ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 517.97

П.І. Когут, д.ф.-м.н., проф.
Дніпропетровський державний технічний університет
П.М. Повідайко, к.т.н., доц.
Житомирський інженерно-технологічний інститут
Т.М. Рудянова, доц.
Дніпропетровський державний технічний університет

ДО УСЕРЕДНЕННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРАХ

Для довільної послідовності задач n-критеріальної оптимізації досліджуються проблеми структурної ідентифікації її V-границі. Встановлено достатні умови, за яких V-усереднену задачу векторної оптимізації можна представити у вигляді n-критеріальної задачі, кожен зі скалярних критеріїв якої є результатом S-усереднення відповідної однокритеріальної задачі умовної мінімізації.

Вступ

Основним об'єктом досліджень даної роботи виступає задача векторної оптимізації:

$$\left\langle \Lambda - \underset{x \in X_\varepsilon}{Inf}\ F^\varepsilon(x) \right\rangle, \tag{1}$$

де відображення $F^\varepsilon : X_\varepsilon \to R^n$ є n-вимірним критерієм зі значеннями в евклідовому просторі R^n, що напівупорядкований замкненим тілесним конусом Λ. Через $\Lambda - \underset{x \in X_\varepsilon}{Inf}\ F^\varepsilon(x)$ позначено сукупність всіх точних нижніх (за конусом Λ) граней множини $\left\{ y = F^\varepsilon(x) \mid \forall x \in X_\varepsilon \right\}$.

Вважається, що компоненти математичного опису задачі (1) можуть довільним чином залежати від деякого "малого" параметра ε. Зокрема, залежність від параметра ε допускається як для векторнозначного відображення $F^\varepsilon : X_\varepsilon \to R^n$, за яким оцінюється якість системи, так і для X_ε — множини допустимих значень параметрів та функцій керувань. Як правило, обчислювальні методи в дослідженні такого класу задач при "малих" значеннях ε стають непридатними [1, 2]. Проте, з точки зору практичних застосувань, на етапі оптимального проектування таких систем за багатьма критеріями важливо вміти визначити їх поведінку при $\varepsilon \to 0$ і побудувати в деякому розумінні граничну (тобто усереднену) задачу оптимального проектування.

Зауважимо, що в науковій періодиці практично відсутні роботи з дослідження проблем усереднення задач векторної оптимізації. Разом з тим, наведена вище постановка досліджень багато в чому аналогічна типовим проблемам з теорії усереднення задач умовної мінімізації та оптимального керування [1, 2, 3, 4]. Як відомо, в основі процедури усереднення задач умовної мінімізації та оптимального керування лежить концепція S-збіжності направленості функціоналів $\{F^\varepsilon : X \to \overline{R}\}_{\varepsilon \to 0}$, що була започаткована в роботах [3, 4, 7]. Проте наявність в (1) критерію у вигляді відображення зі значеннями в напівупорядкованому евклідовому просторі робить неможливим пряме перенесення відомих "однокритеріальних" результатів. Разом з тим, як буде показано нижче, усереднення задач векторної оптимізації можна отримати через покомпонентне S-усереднення відповідних однокритеріальних задач.

1. Попередні результати

Нехай (X, τ) — довільний хаусдорфів топологічний простір, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — деяка сукупність його підмножин, A — довільна множина індексів. Позначимо через W направлену систему непорожніх підмножин множини A. Тобто для будь-яких елементів A_1, A_2 із W існує третій елемент, що лежить в перетині $A_1 \cap A_2$. Ясно, що для послідовностей множина A є множиною натуральних чисел, а система W співпадає з множинами типу $\{n,\ n+1,\ \ldots\}$. Надалі всяку функцію, що визначена на множині A з направленою системою W, будемо називати узагальненою послідовністю або направленістю. Позначимо через $N_\tau(x)$ фільтр всіх τ-відкритих околів точки x в (X,τ). Наведемо відомі означення топологічної збіжності множин згідно з роботою [10, с. 84].

Означення 1.1. Множину $X' \subseteq X$ називають нижньою топологічною границею направленості $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ за відцентрованою системою W і позначають $X' = \tau - Li\,X_\alpha$, якщо для будь-якого околу $U \in N_\tau(x)$ довільної точки $x \in X'$ знайдеться елемент G із системи W такий, що для будь-якого $\alpha \in G$ буде виконуватися умова $U \cap X_\alpha \neq \emptyset$.

Означення 1.2. Множину $X'' \subseteq X$ називають верхньою топологічною границею направленості $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ за направленою системою W і позначають $X'' = \tau - LsX_\alpha$, якщо для будь-якого околу $U \in N_\tau(x)$ довільної точки $x \in X''$ і довільного елемента G системи W знайдеться індекс $\alpha \in G$ такий, що $U \cap X_\alpha \neq \emptyset$.

Зауважимо, що у випадку, коли A є множиною натуральних чисел, а система W є сукупністю множин $\{n,\ n+1,\ \ldots\}$, наведені поняття топологічних границь в точності співпадають з означеннями верхньої та нижньої K-границь за Пенлеве-Куратівським [8, с. 343].

Нехай всюди в подальшому A – напіввпорядкована за зростанням множина індексів. Тоді, згідно з наведеними властивостями топологічних границь, буде справедливим такий висновок:

(1) якщо $\tau - LiX_\alpha \neq \emptyset$, то для будь-якої точки $x \in (\tau - LiX_\alpha)$ можна вибрати направленість $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ та індекс $\beta \in A$ такі, що $x_\alpha \in X_\alpha$, $\forall \alpha \succeq \beta$ і $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$;

(2) якщо $\tau - LsX_\alpha \neq \emptyset$, то для будь-якої точки $x \in (\tau - LsX_\alpha)$ можна вибрати направлену за зростанням множину B і направленість $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ такі, що для всякого $\alpha \in A$ можна вказати індекс $\beta(\alpha) \in B$, при якому буде виконуватися умова: для будь-якого $\beta' \in B\,(\beta' \succeq \beta)$ знайдеться $\alpha' \in A(\alpha' \succeq \alpha)$ таке, що $y_{\beta'} \in X_{\alpha'}$ і $y_\beta \xrightarrow{\tau} x$.

