будемо розглядати як дію групи $g(\Delta x, \Delta y, k, \alpha)$ у просторі $XY$.

Завдання полягає в побудові інваріантів до дії групи $g$, що залежать тільки від характеру функції $f(x, y)$.

Інваріантності до зсувів $\Delta x$, $\Delta y$ можна досягти шляхом переносу початку координат у точку центра ваги зображення, тому обмежимося розглядом групи $g(k, \alpha)$.

Дію групи $g(k, \alpha)$ зручно розглядати в полярній системі координат (у просторі $R\Phi$), де функція яскравості прийме вигляд $f(r, \varphi)$.

Введемо закон множення для групи $g(k, \alpha)$. Нехай $g_1 = g(k_1, \alpha_1)$ і $g_2 = g(k_2, \alpha_2)$. Тоді:

$$g_1 \cdot g_2 = g(k_1 k_2, \alpha_1 + \alpha_2) . \tag{1}$$

Формула (1) відповідає послідовно виконаним масштабуванню з коефіцієнтами $k_1$ і $k_2$ та повороту на кути $\alpha_1$ і $\alpha_2$. Дійсно,

$$\left.\begin{aligned} r' &= k_1 r \\ r'' &= k_2 r' \end{aligned}\right\} \Rightarrow r'' = k_1 k_2 r ,$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \varphi + \alpha_1 \\ \varphi'' &= \varphi' + \alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi'' = \varphi + (\alpha_1 + \alpha_2) .$$

Суттєве представлення групи $g(k, \alpha)$ має вигляд:

$$T(g) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} . \tag{2}$$

Представлення (2) групи $g(k, \alpha)$ має вигляд:

$$T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2) ; \tag{3}$$

$$T(e) = E , \tag{4}$$

де $e$ – одиниця групи (у даному випадку $e = g(1,0)$);

$E$ – одинична матриця.

Дійсно,

$$T(g_1) \cdot T(g_2) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 + \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 k_2 \end{bmatrix} = T(g_1 \cdot g_2) ,$$

$$T(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E .$$

Дію групи $g(k, \alpha)$ на просторі $R\Phi$ можна записати у вигляді:

$$g_x \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \\ \varphi' \end{bmatrix} .$$

Зафіксуємо деяку точку $(r_0, \varphi_0)$. Знайдемо групу $g_x$ таку, що

$$g_x \begin{bmatrix} r_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} .$$

Для групи $g_x(k_x, \alpha_x)$ запишемо:

$$\begin{cases} r = k_x r_0 \\ \varphi = \varphi_0 + \alpha_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_x = \dfrac{r}{r_0} \\ \alpha_x = \varphi - \varphi_0 \end{cases}$$

Тоді група $g_x(k_x, \alpha_x)$ має вигляд:

$$g_x = g(\frac{r}{r_0}, \varphi - \varphi_0) .$$

Суттєве представлення, що відповідає групі $g_x$, таке:

$$T(g_x)=\begin{bmatrix}1 & \varphi-\varphi_0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{r}{r_0}\end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Представлення (5) також має властивості (3) та (4). У матриці (5) усі три стовпчики є суттєвими. Проте, оскільки постійна компонента знаходиться в першому і другому стовпчиках, перший стовпчик із розгляду можна виключити. Знайдемо пряму суму суттєвих стовпчиків представлення (5):

$$t(r,\varphi)=t_2(r,\varphi)\dot{+}t_3(r,\varphi)=\begin{bmatrix}\varphi-\varphi_0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\dot{+}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{r}{r_0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi-\varphi_0\\ 1\\ \dfrac{r}{r_0}\end{bmatrix}, \qquad (6)$$

де $t_j(r,\ \varphi)$ – $j$-й суттєвий стовпчик представлення $T(g_x)$.

