УДК 621.315.5:537

О.А. Гутніченко, аспір.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ВИЗНАЧЕННЯ ЗМІСТУ ПОКАЗНИКА СТЕПЕНЯ ν У ФОРМУЛІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ПРОВІДНОСТІ ДВОФАЗНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

(Представлено д.т.н., професором І.Г. Чернишом)

Визначено залежність показника степеня ν відомого рівняння провідності неоднорідних систем від провідних властивостей складових композизійного матеріалу.

При створенні провідних композиційних матеріалів постає проблема прогнозування провідних властивостей гетерогенних систем за умови, що відомі провідності кожного компонента. У літературі з теорії провідності найбільш часто користуються формулою, що визначає провідність системи у закритичній області зміни концентрації провідника:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{m - m_c}{1 - m_c}\right)^{\nu}, \tag{1}$$

де ρ_0 – провідність провідника;

ρ – провідність гетерогенної системи в цілому;

m_c – значення критичної концентрації провідної фази;

m – поточне значення провідної фази.

Значення показника степені ν у різних літературних джерелах [1–9] має розбіжність $\nu = 1{,}6 \pm 0{,}5$.

Виведемо формулу (1) із наступних міркувань. Скористаємося тим, що перехід системи із непровідного стану в провідний відбувається стрибкоподібно, тому похідна від функції $\rho = f(m)$ буде мати екстемум у точці m_c. Позначимо цю функцію $F = \varphi(m_1, m_2)$, де m_2 – концентрація діелектричної фази. Із достатньої умови існування максимуму маємо наступну нерівність:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial m_2^2} > \left(\frac{\partial^2 F}{\partial m_1 \partial m_2}\right)^2.$$

Розв'язок даної нерівності будемо шукати у вигляді функції:

$$F = \varphi(m_1)\psi(m_2).$$

Таким чином, маємо:

$$\varphi \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial m_2^2} \cdot \psi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_1^2} > \left(\frac{\partial \varphi}{\partial m_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial m_2}\right)^2.$$

Розділяючи змінні, отримаємо два рівняння:

$$\frac{\varphi}{(\varphi')^2} \cdot \varphi'' = \kappa_1; \tag{2}$$

$$\frac{(\psi')^2}{\psi \cdot \psi''} = \kappa_2, \tag{3}$$

причому $\kappa_1 > \kappa_2$.

Розв'язуючи рівняння (2) та (3), отримаємо шістнадцять можливих розв'язків. Виберемо розвязок, подібний до формули (1), який має вигляд:

$$F = B \cdot \left\{(1 - k_1) \cdot (C_1 \cdot m_1 + C_2)\right\}^{\frac{1}{1-k_1}}. \tag{4}$$

Визначимо точку екстремуму функції $F(m)$:

$$\frac{dF}{dm} = \frac{B_1}{1 - k} \cdot (C_1 \cdot m + C_2)^{\frac{k}{1-k}} = 0;$$

$$m = m_c = -\frac{C_2}{C_1}.$$

Інтегруючи (4) по m_1, визначимо функцію зміни провідності від концентрації провідника:

$$\rho = D \cdot \left\{ C_1 \cdot m + C_2 \right\}^{\frac{2-k}{1-k}} + C_3 . \tag{5}$$

У рівнянні (5) під m будемо розуміти концентрацію провідної фази, $\kappa = \kappa_1$, D, C_1, C_2, C_3 – постійні інтегрування, які визначаються із початкових умов (6)–(9).

$$\begin{cases} \rho(m_c) = \widetilde{\rho}; & (6) \\ \rho(1) = \rho_1; & (7) \\ F(m_c) = \Delta_1; & (8) \\ F(1) = \Delta_2. & (9) \end{cases}$$

Перепишемо формулу (5) у наступному вигляді:

$$\rho = Z \cdot (m - m_c)^{\frac{2-k}{1-k}} + C_3 . \tag{10}$$

Таким чином, із (6)–(10) маємо:

$$\begin{cases} C_3 = \widetilde{\rho}; & (11) \\ \rho_1 = Z \cdot (1 - m_c)^{\frac{2-k}{1-k}} + C_3; & (12) \\ \Delta_1 \equiv 0; & (13) \\ \Delta_2 = Z \cdot \dfrac{2-k}{1-k} \cdot (1 - m_c)^{\frac{1}{1-k}}. & (14) \end{cases}$$