Таким чином, $\tau - LsX_\alpha$ та $\tau - LiX_\alpha$ є τ-замкненими підмножинами топологічного простору (X,τ) і представляють собою відповідно сукупність границь та граничних точок для всіх направленостей $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, що побудовані за правилом $x_\alpha \in X_\alpha$, $\forall \alpha \in A$.

Означення 1.3. Узагальнену послідовність $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ називають топологічно збіжною, якщо існує множина $E \subseteq X$ така, що $E = \tau - LsX_\alpha = \tau - LiX_\alpha$.

Множину E називають топологічною границею для $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ і позначають $E = \tau - LmX_\alpha$.

Нехай (Y,μ) – дійсний векторний топологічний простір, що напівупорядкований конусом Λ (тобто бінарне відношення $x \overset{(\Lambda)}{\leq} y$ означене тільки для елементів $x, y \in Y$, що задовольняють умові $y - x \in \Lambda$). Конус Λ будемо вважати тілесним і замкненим. Нехай $\overset{(\Lambda)}{<}$ – відношення строгого порядку на $Y \times Y$, тобто: $x \overset{(\Lambda)}{<} y$, якщо $x \overset{(\Lambda)}{\leq} y$ і $x \neq y$. Для довільної підмножини Ω напівупорядкованого векторного простору $\left(Y, \overset{(\Lambda)}{\leq}\right)$ позначимо через $Min\,(\Omega|\Lambda)$ сукупність всіх її $\overset{(\Lambda)}{\leq}$-мінімальних елементів, тобто: $x^* \in \Omega$ є $\overset{(\Lambda)}{\leq}$-мінімальним, якщо не існує $y \in \Omega$ такого, що $y \overset{(\Lambda)}{<} x^*$. Аналогічно можна означити множину $Max\,(\Omega|\Lambda)$. Далі, через $\Lambda - Inf(\Omega)$ будемо позначати сукупність всіх точних нижніх граней для Ω: тобто $x^* \in Y$ належить $\Lambda - Inf\,(\Omega)$, якщо не існує $y \in \Omega$ такого, що $y \overset{(\Lambda)}{<} x^*$ і для будь-якого μ-відкритого околу V точки x^* виконується умова $V \cap \Omega \neq \emptyset$. Відповідно множину точних верхніх граней для Ω позначатимемо як $\Lambda - Sup\,(\Omega)$.

Означення 1.4. Елемент $x^* \in Y$ будемо називати мажорантою (мінорантою) множини Ω в $\left(Y, \overset{(\Lambda)}{\le}\right)$, якщо $x^* \in Min\,(D\,|\Lambda)$ (відповідно $x^* \in Max\,(B|\,\Lambda)$), де множини D і B означені за правилами:

$$D = \left\{a \in Y \,\middle|\, y \overset{(\Lambda)}{\le} a \quad \forall y \in \Omega\right\}; \qquad B = \left\{a \in Y \,\middle|\, a \overset{(\Lambda)}{\le} y \quad \forall y \in \Omega\right\}.$$

Надалі мажоранту та міноранту для множини Ω будемо позначати як $Major_\Lambda(\Omega)$ та $Minor_\Lambda(\Omega)$ відповідно.

Нехай $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — довільна направленість в Y, де A — напівупорядкована множина індексів, що направлена за зростанням.

Означення 1.5. Нижньою (верхньою) границею направленості $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в $\left(Y, \overset{(\Lambda)}{\le}\right)$ будемо називати множину, що задається правилом:

$$\Lambda - \liminf_{\alpha \in A} a_\alpha = \Lambda - Inf\,(M); \qquad \left(\Lambda - \limsup_{\alpha \in A} a_\alpha = \Lambda - Sup(M)\right),$$

де M є сукупністю всіх точок μ-згущення для $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (тобто $b \in M$, якщо для будь-яких $V \in N_\mu(b)$ та $\alpha \in A$ існує індекс $\beta \succ \alpha$ такий, що $a_\beta \in V$).

Отже, направленість $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ буде μ-збіжною, якщо знайдеться елемент $a^* \in Y$ такий, що $\Lambda - \liminf_{\alpha \in A} a_\alpha = \{a^*\} = \Lambda - \limsup_{\alpha \in A} a_\alpha$.

Скористаємося відомими позначеннями для верхнього та нижнього перетинів бінарного відношення $\overset{(\Lambda)}{\le}$ [12]:

$$\left[\overset{(\Lambda)}{\le}\right]^+(x) = \left\{y \in Y \,\middle|\, x \overset{(\Lambda)}{\le} y\right\}; \qquad \left[\overset{(\Lambda)}{\le}\right]^-(x) = \left\{y \in Y \,\middle|\, y \overset{(\Lambda)}{\le} x\right\}.$$

Нехай X_∂ — непорожня множина в X, а $F : X_\partial \to Y$ — деяке відображення.

Означення 1.6. Точною нижньою гранню (інфімум) відображення $F : X_\partial \to Y$ будемо називати множину $\Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\, F(x)$, що означена за правилом: $a \in \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\, F(x)$ тоді і тільки тоді, якщо:

1) $a \notin \left[\overset{(\Lambda)}{\le}\right]^+(F(x))$ при всіх $x \in X_\partial$;

2) для будь-якого $b \in Y \left(a \overset{(\Lambda)}{<} b\right)$ знайдеться елемент $x^* \in X_\partial$ такий, що $F(x^*) \overset{(\Lambda)}{<} b$.

Аналогічно можна означити множину $\Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Sup}\, F(x)$.

Нехай $Infty$ — множина невласних елементів для Y. Виділимо з неї непорожню підмножину $Infty(+)$, яку будемо називати сукупністю Λ-найбільших елементів на множині $\overline{Y} = Y \cup Infty$. Оскільки частковий порядок, що індукується в Y із $\overline{Y}$, повинен співпадати з порядком $\overset{(\Lambda)}{\le}$ на Y, то будемо вважати, що $Infty(+) = \Lambda - Inf(\emptyset)$.

