УДК 539.3

М.А. Колодій, асист.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

СПІВВІДНОШЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ, ЕНЕРГЕТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ТА ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБЕРТОВИХ ТІЛ

На основі інтегральної умови рівноваги обертового деформованого тіла розглядаються співвідношення геометричних та енергетичних параметрів обертового тіла з параметрами напруженого стану. Наведений приклад використання співвідношень для визначення параметрів напруженого стану обертового тіла.

В [1, 2] показано, що для тіла, навантаженого зовнішніми об'ємними та поверхневими силами, умова рівноваги має вигляд:

$$\iiint_V \bar{k}\cdot\bar{r}\cdot dV + \iint_S \bar{p}\cdot\bar{r}\cdot dS = \iiint_V I_1(T_\sigma)dV\,, \tag{1}$$

де $\bar{k}$ – вектор масової сили, віднесений до одиниці об'єму тіла V;

$\bar{r}$ – радіус–вектор, що визначає положення елементів масиву тіла, що досліджуються;

$\bar{p}$ – вектор поверхневих сил, віднесений до одиниці навантаженої поверхні тіла площею S;

$I_1(T_\sigma)$ – перший інваріант тензора напружень.

В [2] показано, що для обертового тіла при врахуванні тільки масових сил:

$$\iiint_V I_1(T_\sigma)^\omega dV = \iiint_V \bar{k}\cdot\bar{r}\cdot dV = \iiint_V \rho\,\omega^2\cdot\bar{r}_0^2\cdot dV = J_p\cdot\omega^2 = E^\omega\,, \tag{2}$$

де $\bar{r}_0$ – відстань елемента до осі обертання;

E^ω – подвоєна кінетична енергія, накопичена обертовим тілом;

J_p – полярний момент інерції обертового тіла.

Для цього ж тіла при відсутності обертання та навантаженні лише поверхневими силами:

$$\iiint_V I_1(T_\sigma)^p dV = \iint_S \bar{p}\cdot\bar{r}\cdot dS = E^p, \tag{3}$$

де E^p – енергія, що визначається напруженим станом тіла під дією поверхневих сил.

Для суцільного тонкого диска, навантаженого розтягальними поверхневими силами $\bar{p}$ по циліндричній поверхні, радіальні та колові напруження рівні між собою і мають постійне значення вздовж радіуса. Тому $\sigma_r + \sigma_\theta = const$ і

$$I_1(T_\sigma)^p = \sigma_r + \sigma_\theta = 2\sigma_r = const\,; \tag{4}$$

$$\iiint_V I_1(T_\sigma)^p dV = I_1(T_\sigma)^p\cdot V\,. \tag{5}$$

Для кільцевого тонкого диска, навантаженого по внутрішній циліндричній поверхні розтягальними поверхневими силами $\bar{p}$, направленими до осі, радіальні та колові напруження мають різні значення, але вздовж радіуса їх сума має постійне значення:

$$I_1(T_\sigma)^p = \sigma_r + \sigma_\theta = const\,; \tag{6}$$

$$\iiint_V I_1(T_\sigma)^p dV = I_1(T_\sigma)^p\cdot V\,. \tag{7}$$

Розглянемо співвідношення між геометричними, енергетичними та силовими параметрами модельного маховика у вигляді суцільного тонкого диска зовнішнього радіуса r_3, постійної товщини b, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω. Диск виконаний з ізотропного матеріалу густиною ρ, який має модуль пружності E_v та коефіцієнт Пуассона v, момент інерції J_p.

Суцільний обертовий диск представимо у вигляді двох дискретизованих фрагментів, утворених перерізом на довільно вибраному радіусі r: 1 – внутрішній суцільний дисковий фрагмент, який складається з n1 кільцевих кінцевих елементів довільного за формою перерізу; 2 – зовнішній кільцевий дисковий фрагмент, який складається з n2 кільцевих кінцевих елементів довільного за формою перерізу.

