

**ОБРОБКА МАТЕРІАЛІВ У МАШИНОБУДУВАННІ**

УДК 621.914

А.Є. Бабенко, д.т.н., проф.

Н.С. Равська, д.т.н., проф.

О.О. Боронко, к.т.н., доц.

В.С. Парненко, аспір.

*Національний технічний університет України "КПІ"*

**ПРО ВПЛИВ НА КОЛИВАННЯ ФРЕЗИ КУТА НАХИЛУ ЗУБЦІВ**

*Розглянуті питання впливу кута нахилу зубців фрези на її коливання.*

При дослідженні коливань фрези припускається, що коливання є вимушеними і викликаються ударами зубців при врізанні та виході з різця, зусилля різання пропорційне кількості ріжучих зубців, розглядається усталений процес різання пластини. В процесі різання фреза обертається з кутовою швидкістю  $p$ , а розрізувана пластинка рухається поступально, при цьому точка прикладення сил не змінює свого положення в просторі. При аналізі коливань фрези зручніше, як звичайно, розглядати деформації фрези в системі координат, нерухомій відносно фрези. Тому при аналізі коливань фрези переходимо до системи координат, зв'язаної з фрезою. В цій системі координат сила, яка діє на зубці фрези, переміщується по колу з кутовою швидкістю  $p$ . Рівняння коливань фрези має вигляд:

$$D\nabla^4 w = -\gamma h \ddot{w} + Q(\rho, \varphi, t). \tag{1}$$

Розв'язок рівняння (1) може бути знайдений у вигляді ряду Фур'є за власними функціями однорідного рівняння, яке відповідає вільним коливанням:

$$\nabla^4 w = -\frac{\gamma h}{D} \ddot{w}, \tag{2}$$

де  $\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  – оператор Лапласа.

Якщо шукати розв'язок рівняння (2) у вигляді  $w(\rho, \varphi, t) = W(\rho, \varphi) \cos \omega t$ , то задача приводить до рівняння визначення власних форм  $W(\rho, \varphi)$ :

$$\nabla^4 W(\rho, \varphi) - k^4 W(\rho, \varphi) = 0, \tag{3}$$

де  $k^4 = -\frac{\gamma h a^4 \omega^2}{D}$ .

Розв'язками цього рівняння є функції:

$$W_n(\rho, \varphi) = [AJ_n(k\rho) + BI_n(k\rho) + CY_n(k\rho) + DK_n(k\rho)] \cos n\varphi,$$

де  $J_n, I_n, Y_n, K_n$  – функції Бесселя першого та другого роду.

Врахування граничних умов для пластинки, яка закріплена в центрі, призводить до умови  $C = D = 0$  і

$$W_n(\rho, \varphi) = [AJ_n(k\rho) + BI_n(k\rho)]\cos n\varphi.$$

Цей розв'язок представимо у вигляді суми розв'язків, які відповідають характеристичним числам отриманого рівняння. Характеристичні числа рівняння  $k_{mn}$  знаходяться з граничних умов на вільному зовнішньому контурі або іншими методами. Спектр власних частот знаходиться за характеристичними числами  $\omega_{mn}^2 = (Dk_{mn}^4)/(\gamma h)$ . Це призводить до співвідношення:

$$W_n(\rho, \varphi) = \cos n\varphi \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} = \cos n\varphi \sum_{m=1}^{\infty} [A_{mn}J_n(k_{mn}\rho) + B_{mn}I_n(k_{mn}\rho)]. \tag{4}$$

В розглядуваному випадку вимушених коливань збурююча сила  $Q(\rho, \varphi, t)$  є періодичною та може бути розкладена в ряд Фур'є. Якщо збурююча сила гармонічна  $Q(\rho, \varphi, t) = Q(\rho, \varphi)\cos pt$ , то розв'язок задачі про вимушені коливання можна представити у вигляді [1]:

$$w(\rho, \varphi, t) = \cos pt \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(\rho, \varphi) \frac{q_{mn}}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 - p^2)}, \tag{5}$$