Із (11) та (12) отримуємо:

$$C_3 = \widetilde{\rho};$$

$$Z = \frac{\rho_1 - \widetilde{\rho}}{(1 - m_c)^{\frac{2-k}{1-k}}} . \tag{15}$$

Отже, можемо переписати (10) у вигляді:

$$\rho = (\rho_1 - \widetilde{\rho}) \cdot \left[\frac{m - m_c}{1 - m_c} \right]^{\nu} + \widetilde{\rho} . \tag{16}$$

У [1–9] вважається, що провідність системи, при концентрації провідника меншій за критичну, дорівнює нулю, тобто $\widetilde{\rho} = 0$. Таким чином, формула (17) відповідає формулам, даним у літературі.

Із (14) отримаємо вираз для Δ_2:

$$\Delta_2 = \frac{(\rho_1 - \widetilde{\rho}) \cdot (2 - k)}{(1 - m_c) \cdot (1 - k)} . \tag{17}$$

Таким чином із (17) отримуємо значення для показника степеня ν:

$$\nu = \frac{2-k}{1-k} = \frac{\Delta_2 \cdot (1 - m_c)}{\rho_1 - \widetilde{\rho}} . \tag{18}$$

Отже, залишається визначити невідомі значення $\widetilde{\rho}$ та Δ_2. У [10] дані формули для визначення провідності гетерогенних систем при малих концентраціях включень:

– формула Ландау-Ліфшица:

$$\sqrt[3]{\rho} = m_1 \cdot \sqrt[3]{\rho_1} + m_2 \cdot \sqrt[3]{\rho_2} ; \tag{19}$$

– формула Беєра:

$$\sqrt{\rho} = m_1 \cdot \sqrt{\rho_1} + m_2 \cdot \sqrt{\rho_2} . \tag{20}$$

Використовуючи (19) та (20), визначимо невідомі початкові дані. Із (19) маємо:

$$\widetilde{\rho}(m_c) = \left[m_c \cdot \sqrt[3]{\rho_1} + (1 - m_c) \cdot \sqrt[3]{\rho_2} \right]^{\frac{1}{3}};$$

$$\Delta_2 = 3 \cdot \rho_1^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\rho_1^{\frac{1}{3}} - \rho_2^{\frac{1}{3}} \right). \tag{21}$$

Із формули Беєра отримаємо:

$$\widetilde{\rho}(m_c) = \left[m_c \cdot \sqrt{\rho_1} + (1 - m_c) \cdot \sqrt{\rho_2} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\Delta_2 = 2 \cdot \left(\rho_1 - \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2} \right) \tag{22}$$

Розрахунки показника степеня за рівняннями (18), (21), (22) наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Розрахункові значення показника степеня ν при провідностях провідника та ізолятора відповідно рівних 10^6 та 10^{-11} $(Ом\cdot м)^{-1}$

m_c	За формулаю Ландау-Ліфшица	За формулою Беєра
	ν_1	ν_2
0,01	2,97000	1,98020
0,05	2,85035	1,90476
0,09	2,73199	1,83486
0,13	2,61574	1,76991
0,17	2,50229	1,70940
0,21	2,39215	1,65239
0,25	2,28571	1,60000
0,29	2,18325	1,55039
0,33	2,08492	1,50376
0,37	1,99084	1,45985
0,41	1,90102	1,41844
0,45	1,81543	1,37931
0,49	1,73400	1,34228

Таким чином, визначено, що значення показника степеня ν залежить від наступних факторів:

а) провідних властивостей компонентів гетерогенної системи;

б) критичної концентрації провідної фази (а згідно з [11] на критичну концентрацію впливають розміри та форма частинок, технологія отримання композиційного матеріалу тощо).

Як видно з табл. 1, значення показника степеня більше відповідає літературним джерелам, якщо розраховувати за формулою Беєра.

Як було сказано вище, формулу (16) можна використовувати лише у закритичній області, тобто $m > m_c$. Для того, щоб визначити провідність системи для будь-якої концентрації провідної компоненти у докритичній області, можна використати формули (21), (22), звідки визначається значення $\widetilde{\rho}$. У закритичній області можна використовувати формулу (16).