Зовнішня циліндрична поверхня внутрішнього фрагмента та внутрішня циліндрична поверхня зовнішнього фрагмента навантажені радіальними напруженнями, які викликають розтягальні радіальні та колові напруження в масиві внутрішнього фрагмента 1 і розтягальні радіальні та стискуючі колові напруження в масиві зовнішнього фрагмента 2 (при $\omega = 0$).

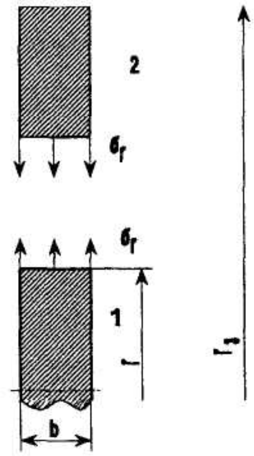

Рис. 1

Енергію, накопичену обертовими фрагментами 1 та 2, представимо у вигляді суми кінетичної енергії, накопиченої при обертанні E^{ω}, та енергії, накопиченої під дією радіальних напружень E^{p}:

$$E_1^{\omega p} = E_1^{\omega} + E_1^{p} = J_1\omega^2 + \sum_{n1=1}^{n1} V_{n1} \cdot I_1(T_\sigma)_{n1}^{p} ; \tag{8}$$

$$E_2^{\omega p} = E_2^{\omega} + E_2^{p} = J_2\omega^2 + \sum_{n2=1}^{n2} V_{n2} \cdot I_1(T_\sigma)_{n2}^{p} . \tag{9}$$

Враховуючи, що енергія накопичена фрагментами 1 та 2 під дією радіальних напружень:

$$E_1^{p} - E_2^{p} = 0 , \tag{10}$$

вираз для визначення енергії первинного диска матиме вигляд:

$$E_0^{\omega} = E_1^{\omega p} + E_2^{\omega p} = E_1^{\omega} + E_1^{p} + E_2^{\omega} - E_2^{p} = E_1^{\omega} + E_2^{\omega} = J_p\omega^2 . \tag{11}$$

Визначимо співвідношення потенціальної складової енергії фрагмента диска E_1^{p}, виділеного значенням довільного радіуса r, та повної енергії початкової моделі:

$$e_1^{p} = \frac{E_1^{p}}{E_0} = \frac{\sum_{n1=1}^{n1} V_{n1} \cdot I_1(T_\sigma)_{n1}}{\sum_{n=1}^{n} V_n \cdot I_1(T_\sigma)_n} = \frac{\left(\sum_{n1=1}^{n1} V_{n1}\right) \cdot I_1(T_\sigma)}{J\omega^2} = \frac{V_1 \cdot 2\sigma_r}{0{,}5\rho V_0 r_3^2 \cdot \omega^2} =$$

$$= 1{,}65 \cdot \frac{r^2}{r_3^2} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_3^2}\right) = 1{,}65\bar{r}^2\left(1 - \bar{r}^2\right), \tag{12}$$

де $\bar{r} = \dfrac{r}{r_3}$ – відносний радіус, що визначає положення перерізу, в якому досліджується напружений стан матеріалу моделі.

Таким же чином отримаємо значення цього ж співвідношення для зовнішнього кільцевого фрагмента 2:

$$e_2^{p} = -1{,}65\bar{r}^2\left(1 - \bar{r}^2\right). \tag{13}$$

Дослідження виразів для визначення e_1^{p} та e_2^{p} на екстремум показують, що:

$e_{1\,max}^{p} = 0{,}4125$ при $r = 0{,}707 r_3$;

$e_{1\,min}^{p} = 0$ при $\bar{r} = 0$ та $\bar{r} = 1$;

$e_{2\,max}^{p} = 0$ при $\bar{r} = 0$ та $\bar{r} = 1$;

$e_{2\,min}^{p} = -0{,}4125$ при $\bar{r} = 0{,}707$.