де

$$q_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} Q(\rho, \varphi) W_{mn}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi;$$

$$M_{mn} = \gamma h \iint_F W_{mn}^2 dF.$$

Таким чином, розв'язок задачі про вимушені коливання зведеться до визначення власних частот, власних форм коливань та розкладу збурюючих сил на гармонічні складові, тобто до розкладу їх в ряд Фур'є. Для цього можна розкласти в ряд силу, яка діє на один зуб, а результуючу силу, яка виникає за рахунок дії всіх зубців, знайти як їх суму. Якщо різальна кромка зуба паралельна осі фрези, то сили, прикладені до вершин зубців фрези, і є зосередженими до дугової або кутової координати. Положення кромки кожного зуба повністю визначається кутом  $\alpha_m = 2\pi m / z$ , де  $z$  – кількість зубців;  $m$  – номер зуба ( $1 \leq m \leq z$ ). Час дії сили на зуб визначається часом руху дуги обхвату  $2\psi$  фрези пластиною. Дуга (лінія різа) ковзає по зубу з кутовою швидкістю  $p$ . При цих припущеннях зусилля, яке діє на зуб і різальна кромка якого паралельна осі, можна представити у вигляді:

$$q_m = A\delta(\varphi - \alpha_m)H_m(t)\delta(\rho - a), \tag{6}$$

де  $A$  – величина сили, яка діє на зуб;

$\delta(\varphi - \alpha_m)$  – дельта-функція Дірака, яка визначає кутову координату прикладення сили;

$H_m(t)$  – функція, яка визначає час різання кожного зуба:

$$H_m(t) = \begin{cases} 0, \dots, & t < \frac{\alpha_m}{p}; \\ A, \dots, & \frac{\alpha_m}{p} \leq t \leq \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p}, \dots; \\ 0, \dots, & t > \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p}; \end{cases} \tag{7}$$

$\delta(\rho - a)$  – дельта-функція Дірака, яка визначає радіальну координату прикладення сили;

$a$  – зовнішній радіус фрези.

Якщо кут нахилу всіх зубців однаковий, то сила  $Q$ , яка діє на диск фрези перпендикулярно його площині, рівна сумі сил за рахунок кожного зуба  $Q = \sum_{m=1}^z q_m$ . В даному випадку кожен дода-

нок у виразах (6) є функцією трьох змінних, але множник  $\delta(\rho - a)$ , який визначає залежність від радіуса, для всіх доданків однаковий і не залежить від номера зуба. Тому розкладаємо в подвійний ряд за змінними  $\varphi$  і  $t$ , за якими  $q_m(\rho, \varphi, t)$  є періодичною функцією, оскільки вони визначають кожну таку складову силу:

$$q_m(\rho, \varphi, t) = \delta(\rho - a_m) \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{kn} \cos k\varphi \cos \frac{2\pi n}{t} t + b_{kn} \sin k\varphi \cos \frac{2\pi n}{t} t + c_{kn} \cos k\varphi \sin \frac{2\pi n}{t} t + d_{kn} \sin k\varphi \sin \frac{2\pi n}{t} t \right) \right\}. \quad (8)$$

Якщо різальна кромка зубців паралельна осі фрези, то коефіцієнти визначаються за формулою:

$$a_{kn} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^T \delta(\rho - a_m) H_m(t) \cos k\varphi \cos \frac{2\pi n}{t} t \, d\varphi dt = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\rho - a_m) \cos k\varphi \, d\varphi \int_0^T H_m(t) \cos \frac{2\pi n}{t} t \, dt.$$

Інші коефіцієнти  $b_{kn}$ ,  $c_{kn}$ ,  $d_{kn}$  визначаються за аналогічними формулами із заміною  $\cos k\varphi$  на  $\sin k\varphi$  і  $\cos \frac{2\pi n}{T}$  на  $\sin \frac{2\pi n}{T}$ . Оскільки функція, яка розкладається в ряд, має вигляд добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від кута  $\varphi$ , а інша – тільки від часу  $t$ , то подвійний ряд можна також представити у вигляді добутку відповідних рядів.

$$\begin{aligned} H_m(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right); \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T H_m(t) \cos \frac{2\pi k}{T} t \, dt; \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T H_m(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t \, dt; \\ a_0 &= 2 \frac{\psi}{\rho}; \\ a_k &= \frac{2}{\pi k} \cos k(\alpha_m + \psi) \sin k\psi; \\ b_k &= \frac{2}{\pi k} \sin k(\alpha_m + \psi) \sin k\psi; \\ H_m(t) &= \frac{\psi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin k\psi \left[ \cos k(\alpha_m + \psi) \cos \frac{2\pi k}{T} t + \sin k(\alpha_m + \psi) \sin \frac{2\pi k}{T} t \right]. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\delta(\varphi - \alpha_m) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos n(\varphi - \alpha_m).$$