Надалі будемо розглядати відображення, які приймають значення в множині $Y^\bullet \overset{def}{=} Y \cup Infty(+)$. Порядкові та алгебраїчні операції в "піврозширеному просторі" $Y^\bullet$ будемо вважати індукованими із $\overline{Y}$.

2. Формалізм V-усереднення задач векторної оптимізації

Розглянемо на елементах дійсного хаусдорфового топологічного простору (X, τ) таку сукупність відображень:

$$\left\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\right\}_{\alpha \in A}. \tag{2}$$

Нехай $\tau - LsX_\alpha$ та $\tau - LiX_\alpha$ є відповідно нижньою та верхньою топологічними границями направленості підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Згідно з [13], $\tau - LsX_\alpha$ і $\tau - LiX_\alpha$ є τ-замкненими підмножинами топологічного простору (X,τ) і представляють собою відповідно сукупність границь та граничних точок для всіх направленостей $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, що збудовані за правилом $x_\alpha \in X_\alpha, \forall\alpha\in A$. Всюди далі, якщо не обумовлено інше, будемо вважати, що для сукупності $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ виконується умова $\tau - LiX_\alpha \neq \emptyset$. Позначимо через $\rho = \tau\times\mu$ топологію добутку на $X\times Y$ і пов'яжемо з направленістю (2) наступні відображення.

Означення 2.1. Нижньою *V*-границею для $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$ будемо називати відображення $F_V\colon \tau - LsX_\alpha \to Y^\bullet$ (позначимо $F_V = \Lambda(p) - li_V F^\alpha$) таке, що $\forall x\in\tau - LsX_\alpha$:

$$\left(\Lambda(p) - li_V F^\alpha\right)(x) \overset{def}{=} \Lambda - \overline{\underset{U\in N_\tau(x)}{Sup}} \left\{\Lambda - \underline{\underset{\substack{\alpha\in A\\ X_\alpha\cap U\neq\emptyset}}{Lim\ inf}}\left[\Lambda - \underline{\underset{y\in\overline{U}\cap X_\alpha}{Inf}}\ F^\alpha(y)\right]\right\}. \tag{3}$$

Означення 2.2. Верхньою *V*-границею для $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$ будемо називати відображення $F^V\colon \tau - LiX_\alpha \to Y^\bullet$ (позначимо $F^V = \Lambda(p) - ls_V F^\alpha$) таке, що $\forall x\in\tau - LiX_\alpha$

$$\left(\Lambda(p) - ls_V F^\alpha\right)(x) \overset{def}{=} \Lambda - \overline{\underset{U\in N_\tau(x)}{Sup}} \left\{\Lambda - \overline{\underset{\alpha\in A}{Lim\,sup}}\left[\Lambda - \underline{\underset{y\in\overline{U}\cap X_\alpha}{Inf}}\ F^\alpha(y)\right]\right\}. \tag{4}$$

Тут залучено такі позначення:

$$\Lambda - \underline{\underset{\alpha\in A}{Lim\,inf}}\, F^\alpha(u_\alpha) = \Lambda - \overline{\underset{\alpha\in A}{Sup}}\left\{\Lambda - \underline{\underset{\alpha>\beta}{Inf}}\, F^\beta(u_\beta)\right\};$$

$$\Lambda - \overline{\underset{\alpha\in A}{Lim\,sup}}\, F^\alpha(u_\alpha) = \Lambda - \underline{\underset{\alpha\in A}{Inf}}\left\{\Lambda - \overline{\underset{\alpha>\beta}{Sup}}\, F^\beta(u_\beta)\right\};$$

$$\Lambda - \underline{\underset{y\in\Omega}{Inf}}\ A_\varepsilon(y) \overset{def}{=} Minor_\Lambda\left(\Lambda - \underset{y\in\Omega}{Inf}\ A_\varepsilon(y)\right);$$

$$\Lambda - \overline{\underset{y\in\Omega}{Sup}} A_\varepsilon(y) \overset{def}{=} Major_\Lambda\left(\Lambda - \underset{y\in\Omega}{Sup}\ A_\varepsilon(y)\right);$$

$$\Lambda - \underline{\underset{y\in\Omega}{Sup}}\ A_\varepsilon(y) \overset{def}{=} Minor_\Lambda\left(\Lambda - \underset{y\in\Omega}{Sup}\ A_\varepsilon(y)\right);$$

$$\Lambda - \overline{\underset{y\in\Omega}{Inf}} A_\varepsilon(y) \overset{def}{=} Major_\Lambda\left(\Lambda - \underset{y\in\Omega}{Inf}\ A_\varepsilon(y)\right).$$

Наступний результат є прямим наслідком наведених вище означень.

Лема 2.1. Нехай для направленості множин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ виконується умова $\tau - LiX_\alpha \neq \emptyset$. Тоді $\left(\Lambda(p) - li_V F^\alpha\right)(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \left(\Lambda(p) - ls_V F^\alpha\right)(x)$ при всіх $x\in\tau - LiX_\alpha$.

Означення 2.3. Відображення $F\colon(\tau - LiX_\alpha)\to Y^\bullet$ будемо називати *V*-границею направленості $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$, якщо для всіх $x\in\tau - L_i X_\alpha$ виконується співвідношення:

$$F(x) = \left(\Lambda(\rho) - li_V\ F^\alpha\right)(x) = \left(\Lambda(\rho) - ls_V\ F^\alpha\right)(x). \tag{5}$$

Якщо тожність (5) залишиться в силі при всіх $x\in\tau - Ls\,X_\alpha$, то таку направленість будемо називати абсолютно *V*-збіжною.