Діаграма залежності $e_1^{p} = f(r)$ представлена на рис. 2.

Аналіз кожної залежності показує, що відображаюча її крива є єдиною для всіх плоских суцільних тонких дисків постійної товщини, що мають різні зовнішні радіуси $r_з$, навантажені силами інерції в полі відцентрових сил, виконаних із матеріалів, що мають одне і те ж значення коефіцієнтів Пуассона.

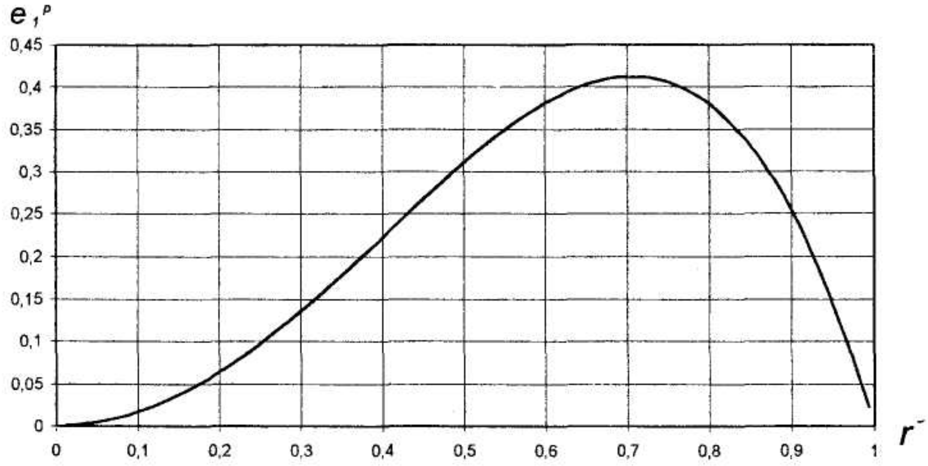

Рис. 2

Для спрощення визначення параметрів напруженого стану обертових тіл, які, наприклад, мають форму тонкого диска постійної товщини з ободом, введемо поняття приведеного плоского диска (рис. 3), зовнішній радіус якого r_n.

В поперечних перерізах приведеного диска на радіусах r^- при тих же кутових швидкостях напружено-деформований стан буде таким же, як і в перерізах того ж радіуса досліджуваного диска з ободом (в межах диска постійної товщини).

Представимо диск у вигляді двох фрагментів: 1 – плоский суцільний диск постійної товщини; 2 – обід. Радіальні та колові напруження в перерізі обертового фрагмента 1, що має зовнішній радіус r_1, на довільному радіусі $r < r_1$ визначаємо за виразами:

$$\sigma_{rr}^{p\omega} = \sigma_{rr}^{p} + \sigma_{rr}^{\omega} = \sigma_{r(r=r1)}^{p} + \frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\omega^2\left(r_1^2 - r^2\right);$$

$$\sigma_{\theta r}^{p\omega} = \sigma_{\theta r}^{p} + \sigma_{\theta r}^{\omega} = \sigma_{\theta(r=r1)}^{p} + \frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\omega^2\left(r_1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\cdot r^2\right), \tag{14}$$

де σ_{rr}^{p}, $\sigma_{\theta r}^{p}$ – радіальні та колові напруження в масиві фрагмента, генеровані об'ємними силами обода;

σ_{rr}^{ω}, $\sigma_{\theta r}^{\omega}$ – радіальні та колові напруження в масиві фрагмента, генеровані об'ємними силами власних мас фрагмента.

Радіальні та колові напруження на радіусі r_1 плоского суцільного приведеного диска, який має зовнішній радіус r_n:

$$\sigma_{rr}^{p\omega} = \frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\omega^2\left(r_П^2 - r_1^2\right);$$

$$\sigma_{\theta r}^{p\omega} = \frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\omega^2\left(r_n^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\cdot r_1^2\right). \tag{15}$$

Подвоєні кінетичні енергії, накопичені досліджуваним диском з ободом $E_д$ і приведеним плоским суцільним диском E_n, однакові.