Але формула (5) визначена у всій області концентрацій провідної фази. Отже, потрібно лише визначити постійні інтегрування D, C_1, C_2, C_3 за наступних граничних умов:

$$\begin{cases} \rho(0) = D \cdot C_2^{\frac{2-k}{1-k}} + C_3 = \rho_2; & (23) \\ \rho(1) = D \cdot (C_1 + C_2)^{\frac{2-k}{1-k}} + C_3 = \rho_1; & (24) \\ F(0) = B \cdot C_2^{\frac{1}{1-k}} = \Delta_1; & (25) \\ F(1) = B \cdot (C_1 + C_2)^{\frac{1}{1-k}} = \Delta_2, & (26) \end{cases}$$

звідки отримуємо наступні значення постійних інтегрування:

$$C_1 = \frac{\Delta_2^{1-k} - \Delta_1^{1-k}}{e^{1-k}}; \tag{27}$$

$$C_2 = \left(\frac{\Delta_1}{B}\right)^{1-k}; \tag{28}$$

$$C_3 = \rho_2 - \frac{(1-k)\cdot\Delta_1^{2-k}}{(2-k)\cdot\left(\Delta_2^{1-k} - \Delta_1^{1-k}\right)}; \tag{29}$$

$$m_c = -\frac{\Delta_1^{1-k}}{\Delta_2^{1-k} - \Delta_1^{1-k}}. \tag{30}$$

Із рівняння (24) з врахуванням (30) отримаємо рівняння для визначення показника степеня κ. Отримане рівняння трансцендентне, тому воно вирішується за допомогою ЕОМ. До речі, показник степеня у даному рівнянні буде відрізнятися від показника степеня у формулах (16) та (18).

$$\pm\left[\frac{1-m_c}{m_c}\right]^{\nu}=1-\frac{\rho_1-\rho_2}{\Delta_1\cdot m_c\cdot\nu}, \qquad (31)$$

де Δ_1 визначається аналогічно за формулами (19)–(20), Δ_2 – за формулою (30).

Кінцево формула (5) запишеться у наступному вигляді:

$$\rho=\frac{1-k}{(2-k)\cdot\left[\Delta_2^{1-k}-\Delta_1^{1-k}\right]}\cdot\left\{\Delta_2^{1-k}+\Delta_1^{1-k}\cdot(1-m)\right\}^{\frac{2-k}{1-k}}+$$
$$+\left[\rho_2+\frac{(1-k)\cdot\Delta_1\cdot m_c}{2-k}\right]. \qquad (32)$$

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Эфрос А.Л.* Физика и геометрия беспорядка. – М.: Наука, 1982. – 175 с.
2. *Заричняк Ю.П., Орданян С.С., Соколов А.Н., Степаненко Е.К.* Взвимосвязь электропроводности спечённых композиций и дисперсности исходных компонентов // Порошковая металлургия. – 1986. – № 6.
3. *Заричняк Ю.П., Орданян С.С., Соколов А.Н., Степаненко Е.К.* Размерные эфекты в процесах перколяции // Порошковая металлургия. – 1986. – № 7.
4. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Теория протекания и проводимость сильно неоднородных сред // УФН. – 1975. – 117, вып. 3.
5. *Заричняк Ю.П., Новиков В.В.* Эфективная проводимость гетерогенных систем с хаотической структурой // ИФЖ. – 1978. – 34, № 4.
6. *Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П.* Теплопроводность смесей и композиционных материалов. – Л.: «Энергия», 1974.
7. *Киркпатрик С.* Перколяция и проводимость. – В кн.: Теория и свойства неупорядоченых материалов / Под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. – М.: Мир, 1977.
8. *Скан А.С., Шкловский Б.И.* Топология бесконечного кластера в теории протекания и теории прыжковой проводимости // ФТП. – 1974. – Т. 8.
9. *Дульнев Г.Н., Кругликов В.К., Сахова Е.В.* Математическое моделирование гетерогенных изотропных систем // ИФЖ. – 1981. – Т. 41. – № 5.
10. *Тареев Б.М.* Физика диэлектрических материалов: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоиздат, 1982.
11. *Гутніченко О.А.* Визначення критичної концентрації провідної фази в зернистих гетерогенних системах // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 9 / Технічні науки.
12. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1978.

ГУТНІЧЕНКО Олександр Анатолійович – аспірант кафедри технології машинобудування та конструювання технічних систем Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- перколяційні процеси;
- моделювання гетерогенних композиційних матеріалів.

Подано 23.12.2000.