Побудуємо відносно інваріантну міру $drd\varphi$ в просторі $R\Phi$ у вигляді:

$$dr'd\varphi'=d(gr)\cdot d(g\varphi)=\chi(g)drd\varphi\,, \qquad (7)$$

де $\chi(g)$ – вага відносно інваріантної міри $drd\varphi$, що є одновимірним представленням групи $g$. Тоді отримаємо:

$$dr'd\varphi'=d(kr)\cdot d(\varphi+\alpha)=kdrd\varphi\,.$$

Таким чином,

$$\chi(g)=k\,. \qquad (8)$$

Так як існує відносно інваріантна міра $drd\varphi$ і суттєве представлення $T(g)$ групи $g$, то існує повна система інваріантів $\{I_p(f)\}$, де $p$ = 1, 2, ..., кожний інваріант якої має вигляд:

$$I_p(f)=F_p(M^{i_0}(f),\,M^{i_1}(f),\dots,M^{i_{n_p}}(f))\,, \qquad (9)$$

де $n_p<\infty$; $F_p$ – функція зазначених аргументів; $M^i(f)$ – векторозначні лінійні відображення, що називаються узагальненими моментами,

$$M^i(f)=\iint_{r\varphi}f(r,\varphi)\cdot[s^it(r,\varphi)]drd\varphi\,, \qquad (10)$$

де $s^it(r,\ \varphi)$ – $i$-а симетризована степінь вектора (6).

Нескінченна послідовність узагальнених моментів (10) повністю описує функцію $f(r,\ \varphi)$. При $i<\infty$ опис функції $f(r,\ \varphi)$ виконується з кінцевою похибкою $\varepsilon>0$. У подальших розрахунках у виразі (10) приймемо $i=2$, а у виразі (9) – $n_p=1$. Тоді відповідні вирази будуть мати вигляд:

$$I_p=F_p(M^2(f))\,, \qquad (11)$$

$$M^2(f)=\iint_{r\varphi}f(r,\varphi)\cdot[s^2t(r,\varphi)]drd\varphi\,. \qquad (12)$$

Слід зауважити, що $M^i(f)$, а в даному випадку $M^2(f)$, є вектором, а $I_p(f)$ – скаляр (тому що $s^it(r,\ \varphi)$ – вектор).

Симетризована степінь вектора є вектором, що складається з максимально можливої кількості лінійно незалежних компонент тензорної степені вектора.

Обчислимо тензорний квадрат вектора $t(r,\ \varphi)$:

$$\otimes^2 t(r,\varphi)=\begin{bmatrix}\varphi-\varphi_0\\ 1\\ \dfrac{r}{r_0}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\varphi-\varphi_0\\ 1\\ \dfrac{r}{r_0}\end{bmatrix}=$$

$$=[(\varphi-\varphi_0)^2,\varphi-\varphi_0,\frac{r(\varphi-\varphi_0)}{r_0},\varphi-\varphi_0,1,\frac{r}{r_0},\frac{r(\varphi-\varphi_0)}{r_0},\frac{r}{r_0},\frac{r^2}{r_0^2}]^T\,.$$

Тоді симетризований квадрат вектора $t(r,\ \varphi)$ буде дорівнювати:

$$s^2t(r,\varphi)=[(\varphi-\varphi_0)^2,\,\varphi-\varphi_0,\frac{r\,(\varphi-\varphi_0)}{r_0},1,\frac{r}{r_0},\frac{r^2}{r_0^2}]^T\,. \qquad (13)$$

Введемо позначення:

$$M^2(f) = [m_{02}, m_{01}, m_{11}, m_{00}, m_{10}, m_{20}]^T . \tag{14}$$

Тоді, з урахуванням (12) і (13), отримаємо значення компонент вектора (14):

$$m_{02} = \iint_{r\varphi} f(r, \varphi) \cdot (\varphi - \varphi_0)^2 drd\varphi , \; m_{01} = \iint_{r\varphi} f(r, \varphi) \cdot (\varphi - \varphi_0) drd\varphi ;$$

$$m_{11} = \iint_{r\varphi} f(r, \varphi) \cdot \frac{r(\varphi - \varphi_0)}{r_0} drd\varphi , \; m_{00} = \iint_{r\varphi} f(r, \varphi) drd\varphi ; \tag{15}$$

$$m_{10} = \iint_{r\varphi} f(r, \varphi) \cdot \frac{r}{r_0} drd\varphi , \; m_{20} = \iint_{r\varphi} f(r, \varphi) \cdot \frac{r^2}{r_0^2} drd\varphi .$$