Зауваження 2.1. В подальшому *V*-границю направленості (2) будемо позначати через $\Lambda(\rho) - lm_V\ F^\alpha$, а її абсолютну *V*-границю – через $\Lambda(\rho) - lm_V^a\ F^\alpha$. Ясно, що направленість (2) буде абсолютно *V*-збіжною, якщо вона *V*-збігається і, крім того, виконується умова $\tau - Li\,X_\alpha = \tau - Ls\,X_\alpha$.

Пов'яжемо з направленістю (2) таку сукупність задач векторної мінімізації:

$$\left\{\left\langle \Lambda - \underset{x\in X_\alpha}{inf}\ F^\alpha(x)\right\rangle, \alpha\in A\right\} \tag{6}$$

та введемо до розгляду задачі:

$$(\Xi^V):\quad \left\langle \Lambda - \underset{x\in\tau - Li\,X_\alpha}{Inf} \left(\Lambda(\rho) - ls_V\, F^\alpha(x)\right)\right\rangle;$$

$$(\Xi_V):\quad \left\langle \Lambda - \underset{x\in\tau - Ls\,X_\alpha}{Inf} \left(\Lambda(\rho) - li_V\, F^\alpha(x)\right)\right\rangle.$$

Означення 2.4. Для направленості задач (6) задачі Ξ^V та Ξ_V будемо називати відповідно верхньою та нижньою варіаційними *V*-границями.

Зауваження 2.2. Нехай для множин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ виконується умова: $\tau - LiX_\alpha \neq 0$. Тоді, згідно з лемою 2.1, буде справедливим співвідношення $\varphi \overset{(\Lambda)}{\preceq} \psi$, де φ та ψ — довільні представники множин:

$$\Lambda - \underset{x\in\tau - LsX_\alpha}{Inf} \left(\Lambda(\rho) - li_V\, F^\alpha(x)\right) \text{ та } \Lambda - \underset{x\in\tau - LiX_\alpha}{Inf} \left(\Lambda(\rho) - ls_V\, F^\alpha(x)\right)$$

відповідно, а через $\overset{(\Lambda)}{\preceq}$ позначено бінарне відношення: $x \overset{(\Lambda)}{\preceq} y \Leftrightarrow y \in \left[\overset{(\Lambda)}{<}\right]^{-}(x)$.

Зауважимо, що $\overset{(\Lambda)}{\preceq}$ є рефлексивним і антисиметричним бінарним відношенням на Y. Проте для $\overset{(\Lambda)}{\preceq}$ властивість транзитивності не виконується (тобто $\overset{(\Lambda)}{\preceq}$ не є відношенням порядку на Y).

Означення 2.5. Будемо казати, що для направленості (6) існує слабка варіаційна *V*-границя, якщо на множині $\tau - LiX_\alpha$ виконується тожність $\Lambda(\rho) - li_V F^\alpha = \Lambda(\rho) - ls_V\ F^\alpha$, і відповідно є сильна варіаційна V-границя, якщо для направленості відображень (2) існує $\Lambda(\rho) - lm_V^\alpha\ F^\alpha : \tau - Lm\ X_\alpha \to Y^\bullet$.

Таким чином, слабка та сильна варіаційні *V*-границі є такими задачами векторної оптимізації:

$$\left\langle \Lambda - \underset{x\in\tau - LiX_\alpha}{Inf} \left(\Lambda(\rho) - lm_v F^\alpha(x)\right)\right\rangle;$$

$$\left\langle \Lambda - \underset{x\in\tau - LmX_\alpha}{Inf} \left(\Lambda(\rho) - lm_V^a F^\alpha)(x)\right)\right\rangle.$$

Характерною ознакою наведених варіаційних границь є наступні результати.

Твердження 2.1. Відображення

$$\Lambda(\rho) - li_V\ F^\alpha : \tau - Ls\ X_\alpha \to Y^\bullet \quad \text{та} \quad \Lambda(\rho) - ls_V\ F^\alpha : \tau - Li\ X_\alpha \to Y^\bullet$$

є $\Lambda(\rho)$ – напівнеперервними знизу на множинах $\tau - LsX_\alpha$ та $\tau - LiX_\alpha$ відповідно.

Означення 2.6. Направленість точок $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$ в топологічному просторі (X,τ), де B – частково впорядкована за зростанням множина індексів, будемо називати еквіузгодженою з направленістю підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, якщо існує відображення $G : B \to A$ таке, що $x_\beta \in X_{G(\beta)}$ для кожного $\beta \in \mathrm{B}$ і для кожного $\alpha' \in \mathrm{A}$ існує $\beta' \in \mathrm{B}$, при якому із $\beta \succeq \beta'$ випливає $G(\beta) \succeq \alpha'$ [3].

Теорема 2.1. Нехай топологічний простір (X,τ) та векторний топологічний простір (Y,μ) задовольняють першій аксіомі зліченності, $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ – довільна направленість відображень, для якої виконується умова $\tau - Li\ X_\alpha \neq \emptyset$. Тоді відображення $F : \tau - LiX_\alpha \to Y^\bullet$ буде *V*-границею для $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в тому і тільки тому випадку, якщо:

(1) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_\alpha$ та довільної направленості $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$, що τ-збігається до x і еквіузгоджена з сукупністю підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, виконується співвідношення:

$$F(x) \overset{(\Lambda)}{\preceq} \Lambda - \underset{\beta\in\mathrm{B}}{\underline{Lim\ \ inf}}\ F^{G(\beta)}(y_\beta); \tag{7}$$

(2) для кожного елемента $x \in \tau - Li\, X_\alpha$ існує τ-збіжна до x направленість $\{\bar{x}_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ така, що починаючи з деякого $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, виконуються включення $\bar{x}_\alpha \in X_\alpha\ \forall \alpha \ge \alpha_0$ і при цьому:

$$\Lambda - \overline{Lim\,sup}_{\alpha \in A}\, F^\alpha(\bar{x}_\alpha) \overset{(\Lambda)}{\preceq} F(x).$$

3. Варіаційна V-збіжність в евклідових просторах

Нехай $Y = R^n$. Позначимо μ через топологію поточкової збіжності на R^n. Введемо до розгляду напіврозширений евклідовий простір $\overline{R}^n$ (аналог множини Y^*).