На основі цієї рівності маємо:

$$\pi b r_П^2\cdot\rho\frac{r_П^2}{2}\cdot\omega^2 = J_{РД}\cdot\omega^2. \tag{16}$$

З цього виразу визначаємо радіус приведеного диска:

$$r_П^2 = \sqrt{\frac{2J_{РД}}{\pi b\rho}}. \tag{17}$$

Прирівнявши значення радіальних напружень у виразах (14) та (15), отримаємо відомі залежності для визначення радіальних, колових напружень в перерізі на радіусі r та переміщення перерізу:

$$\sigma_{rr}^{\omega} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(r_n^2 - r^2\right); \tag{18}$$

$$\sigma_{\theta r}^{\omega} = \frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\omega^2\left(r_n^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\cdot r^2\right); \tag{19}$$

$$u_r = \frac{r}{E}\left(\sigma_{\theta r}^{\omega} - \mu\sigma_{rr}^{\omega}\right). \tag{20}$$

Наведемо приклад застосування розглянутих співвідношень для розрахунків параметрів напруженого стану центральної зони моделі маховика більш складної форми, геометричні параметри котрої представлені на рис. 3.

Маховик виготовлений із сталі: $\nu = 0{,}3$, $\rho = 7800$ кг/м^3, $E_\nu = 2\cdot 10^5$ МПа, кутова швидкість 1500 с$^{-1}$. Радіус приведеного за накопиченою кінетичною енергією диска визначаємо із залежності:

$$0{,}1654 r_П^4 = J_{РД}\omega^2.$$

Визначимо напруження в перерізах $r_1 = 0$, $r_2 = 101{,}5$ мм, $r_з = 199{,}5$ мм.

Результати розрахунків та їх порівняння з результатами, отриманими за МКЕ, представлені в табл. 1.

Таблиця 1

r, мм	σ_r, МПа			σ_θ, МПа		
	0	101,5	199,5	0	101,5	199,5
Розрахунок за наведеними співідношеннями	969,53	893,84	680,40	968,53	925,58	802,63
Розрахунок за МКЕ	969,32	894,26	680,67	969,32	925,92	802,92
Відхилення, %	0,086	0,035	0,039	0,072	0,036	0,036

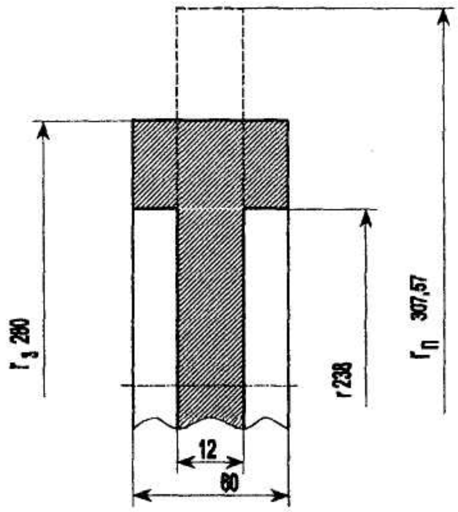

Рис. 3

Наведені дані є свідченням можливості використання розглянутих співідношень для визначення параметрів напружено-деформованого стану маховиків, що мають конструктивні форми, близькі до наведених на рис. 3.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А.* Об одной интегральной оценке напряженного состояния еформируемого тела // Механика твердого тела. – 1973. – № 1. – С. 181–183.
2. *Портнов Г.Г.* Оценка энергоемкости вращающихся тел по интегральной характеристике их напряженного состояния // Проблемы прочности. – 1987. – № 2. – С. 7–12.

КОЛОДІЙ Марина Анатоліївна – асистент кафедри геотехнології та промислової екології Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– дослідження міцності деталей машин

Подано 31.01.2000.