Отримані вирази (15) при $r_0 = 1$ та $\varphi_0 = 0$ є звичайними моментами функції $f(r, \varphi)$:

$$m_{pq} = \iint_{r\varphi} f(r, \varphi) r^p \varphi^q drd\varphi . \tag{16}$$

Якщо $M = M(f(x))$, тоді позначимо $M' = M'(f(g^{-1}x))$, де $g^{-1}$ – обернений елемент групи. Очевидно, що

$$g^{-1}(k, \alpha) = g(\frac{1}{k}, -\alpha) .$$

Як відомо, якщо існує відносно інваріантна міра $drd\varphi$ і суттєве представлення $T(g)$, то узагальнені моменти мають таку властивість:

$$M' = \chi(g) \cdot s^i [T(g)] \cdot M , \tag{17}$$

тобто при групових зсувах функції узагальнені моменти перетворюються «самі на себе».

Позначимо

$$M'^2(f) = [m'_{02}, m'_{01}, m'_{11}, m'_{00}, m'_{10}, m'_{20}]^T . \tag{18}$$

Симетризована степінь матриці визначається аналогічно симетризованій степені вектора. Обчислимо тензорний квадрат матриці $T(g)$:

$$\otimes^2 T(g) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & k\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} .$$

Тоді симетризований квадрат матриці $T(g)$ буде дорівнювати:

$$s^2[T(g)] = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & k\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} . \tag{19}$$

З урахуванням (8), (14), (18), (19) вираз (17) запишеться у вигляді:

$$\begin{bmatrix} m'_{02} \\ m'_{01} \\ m'_{11} \\ m'_{00} \\ m'_{10} \\ m'_{20} \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & k\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{02} \\ m_{01} \\ m_{11} \\ m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \end{bmatrix} . \tag{20}$$

Продиференціюємо вираз (20) по $k$ і $\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial k}\begin{bmatrix} m'_{02} \\ m'_{01} \\ m'_{11} \\ m'_{00} \\ m'_{10} \\ m'_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 & 2k\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{02} \\ m_{01} \\ m_{11} \\ m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\begin{bmatrix} m'_{02} \\ m'_{01} \\ m'_{11} \\ m'_{00} \\ m'_{10} \\ m'_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 0 & 2k\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{02} \\ m_{01} \\ m_{11} \\ m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

У групі перетворення (20) одиниця має координати $(k,\ \alpha) = (1,\ 0)$. Підставивши значення $k = 1$ та $\alpha = 0$ у вирази (21) та (22), отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial k}\begin{bmatrix} m'_{02} \\ m'_{01} \\ m'_{11} \\ m'_{00} \\ m'_{10} \\ m'_{20} \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{k=1 \\ \alpha=0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{02} \\ m_{01} \\ m_{11} \\ m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\begin{bmatrix} m'_{02} \\ m'_{01} \\ m'_{11} \\ m'_{00} \\ m'_{10} \\ m'_{20} \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{k=1 \\ \alpha=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{02} \\ m_{01} \\ m_{11} \\ m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Введемо позначення:

$$\xi_k(M) = \frac{\partial M'}{\partial k}\bigg|_{\substack{k=1 \\ \alpha=0}}, \quad \xi_\alpha(M) = \frac{\partial M'}{\partial \alpha}\bigg|_{\substack{k=1 \\ \alpha=0}}.$$

Тоді, з урахуванням (23) і (24), отримаємо:

$$\begin{aligned} &\xi_k(M) = [m_{02},\, m_{01},\, 2m_{11},\, m_{00},\, 2m_{10},\, 3m_{20}]^T, \\ &\xi_\alpha(M) = [2m_{01},\, m_{00},\, m_{10},\, 0,\, 0,\, 0]^T. \end{aligned} \tag{25}$$

Повна система інваріантів (11) знаходиться шляхом розв'язання системи диференціальних рівнянь у часткових похідних вигляду:

$$\begin{cases} \xi_k(M) \cdot gradF = 0 \\ \xi_\alpha(M) \cdot gradF = 0 \end{cases} \tag{26}$$