Нехай $\{F^\alpha : X_\alpha \to \overline{R}^n\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ – довільна направленість, для якої виконується умова $\tau - LiX_\alpha \neq \emptyset$. Розглянемо відповідну сукупність задач векторної оптимізації:

$$\left\{ \left\langle \Lambda - \inf_{x \in X_\alpha} F^\alpha(x) \right\rangle = \left\langle \Lambda - \inf_{x \in X_\alpha} \begin{bmatrix} F_1^\alpha(x) \\ F_2^\alpha(x) \\ \dots \\ F_n^\alpha(x) \end{bmatrix} \right\rangle,\ \alpha \in \mathrm{A} \right\}, \tag{8}$$

де Λ – довільний замкнений тілесний конус в R^n.

Як відомо, один з найбільш поширених методів дослідження задач векторної оптимізації полягає в переході до відповідних λ-згорток. У зв'язку з цим, при фіксованому значенні вектора $\lambda^* \in \Lambda^*$, де Λ^* є спряженим конусом до конуса Λ, вихідній сукупності задач (8) поставимо у відповідність множину скалярних задач умовної мінімізації:

$$\left\{ \left\langle \inf_{x \in X_\alpha} \left(\lambda^*, F^\alpha(x)\right)_{R^n} \right\rangle = \left\langle \inf_{x \in X_\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* F_i^\alpha(x) \right\rangle \right\}_{\alpha \in \mathrm{A}}. \tag{9}$$

Нехай для направленості (9) існує сильна варіаційна S-границя [3]:

$$\left\langle \inf_{x \in \tau - LmX_\alpha} \Phi(x) \right\rangle,$$

де через $\Phi : \tau - LmX_\alpha \to \overline{R^n}$ позначено абсолютну S-границю направленості скалярних функцій

$$\left\{ (\lambda^*, F^\alpha(\cdot))_{R^n} : X_\alpha \to \overline{R^n} \right\}_{\alpha \in A}, \tag{10}$$

тобто $\Phi(x) \equiv \tau - lm_s\, (\lambda^*, F^\alpha(x))_{R^n}$.

Наведемо основні питання, які будуть досліджуватися в даній статті:

1. За яких умов абсолютна S-границя $\Phi : \tau - LmX_\alpha \to \overline{R}^n$ для направленості λ^*-згорток (10) буде λ^*-згорткою для V-граничного відображення:

$$\Lambda(\rho) - lm_V F^\alpha : \tau - LmX_\alpha \to \overline{R}^n,$$

тобто буде виконуватися співвідношення:

$$\Phi(x) = \left(\lambda^*, \Lambda(\rho) - lm_V F^\alpha(x)\right)_{R^n}, \forall x \in \tau - LmX_\alpha\,?$$

2. Які достатні умови гарантують виконання співвідношення:

$$\left(\lambda^*, \Lambda(\rho) - lm_V F^\alpha(x)\right)_{R^n} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \left(\tau - lm_s F_i^\alpha(x)\right),$$

тобто за яких умов абсолютну V-границю

$$\Lambda(\rho) - lm_V F^\alpha : \tau - LmX_\alpha \to \overline{R^n}$$

для направленості відображень $\{F^\alpha : X_\alpha \to \overline{R}^n\}_{\alpha \in A}$ можна представити у вигляді n-вимірного вектора, компоненти якого є S-границями відповідних компонентів вихідної направленості векторнозначних функцій?

Наведемо один допоміжний результат.

Лема 3.1. Нехай $\left\{F^{\alpha} : X_{\alpha} \to \overline{R}^{n}\right\}_{\alpha \in A}$ – довільна направленість векторозначних функцій, для якої виконується умова $\tau - LsX_{\alpha} \neq \emptyset$, Λ^{*} – спряжений конус до конуса $\Lambda \subset R^{n}$. Тоді для будь-яких $\lambda^{*} \in \Lambda^{*}$ та $x \in \tau - LsX_{\alpha}$ і довільної направленості $\left\{y_{\beta}\right\}_{\beta \in B}$, що τ-збігається до x і еквізгоджена з сукупністю підмножин $\left\{X_{\alpha}\right\}_{\alpha \in A}$, виконується нерівність:

$$\left(\lambda^{*}, \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\ inf}}\, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right)\right)_{R^{n}} \leq \underset{\beta \in B}{\lim\inf}\left(\lambda^{*}, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right)\right)_{R^{n}}. \tag{11}$$

Доведення.

Для обраних $x \in \tau - LsX_{\alpha}$ та $\left\{y_{\beta}\right\}_{\beta \in B}$ введемо позначення $W \overset{def}{=} \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\ inf}}\, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right)$. Тоді буде очевидним таке співвідношення:

$$0 = \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\ inf}}\left[F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right) - W\right] = \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\ inf}}\, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right) - W.$$

Отже, для будь-якого $\lambda^{*} \in \Lambda^{*}$ одержимо:

$$0 = \left(\lambda^{*}, \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\ inf}}\left[F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right) - W\right]\right)_{R^{n}} = \left(\lambda^{*}, \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\ inf}}\, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right)\right)_{R^{n}} - \left(\lambda^{*}, W\right)_{R^{n}}. \tag{12}$$

Проте, згідно з означенням операції $\Lambda - \underline{Lim\ inf}$, для будь-якої направленості $\left\{a_{\beta}\right\}_{\beta \in B}$ в R^{n} можемо записати:

$$\Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\ inf}}\, a_{\beta} = Minor_{\Lambda}\left(\Lambda - \underset{\beta \in B}{\lim\inf}\, a_{\beta}\right) = Minor_{\Lambda}\left(\Lambda - Inf\ M\right),$$

де через M позначено множину точок μ-згущення для $\left\{a_{\beta}\right\}_{\beta \in B}$.