Враховуючи, що  $T = 2\pi/\rho$ , отримуємо:

$$q_m(\rho, \varphi, t) = A\delta(\rho - a) \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos n(\varphi - \alpha_m) \right] \times \left\{ \frac{\psi}{\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin k\psi [\cos k(\alpha_m + \psi) \cos p k t + \sin k(\alpha_m + \psi) \sin p k t] \right\}. \quad (9)$$

Оскільки сумарна сила, яка діє на фрезу,  $Q = \sum_{m=1}^z q_m$ , то необхідно виділити члени, які містять  $\alpha_m = 2\pi m/z$ . Тому:

$$Q = A\delta(\rho - a) \sum_{m=1}^z \left\{ \frac{\psi}{2\pi\rho} + \frac{\psi}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos n\varphi \cos n\alpha_m - \sin n\varphi \sin n\alpha_m] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\psi [\cos k(\alpha_m + \psi) \cos pkt + \sin k(\alpha_m + \psi) \sin pkt] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos n\varphi \cos n\alpha_m - \sin n\varphi \sin n\alpha_m] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\psi [\cos k(\alpha_m + \psi) \cos pkt + \sin k(\alpha_m + \psi) \sin pkt] \right\}.$$

Змінюючи порядок підсумовування, після перетворень отримаємо:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \frac{\psi}{\rho} z + \frac{1}{\pi} \frac{\psi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\cos n\varphi \cos n\alpha_m - \sin n\varphi \sin n\alpha_m] + \\ + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\psi \sum_{m=1}^z [\cos k(\alpha_m + \psi) \cos pkt + \sin k(\alpha_m + \psi) \sin pkt] + \\ + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\psi \sum_{m=1}^z [\cos k(\alpha_m + \psi) \cos pkt + \sin k(\alpha_m + \psi) \sin pkt] \times \\ \times (\cos n\varphi \cos n\alpha_m - \sin n\varphi \sin n\alpha_m).$$

Підсумовуючи по  $m$ , отримаємо:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \frac{\psi}{\rho} z + \frac{z}{\pi} \frac{\psi}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \cos zj\varphi + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin zj\psi \cos zj(pt - \psi) + \\ + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k} \sin k\psi \begin{cases} \cos[n\varphi - k(pt - \psi)] & \text{при } k + n = zj_1 \\ 0 & \text{при } k + n \neq zj_1 \end{cases} + \\ + \begin{cases} \cos[n\varphi + k(pt - \psi)] & \text{при } k + n = zj_2 \\ 0 & \text{при } k + n \neq zj_2 \end{cases},$$

(10)

де  $j_1, j_2 = 1, 2, 3, \dots$

Якщо різальна кромка зуба нахилена під кутом  $\beta$  до осі фрези, то довжина дуги ділянки фрези, по якій розподілена сила різання, рівна  $s = \delta \operatorname{tg}\beta/a$ , де  $\delta$  – товщина фрези;  $\beta$  – кут нахилу зуба до осі фрези;  $a$  – радіус фрези. Координати дуги, по якій розподілена сила різання, можна визначити функцією:

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} 0 & \dots \varphi < \alpha_m; \\ 1 & \dots \alpha_m \leq \varphi \leq \alpha_m + s; \\ 0 & \dots \varphi > \alpha_m + s. \end{cases} \quad (11)$$