З урахуванням (25) рівняння (26) будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} m_{02}\dfrac{\partial F}{\partial m_{02}} + m_{01}\dfrac{\partial F}{\partial m_{01}} + 2m_{11}\dfrac{\partial F}{\partial m_{11}} + m_{00}\dfrac{\partial F}{\partial m_{00}} + 2m_{10}\dfrac{\partial F}{\partial m_{10}} + 3m_{20}\dfrac{\partial F}{\partial m_{20}} = 0 \\ 2m_{01}\dfrac{\partial F}{\partial m_{02}} + m_{00}\dfrac{\partial F}{\partial m_{01}} + m_{10}\dfrac{\partial F}{\partial m_{11}} = 0 \end{cases}. \tag{27}$$

Розв'язуючи систему (27), одержимо три групи розв'язків:

$$F = \frac{m_{10}^3}{m_{20}^2}, \quad F = \frac{m_{00}^3}{m_{20}}, \quad F = \frac{m_{00}^2}{m_{10}}; \tag{28}$$

$$F=\frac{m_{01}^2-m_{00}m_{02}}{m_{00}^2},\quad F=\frac{m_{01}^2-m_{00}m_{02}}{m_{10}},\quad F=\frac{(m_{01}^2-m_{00}m_{02})^3}{m_{20}^2};$$

$$F=\frac{m_{11}m_{00}-m_{01}m_{10}}{m_{00}^3},\quad F=\frac{m_{11}}{m_{10}}-\frac{m_{01}}{m_{00}},\quad F=\frac{(m_{11}m_{00}-m_{01}m_{10})^3}{m_{00}^3m_{20}^2}.$$

З-поміж функцій (28) нас цікавлять тільки функціонально незалежні. Їх вибір можна здійснювати довільно, проте доцільно віддавати перевагу тим з них, що легше обчислюються. Наприклад, можна обрати такі функції:

$$F_1=\frac{m_{10}}{m_{00}^2},\quad F_2=\frac{m_{20}}{m_{00}^3},\quad F_3=\frac{m_{01}^2-m_{00}m_{02}}{m_{00}^2},\quad F_4=\frac{m_{11}m_{00}-m_{01}m_{10}}{m_{00}^3}. \tag{29}$$

Вираз (29) є повною системою інваріантів і має такі властивості:

1) якщо зміна функції зображення $f(r,\varphi)$ викликана зміною параметрів $k$ і $\alpha$, то функції (29) зберігають свої значення;

2) якщо зміна функції зображення викликана іншими причинами, то хоча б одна з функцій системи (29) змінить своє значення;

3) функції (29) функціонально незалежні.

Перераховані властивості дозволяють використовувати функції (29) в якості ознак об'єкта, що є інваріантними до повороту $\alpha$ і зміни масштабу $k$.

Зауважимо, що функції (29) залежать від скінченної кількості моментів функції зображення $f(r,\varphi)$ у полярній системі координат. Проте функцію $f(r,\varphi)$ цілком визначає нескінченна послідовність моментів (16). Тому ми можемо говорити лише про апроксимацію функції зображення моментними характеристиками не вище певного порядку, на підставі яких будується повна система інваріантів.

Для збільшення ансамблю ознак (інваріантів) необхідно функцію зображення $f(r,\varphi)$ апроксимувати великою кількістю моментів. Для цього у формулі (10) необхідно прийняти $2 < i < \infty$ і провести розрахунок інваріантів (9) знову. В кінцевій системі функцій $F_1, \ldots, F_n$ перші чотири будуть збігатися з (29). Значення функцій $F_1, \ldots, F_n$ можна розглядати як $n$-вимірний вектор ознак об'єкта.

Слід зазначити, що спроба одержати систему функцій, які залежать від моментів та інваріантні до повороту, зміни масштабу та зсувам об'єкта на зображенні (тобто до дії групи $g(\Delta x, \Delta y, k, \alpha)$), не призвела до успіху ні в декартовій системі координат, ні в полярній. Причина цього − неможливість побудови відносно інваріантної міри у вигляді (7) для групи $g(\Delta x, \Delta y, k, \alpha)$.