Нехай M^{1} та M^{0} – множини точок згущення в R^{n} для направленостей $\left\{F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right)\right\}_{\beta \in B}$ та $\left\{F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right) - W\right\}_{\beta \in B}$ відповідно. Тоді:

$$conv_{\Lambda}\left(\Lambda - Inf\ M^{1}\right) = Minor_{\Lambda}\left(\Lambda - Inf\ M^{1}\right) + \Lambda = W + \Lambda.$$

Отже:

$$conv_{\Lambda}\left(\Lambda - Inf\ M^{0}\right) = \Lambda.$$

Звідси знаходимо:

$$conv_{\Lambda} M^{0} = \Lambda. \tag{13}$$

Оскільки операція скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_{R^{n}}$ є бінеперервною в τ-топології, то точками згущення в R^{n} для числової направленості

$$\left\{\left(\lambda^{*}, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right) - W\right)_{R^{n}}\right\}_{\beta \in B} \tag{14}$$

буде така сукупність елементів:

$$M^{0}_{\lambda^{*}} = \left\{a \in R^{n} \mid a = \left(\lambda^{*}, b\right)_{R^{n}} \forall b \in M^{0}\right\}.$$

Отже, $Inf\ M^{0}_{\lambda^{*}}$ є нижньою границею числової направленості (14), тобто

$$\underset{\beta \in B}{\lim\inf}\left(\lambda^{*}, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right) - W\right)_{R^{n}} \overset{def}{=} InfM^{0}_{\lambda^{*}}. \tag{15}$$

Далі, як випливає з (13), має місце включення $M^{0} \subset \Lambda$. Тому для будь-якого вектора λ^{*} із спряженого конуса Λ^{*} будуть очевидними співвідношення:

$$\left(\lambda^{*}, b\right)_{R^{n}} \geq 0 \qquad \forall b \in M^{0}.$$

Тоді, приймаючи до уваги (15), можемо записати:

$$\underset{\beta \in B}{\lim\inf}\left(\lambda^{*}, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right) - W\right)_{R^{n}} = \underset{\beta \in B}{\lim\inf}\left(\lambda^{*}, F^{G(\beta)}\left(y_{\beta}\right)\right)_{R^{n}} - \left(\lambda^{*}, W\right)_{R^{n}} \geq 0. \tag{16}$$

Отже, співставивши співвідношення (12) та (16), одержимо вихідну нерівність (11), що і потрібно було встановити.

За повною аналогією до попереднього можна встановити наступний результат.

Лема 3.2. Нехай $\left\{F^{\alpha} : X_{\alpha} \to \overline{R^{n}}\right\}_{\alpha \in A}$ – довільна направленість векторнозначних функцій, для якої виконується умова $\tau - LiX_{\alpha} \neq \emptyset$. Нехай Λ^{*} – спряжений конус до конуса $\Lambda \subset R^{n}$. Тоді для будь-яких $\lambda^{*} \in \Lambda^{*}$ $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ та довільної направленості $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, що τ-збігається до x і задовольняє умові $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ $\forall \alpha \in A$, виконується співвідношення:

$$\left(\lambda^{*}, \Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{Lim\,sup}}\, F^{\alpha}(x_{\alpha})\right)_{R^{n}} \geq \underset{\alpha \in A}{lim\,sup}\left(\lambda^{*}, F^{\alpha}(x_{\alpha})\right)_{R^{n}}. \tag{17}$$

Нехай топологічний простір (X, τ) задовольняє першій аксіомі зліченності, $\left\{F^{\alpha} : X_{\alpha} \to \overline{R^{n}}\right\}_{\alpha \in A}$ – довільна направленість відображень, для якої виконується умова $\tau - LiX_{\alpha} \neq \emptyset$. Будемо вважати, що для сукупності $\left\{F^{\alpha} : X_{\alpha} \to \overline{R^{n}}\right\}_{\alpha \in A}$ існує *V*-границя $F^{\bullet} : \tau - LiX_{\alpha} \to \overline{R^{n}}$. Тоді, згідно з теоремою 3.1, будуть справедливими такі твердження:

(1) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ і довільної направленості $\{y_{\beta}\}_{\beta \in B}$, що τ-збігається до x і еквіузгоджена з сукупністю підмножин $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, виконується співвідношення:

$$F^{\bullet}(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\;inf}}\, F^{G(\beta)}(y_{\beta}); \tag{18}$$

(2) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ існує τ-збіжна до x направленість $\{\overline{x}_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ така, що, починаючи з деякого $\alpha_0 \in A$, виконуються включення $\overline{x}_{\alpha} \in X_{\alpha}$ $\forall \alpha \succeq \alpha_0$ і при цьому:

$$\Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{Lim\,sup}}\, F^{\alpha}(\overline{x}_{\alpha}) \overset{(\Lambda)}{\preceq} F^{\bullet}(x). \tag{19}$$

Отже, приймаючи до уваги означення бінарних відношень $\overset{(\Lambda)}{\leq}$ та $\overset{(\Lambda)}{\preceq}$, для довільного вектора λ^{*} із спряженого конуса Λ^{*} співвідношення (18)–(19) можна переписати таким чином:

(1) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ і довільної направленості $\{y_{\beta}\}_{\beta \in B}$, що τ-збігається до x і еквіузгоджена з сукупністю підмножин $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, виконується нерівність:

$$\left(\lambda^{*}, F^{\bullet}(x)\right)_{R^{n}} \leq \left(\lambda^{*}, \Lambda - \underline{\underset{\beta \in B}{Lim\;inf}}\, F^{G(\beta)}(y_{\beta})\right)_{R^{n}}; \tag{20}$$

(2) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ існує τ-збіжна до x направленість $\{\overline{x}_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ така, що починаючи з деякого $\alpha_0 \in A$, виконуються включення $\overline{x}_{\alpha} \in X_{\alpha} \forall \alpha \succeq \alpha_0$ і при цьому:

$$\left(\lambda^{*}, \Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{Lim\,sup}}\, F^{\alpha}(\overline{x}_{\alpha})\right)_{R^{n}} \leq \left(\lambda^{*}, F^{\bullet}(x)\right)_{R^{n}}. \tag{21}$$