Величина сили різання змінюється внаслідок того, що має місце поступове врізання зуба, потім різання всією шириною зуба та його поступовий вихід з різця. Якщо вважати, що сила пропорційна ширині частини кромки, яка врізалась, і залежить від часу, то її величина визначається залежністю:

$$H_m(t) = \begin{cases} 0 & \dots \dots \dots t < \frac{\alpha_m}{\rho}, \\ A(pt - \alpha_m) & \dots \dots \dots \frac{\alpha_m}{\rho} \leq t < \frac{\alpha_m}{\rho} + \frac{s}{\rho}, \\ As & \dots \dots \dots \frac{\alpha_m}{\rho} + \frac{s}{\rho} \leq t \leq \frac{\alpha_m}{\rho} + \frac{2\psi}{\rho} - \frac{s}{\rho}, \dots \\ A(\alpha_m + 2\psi - pt) & \dots \dots \dots \frac{\alpha_m}{\rho} + \frac{2\psi}{\rho} - \frac{s}{\rho} \leq t < \frac{\alpha_m}{\rho} + \frac{2\psi}{\rho}, \\ 0 & \dots \dots \dots t > \frac{\alpha_m}{\rho} + \frac{2\psi}{\rho}, \end{cases} \quad (12)$$

Сила, яка діє на фрезу перпендикулярно до її площини, за рахунок одного нахилоного зуба рівна:

$$q_m = \Phi_m(\varphi) H_m(t) \delta(\rho - a). \quad (13)$$

Якщо кут нахилу всіх зубів однаковий, то сила  $Q$ , яка діє на диск фрези перпендикулярно його площині, рівна сумі сил за рахунок кожного зуба  $Q = \sum_{m=1}^z q_m$ . Якщо знак кута нахилу зубів чергується, а величина його залишається постійною, то в силу зроблених припущень  $Q = \sum_{m=1}^z (-1)^m q_m$ . Кожен доданок є функцією трьох змінних, але множник  $\delta(\rho - a)$ , який визначає залежність від радіуса, як і раніше, для всіх доданків однаковий і не залежить від номера зуба. Тому розкладаємо в подвійний ряд за змінними  $\varphi$  і  $t$ , за якими  $q_m(\rho, \varphi, t)$  є періодичною функцією, оскільки вони визначають кожен таку складову силу. Оскільки (13) представлено у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної, то розкладаємо в ряд Фур'є співмножники:

$$H_m(t) = A \left\{ \frac{s(2\psi - s)}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2} \sin \frac{ks}{2} \cos k(\alpha_m + \psi) \sin k \left( pt + \psi - \frac{s}{2} \right) \right\};$$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{s}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{ns}{2} \cos n \left( \varphi - \alpha_m - \frac{s}{2} \right).$$

Результуючий ряд отримуємо як їх добуток:

$$q_m(\rho, \varphi, t) = A \delta(\rho - a) \left\{ \frac{s^2(2\psi - s)}{4\pi^2} + \frac{2s}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{ks}{2} \cos k(\alpha_m + \psi) \times \right.$$

$$\times \sin k \left( pt + \psi - \frac{s}{2} \right) + \frac{s(2\psi - s)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{ns}{2} \cos n \left( \varphi - \alpha_m - \frac{s}{2} \right) +$$

$$+ \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nk^2} \sin \frac{ns}{2} \sin \frac{ks}{2} \cos k(\alpha_m + \psi) \times$$

$$\left. \times \sin k \left( pt + \psi - \frac{s}{2} \right) \cos n \left( \varphi - \alpha_m - \frac{s}{2} \right) \right\}. \quad (14)$$

Якщо кут нахилу всіх зубів однаковий, то змінюючи порядок підсумовування по  $m$  від 1 до  $z$ , після перетворень отримаємо:

$$Q = \sum_{m=1}^z q_m = \delta(\rho - a) A$$

$$\left\{ \frac{s^2(2\psi - s)}{4\pi^2} z + \frac{s}{\pi^2 z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sin \frac{jzs}{2} \cos jz\psi \sin jz \left( pt + \psi - \frac{s}{2} \right) + \frac{s(2\psi - s)}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin \frac{jzs}{2} \cos jz \left( \varphi - \frac{s}{2} \right) + \frac{4z}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nk^2} \sin \frac{ns}{2} \times \sin \frac{ks}{2} \cos k(\alpha_m + \psi) \sin k \left( pt + \psi - \frac{s}{2} \right) \times \left. \begin{matrix} 1 \text{ при } k + n = zj_1 \text{ або при } k - n = zj_2, j_1, j_2 = 1, 2, 3, \dots \\ 0 \text{ при } k + n \neq zj_1 \text{ або при } k - n \neq zj_2, \dots \end{matrix} \right\}.$$

(15)