## Апроксимація функції зображення моментами

Двовимірна функція зображення однозначно визначається нескінченною послідовністю її моментів. Проте на практиці для цілей розпізнавання використовується скінченна кількість моментів, що апроксимують функцію зображення з похибкою $\varepsilon > 0$. Очевидно, що якість розпізнавання однозначно залежить від похибки $\varepsilon$. При цьому кількість моментів, достатня для упевненого розпізнавання, залежить від виду функції зображення об'єкта.

Питання вибору кількості моментів для розпізнавання вирішується, як правило, експериментально, з урахуванням специфіки кожного об'єкта, що розпізнається.

Так, наприклад, в експериментах з розпізнавання невеликих вибірок рукописних символів частота помилок розпізнавання складала декілька відсотків при використанні моментів до шостого порядку включно.

Значний інтерес становить одержання аналітичних оцінок похибки апроксимації функції зображення скінченною сукупністю моментів. Розв'язання цієї задачі пов'язане з деякими труднощами, тому будемо використовувати класичний метод дослідження: розіб'ємо складну задачу на декілька більш простих, що спробуємо вирішити. Зокрема, розкласти функцію зображення в ряд, коефіцієнтами якого є моменти. Оскільки функція зображення, як правило, є дискретною та заданою на кінцевому інтервалі, обмежимося розглядом саме таких функцій. Для простоти розглянемо одновимірний випадок. Нехай функція $f(x)$ задана дискретно з амплітудою $n$ точок $f_i(i=\overline{0,n-1})$. Тоді її можна записати у такому вигляді:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1} f_i\cdot\delta(x-i). \tag{30}$$

Якщо розглядати функцію $f(x)$ як спектр деякого сигналу, то таким сигналом, очевидно, буде сума $n$ комплексних експонент:

$$F(y)=\sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot e^{j\frac{2\pi i}{n}y} . \tag{31}$$

Функції (30) та (31) пов'язані перетворенням Фур'є:

$$f(x)=\frac{1}{n}\int_0^n e^{-j\frac{2\pi x}{n}y} \cdot F(y)dy . \tag{32}$$

У виразі (31) розкладемо комплексну експоненту в ряд Тейлора:

$$e^{j\frac{2\pi i}{n}y}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j\dfrac{2\pi i}{n}y)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2\pi i}{n})^k \cdot \frac{(jy)^k}{k!} . \tag{33}$$

З урахуванням (33) вираз (31) перепишеться таким чином:

$$F(y)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(f_i \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^k \cdot \frac{(jy)^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2\pi}{n}\right)^k \cdot \frac{(jy)^k}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot i^k\right). \tag{34}$$

У виразі (34) остання сума є моментом $k$-го порядку функції $f(x)$:

$$m_k=\sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot i^k . \tag{35}$$

З огляду на (35) вираз для $F(y)$ запишеться так:

$$F(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}\cdot\left(\frac{j2\pi y}{n}\right)^k . \tag{36}$$

Вираз (36) підставимо у формулу перетворення Фур'є (32). Одержимо:

$$f(x)=\frac{1}{n}\int_0^n e^{-j\frac{2\pi x}{n}y}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}\cdot\left(\frac{j2\pi y}{n}\right)^k\right)dy=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}\cdot\left(\frac{j2\pi}{n}\right)^k\cdot\left(\int_0^n y^k \cdot e^{-j\frac{2\pi x}{n}y}dy\right) . \tag{37}$$

Останній інтеграл у правій частині (37) дорівнює:

$$\int_0^n y^k \cdot e^{-j\frac{2\pi x}{n}y}dy=\left(\frac{n}{j2\pi}\right)^{k+1}\cdot\frac{jk!}{x^{k+1}}\left(1-\sum_{r=0}^{k}\frac{(-j2\pi x)^r}{r!}\right). \tag{38}$$

Підставляючи (38) у вираз (37), отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}\cdot\left(\frac{j2\pi}{n}\right)^k\cdot\left(\frac{n}{j2\pi}\right)^{k+1}\cdot\frac{jk!}{x^{k+1}}\left(1-\sum_{r=0}^{k}\frac{(-j2\pi x)^r}{r!}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot \frac{j}{2\pi x^{k+1}}\left(1-\sum_{r=0}^{k}\frac{(-j2\pi x)^r}{r!}\right) . \tag{39}$$