Водночас, нерівності (20)–(21), згідно з лемами 3.1 та 4.2, можна посилити. Отже, для направленості скалярних функцій

$$\left\{\left(\lambda^{*}, F^{\alpha}(\cdot)\right)_{R^{n}} : X_{\alpha} \to \overline{R^{n}}\right\}_{\alpha \in A}$$

будуть справедливими такі твердження:

(1) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ і довільної направленості $\{y_{\beta}\}_{\beta \in B}$, що τ-збігається до x і еквіузгоджена з сукупністю підмножин $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, виконується співвідношення:

$$\left(\lambda^{*}, F^{\bullet}(x)\right)_{R^{n}} \leq \underset{\beta \in B}{lim\,inf}\left(\lambda^{*}, F^{G(\beta)}(y_{\beta})\right)_{R^{n}}; \tag{22}$$

(2) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ існує τ-збіжна до x направленість $\{\overline{x}_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ така, що починаючи з деякого $\alpha_0 \in A$, виконуються включення $\overline{x}_{\alpha} \in X_{\alpha} \forall \alpha \succeq \alpha_0$ і при цьому:

$$\underset{\beta \in B}{lim\,sup}\left(\lambda^{*}, F^{\alpha}(\overline{x}_{\alpha})\right)_{R^{n}} \leq \left(\lambda^{*}, F^{\bullet}(x)\right)_{R^{n}}. \tag{23}$$

Проте, за результатами досліджень варіаційної збіжності задач умовної мінімізації [6, 7], наведені властивості (22) та (23) є гарантом того, що функція $\left(\lambda^{*}, F^{\bullet}(\cdot)\right)_{R^{n}} : \tau - LiX_{\alpha} \to \overline{R^{n}}$ є *S*-границею для направленості λ^{*}-згорток:

$$\left\{\left(\lambda^{*}, F^{\bullet}(x)\right)_{R^{n}} : X_{\alpha} \to \overline{R^{n}}\right\}_{\alpha \in A}.$$

Отже, встановлений результат можна сформулювати наступним чином.

Теорема 3.1. Нехай в топологічному просторі (X,τ), що задовольняє першій аксіомі зліченності, задано направленість підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, для якої $\tau - LiX_\alpha \neq \emptyset$. Нехай відображення $F^\bullet : \tau - LiX_\alpha \to \overline{R^n}$ є *V*-границею для $\left\{F^\alpha : X_\alpha \to \overline{R^n}\right\}_{\alpha\in A}$. Тоді для направленості λ^*-згорток $\left\{(\lambda^*, F^\alpha(\cdot))_{R^n} : X_\alpha \to \overline{R^n}\right\}_{\alpha\in A}$, де λ^* – довільний вектор із спряженого конуса Λ^*, існує *S*-границя, яка є λ^*-згорткою *V*-граничного відображення $F^\bullet : \tau - LiX_{\alpha\to}\overline{R^n}$, тобто виконується співвідношення:

$$\left(\lambda^*, F^\alpha(\cdot)\right)_{R^n} \overset{S}{\to} \left(\lambda^*, F^\bullet(\cdot)\right)_{R^n}. \tag{24}$$

Нехай для направленості відображень $\left\{F^\alpha : X_\alpha \to \overline{R^n}\right\}_{\alpha\in A}$ існує *V*-границя $F^\bullet : \tau - LiX_\alpha \to \overline{R^n}$. З'ясуємо структуру цієї *V*-границі. Зокрема, за яких умов відображення $F^\bullet : \tau - LiX_\alpha \to \overline{R^n}$ можна представити у вигляді n-вимірного вектора, компоненти якого є *S*-границями відповідних компонентів вихідної направленості векторнозначних функцій?

Введемо позначення:

$$F^s(x) = \begin{bmatrix} F_1^s(x) \\ F_2^s(x) \\ \cdots \\ F_n^s(x) \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \tau - lm_s F_1^\alpha(x) \\ \tau - lm_s F_2^\alpha(x) \\ \cdots \\ \tau - lm_s F_n^\alpha(x) \end{bmatrix}.$$

Нехай виконуються умови теореми 3.1. Оскільки за властивостями *S*-границь [5] на множині $\tau - LiX_\alpha$ виконується нерівність:

$$\tau - lm_s\left(\lambda^*, F^\alpha\right)_{R^n} \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \tau - lm_s F_i^\alpha,$$

то враховуючи наведені позначення, одержимо:

$$\left(\lambda^*, F^\bullet\right)_{R^n} = \tau - lm_s\left(\lambda^*, F^\alpha\right)_{R^n} \geq \left(\lambda^*, F^s\right)_{R^n}.$$

Отже, $(\lambda^*, F^\bullet - F^s)_{R^n} \geq 0$. Проте вектор λ^* належить спряженому конусу. Тому $F^\bullet - F^s \in \Lambda$, тобто при виконанні умов теореми 3.1 вектор-функції F^s та $F^\bullet$ знаходяться у співвідношенні $F^s \overset{(\Lambda)}{\leq} F^\bullet$ '.

Таким чином, слід зауважити, що вимога зліченності бази околів $N_\tau(x)$ довільної точки $x \in X$ не є достатньою умовою для виконання тотожності $F^s(x) = F^\bullet(x)\ \forall x \in \tau - LiX_\alpha$.

Введемо такі позначення для системи одиничних векторів в R^n:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Означення 3.1. Будемо казати, що тілесний конус Λ в R^n задовольняє умові Парето, якщо $e_i \in \Lambda^*$ при всіх значеннях індексу i = 1, 2, …, n.

Теорема 3.2. Нехай виконуються такі умови:

(1) топологічний простір (X,τ) задовольняє першій аксіомі зліченності;

(2) для направленості підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ існує непорожня нижня топологічна межа ($\tau - LiX_\alpha \neq \emptyset$);

(3) в R^n задано тілесний конус Λ, що задовольняє умові Парето;

(4) відображення $F^\bullet : \tau - LiX_\alpha \to \overline{R^n}$ є *V*-границею для направленості векторнозначних відображень $\{F^\alpha : X_\alpha \to \overline{R^n}\}_{\alpha\in A}$.