Якщо знак кута нахилу зубів чергується, а величина його однакова, то враховуючи, що число зубів парне, після підсумовування та перетворення отримаємо:

$$Q = \sum_{m=1}^z (-1)^m q_m = \delta(\rho - a) A \left\{ \frac{8s}{\pi^2 z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \sin(2j-1) \frac{z}{2} \cos(2j-1) \frac{z}{2} \times \sin(2j-1) \frac{z}{2} \left( pt + \psi - \frac{s}{2} \right) + \frac{2s(2\psi - s)}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \sin \frac{z(2j-1)s}{4} \times \cos \frac{z(2j-1)}{4} \left( \varphi - \frac{s}{2} \right) \right\} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{nk^2} \sin \frac{ns}{2} \sin \frac{ks}{2} \sin k \left( pt + \psi - \frac{s}{2} \right) \times \left. \begin{matrix} 1 \text{ при } k + n = z(2j_1 - 1)/2 \text{ або при } k - n = z(2j_2 - 1)/2, j_1, j_2 = 1, 2, 3, \dots \\ 0 \text{ при } k + n \neq z(2j_1 - 1)/2 \text{ або при } k - n \neq z(2j_2 - 1)/2, \dots \end{matrix} \right\}.$$

(16)

Отримані формули (10), (15) і (16) дозволяють проаналізувати залежність спектра збуджуючих сил від конструктивних особливостей фрези. В тому випадку, якщо всі зубці паралельні осі фрези, з співвідношення (10) видно, що є постійна складова сила, яка вигинає фрезу і залежить тільки від довжини дуги різання, тобто нерегульована. Аналогічна стала складова сила, перший доданок в (15), є і в тому випадку, коли всі зубці мають один кут нахилу, але вона може регулюватися за рахунок зміни кута нахилу зубців. Із співвідношення (16) видно, що стала складова сили відсутня, якщо знак кута нахилу зубців змінюється. Порівняння рядів, які визначають характер розподілу сил по зубцях фрези, тобто в залежності від кута  $\varphi$ , показує, що найбільш повільно убувають амплітуди гармонік в (10), і взагалі другий ряд слабо збігається. У випадку похилих зубців амплітуди аналогічних гармонік убувають як  $1/j$ , і ряди збігаються швидше, тобто сили менші. Аналогічна ситуація має місце і по відношенню до амплітуд гармонік сил, які в залежності від часу амплітуди в (10) убувають як  $1/j$ , а в (15) і (16) – як  $1/j^2$ . Аналогічна ситуація має місце і по швидкості убування подвійних рядів, для похилих зубців вона на порядок вища. Крім того, у випадку похилих зубців є можливість регулювання величини амплітуди гармонік за рахунок вибору кута нахилу зубців, оскільки вона залежить від величини довжини дуги зуба  $s$ . Для остаточного визначення амплітуд гармонік збуджуючих сил необхідно розкласти силу в ряд за власними функціями. Фактично це зводиться до розкладу в ряд Фур'є множника  $\delta(\rho - a)$ ,

який визначає залежність розподілу сил від радіуса. Коефіцієнти розкладу за власними функціями визначаються звичайними співвідношеннями для узагальнених рядів Фур'є [3]:

$$D_n = \int_0^a \rho W_{mn}(\rho) \delta(\rho - a) d\rho. \tag{17}$$

Власні числа, які необхідні для визначення переміщень на перших 20-ти формах, і самі форми наведені в роботі [2]. Таким чином, співвідношення (4), (5), (10), (15)–(17) дозволяють вирішити поставлену задачу з оцінки впливу кута нахилу зубців фрези.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. *Василенко Н.В.* Теория колебаний. – К.: Вища школа, 1992.
2. *Бабенко А.Є., Равська Н.С., Боронко О.О., Трубачов С.І.* Визначення власних частот і власних форм коливань дискових пил // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 1998. – № 3. – С. 62–65.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, глав. ред. физико-математической литературы, 1972.

БАБЕНКО Андрій Єлисейович – доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– динаміка та міцність машин.

РАВСЬКА Наталія Сергіївна – доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– динаміка та міцність машин.

БОРОНКО Олег Олександрович – кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– динаміка та міцність машин.

ПАРНЕНКО Валерія Сергіївна – аспірант професор Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– динаміка та міцність машин.

Подано 08.12.1999.