Введемо позначення:

$$h_k(x)=\frac{j}{2\pi x^{k+1}}\cdot\left(1-\sum_{r=0}^{k}\frac{(-j2\pi x)^r}{r!}\right). \tag{40}$$

Тоді, з урахуванням (40), вираз (39) перепишеться у вигляді:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h_k(x) . \tag{41}$$

Співвідношення (41) є розкладом функції $f(x)$ в ряд по базисних функціях $h_k(x)$. Коефіцієнтами такого розкладання є моменти. Базисні функції (40) – комплексні, проте при нескінченній верхній межі суми (41) функція $f(x)$ – дійсна.

Наведемо перші базисні функції:

$$
\begin{aligned}
&h_0(x) = 0\,;\\
&h_1(x) = -\frac{1}{x}\,;\\
&h_2(x) = -\frac{1}{x^2} + j\frac{\pi}{x}\,;\\
&h_3(x) = \left(\frac{2\pi^2}{3x} - \frac{1}{x^3}\right) + j\frac{\pi}{x^2}\,;\\
&h_4(x) = \left(\frac{2\pi^2}{3x^2} - \frac{1}{x^4}\right) + j\left(-\frac{\pi^3}{3x} + \frac{\pi}{x^3}\right);\\
&h_5(x) = \left(-\frac{2\pi^4}{15x} + \frac{2\pi^2}{3x^3} - \frac{1}{x^5}\right) + j\left(-\frac{\pi^3}{3x^2} + \frac{\pi}{x^4}\right);\\
&h_6(x) = \left(-\frac{2\pi^4}{15x^2} + \frac{2\pi^2}{3x^4} - \frac{1}{x^6}\right) + j\left(\frac{2\pi^5}{45x} - \frac{\pi^3}{3x^3} + \frac{\pi}{x^5}\right);\\
&h_7(x) = \left(\frac{4\pi^6}{315x} - \frac{2\pi^4}{15x^3} + \frac{2\pi^2}{3x^5} - \frac{1}{x^7}\right) + j\left(\frac{2\pi^5}{45x^2} - \frac{\pi^3}{3x^4} + \frac{\pi}{x^6}\right).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Виходячи з (40) та (42), можна вивести рекурентну формулу для визначення базисних функцій:

$$
h_{k+1}(x) = \frac{1}{x}\left(h_k(x) - \frac{(-j2\pi)^k}{(k+1)!}\right). \tag{43}
$$

За формулами (40) і (43) можна визначити базисні функції розкладання (41) будь-якого порядку.

Подальше дослідження апроксимаційних можливостей моментів функцій зображення повинно йти в такому напрямку. Необхідно розрахувати $p$-й залишковий член $R_p$ ряду (41) та узагальнити результати для двовимірного випадку функції зображення.

## ЛІТЕРАТУРА:


1. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – Кн. 2. – 480 с.
2. *Анисимов В.В., Курганов В.Д., Злобин В.К.* Распознавание и цифровая обработка изображений. – М.: Высш. шк., 1983. – 450 с.
3. *Васильев В.И.* Распознающие системы: Справочник. – Киев: Наук. думка, 1983. – 422 с.
4. *Буймов А.Г.* Корреляционно-экстремальная обработка изображений. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. – 134 с.
5. СБИС для распознавания образов и обработки изображений: Пер. с англ./Под ред. К.Фу. – М.: Мир, 1988. – 248 с.
6. Применение методов Фурье-оптики: Пер. с англ./Под ред. Г.Старка. – М.: Радио и связь, 1988. – 536 с.
7. *Шлезингер М.И.* Математические средства обработки изображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
8. *Шведов А.М., Шмидт А.А., Якубович В.А.* Инвариантные системы признаков в распознавании образов //Автоматика и телемеханика, 1979. – № 3. – С. 131–142.


ЛОКТІКОВА Тамара Миколаївна – старший викладач кафедри автоматики та управління в технічних системах Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– цифрова обробка зображень та розпізнавання образів.

ОСТРИНСЬКИЙ Євген Анатолійович – студент Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– цифрова обробка зображень та розпізнавання образів.

Подано 2.12.1999.