Тоді для *V*-граничного відображення $F^\bullet : \tau - LiX_\alpha \to \overline{R^n}$ буде справедливим:

$$F^{\bullet}(x) = \begin{bmatrix} F_1^{\bullet}(x) \\ F_2^{\bullet}(x) \\ \dots \\ F_n^{\bullet}(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tau - lm_s F_1^{\alpha}(x) \\ \tau - lm_s F_2^{\alpha}(x) \\ \dots \\ \tau - lm_s F_n^{\alpha}(x) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Доведення.

Оскільки конус Λ задовольняє умові Парето, приймемо у співвідношеннях (22)–(23) $\lambda^{*} = e_i$. Тоді при кожному значенні i = 1, 2, ..., n будуть справедливими такі твердження:

(1) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ і довільної направленості $\{y_{\beta}\}_{\beta \in B}$, що τ-збігається до x і еквіузгоджена з сукупністю підмножин $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, виконується співвідношення:

$$F_i^{\bullet}(x) \le \liminf_{\beta \in B} F_i^{G(\beta)}(y_{\beta}); \tag{26}$$

2) для кожного елемента $x \in \tau - LiX_{\alpha}$ існує τ-збіжна до x направленість $\{\overline{x}_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ така, що, починаючи з деякого $\alpha_0 \in A$, виконуються включення $\overline{x}_{\alpha} \in X\alpha \; \forall \alpha \succeq \alpha_0$ і при цьому:

$$\limsup_{\alpha \in A} F_i^{\alpha}(\overline{x}_{\alpha}) \le F_i^{\bullet}(x). \tag{27}$$

Проте, з наведених властивостей (26) та (27) випливає [6], що при кожному значенні i = 1, 2, ..., n функції $F_i^{\bullet}(\cdot) : \tau - LiX_{\alpha} \to \overline{R^n}$ є S-границями для відповідних направленостей $\left\{F_i^{\bullet}(\cdot) : X_{\alpha} \to \overline{R^n}\right\}_{\alpha \in A}$, тобто:

$$F_i^{\bullet}(\cdot) = \tau - lm_s F_i^{\alpha}(x), \qquad \forall x \in \tau - LiX_{\alpha}, \; i = 1, 2, \dots, n.$$

Приклад 3.1. Розглянемо задачу векторної оптимізації:

$$\left\langle \Lambda - \operatorname*{Inf}_{(u,y) \in X_{\varepsilon}} F^{\varepsilon}(u, y) \right\rangle; \tag{28}$$

$$X_{\varepsilon} = U \times \left\{ y \in H_0^1(c, d) \;\middle|\; \begin{matrix} -\left[a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)y\right]' = u(x), \\ y(c) = y(d) = 0 \end{matrix} \right\} \subset L^2(c, d) \times H_0^1(c, d),$$

де U – опукла обмежена та слабко замкнута підмножина гільбертового простору $L^2(c,d)$; ε – малий параметр відображення $F^{\varepsilon} : X_{\varepsilon} \to R^2$, що означений за правилом:

$$F^{\varepsilon}(u, y) = \begin{bmatrix} F_1^{\varepsilon}(u, y) \\ F_2^{\varepsilon}(u, y) \end{bmatrix},$$

де $F_1^{\varepsilon}(u, y) = \int_c^d g\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)(y')^2 dx + \int_c^d u^2 dx;$ $\qquad F_2^{\varepsilon}(u, y) = \int_c^d h\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)(y)^2 dx + \int_c^d u^2 dx;$

a $(\cdot)$, $g(\cdot)$, h$(\cdot)$ – строго додатні 1-періодичні функції; Λ – невід'ємний ортант в R^2 (конус Парето). Нехай τ – добуток топологій слабких збіжностей на $L^2(c,d)$ та $H_0^1(c,d)$.

Згідно з результатами роботи [2], для послідовності множин $\{X_{\varepsilon}\}_{\varepsilon \to 0}$ існує топологічна границя $\tau - LmX_{\varepsilon}$, що визначається за правилом:

$$\tau - LmX_{\varepsilon} = \{(u, y) \in U \times H_0^1(c,d) \;|\; -a_0 y'' = u\},$$

де $a_0 = \left[\int_0^1 a^{-1}(\xi) d\xi\right]^{-1}$.

Оскільки конус Λ задовольняє умові Парето, а функціонали F_i^{ε} є рівномірно коерцитивними на $H_0^1(c,d) \times L^2(c,d)$, то для побудови V-усередненої задачі до (28) можна скористатися теоремою 3.2. Тоді отримаємо:

$$\tau - lm_s F_1^{\varepsilon}(u, y) = g_0 \int_c^d (y')^2 dx + \int_c^d u^2 dx;$$

$$\tau - lm_s F_2^{\varepsilon}(u, y) = h_0 \int_c^d y^2 dx + \int_c^d u^2 dx,$$

де:

$$g_0 = \int_0^1 g(\xi)a^{-2}(\xi)d\xi \cdot \left[\int_0^1 a^{-1}(\xi)d\xi\right]^{-2}; \; h_0 = \int_0^1 h(\xi)d\xi .$$

Таким чином, для V-усередненої задачі буде справедливим:

$$\left\langle \Lambda - \underset{(u,\,y)\in\tau-LmX_\varepsilon}{Inf} \left[\frac{g_0\int_c^d (y')^2 dx + \int_c^d u^2 dx}{h_0\int_c^d y^2 dx + \int_c^d u^2 dx}\right]\right\rangle.$$

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
2. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993. — 464 с.
3. *Когут П.И.* S-сходимость в теории усреднения задач оптимального управления // Укр. мат. журн., 1997. - Т. 47. - №. 6. - С. 1488–1498.
4. *Когут П.И.* S-сходимость задач условной минимизации и ее вариационные свойства // Проблемы управления и информатики, 1997. — № 4. — С. 64–79.
5. *Когут П.И.* Вариационная сходимость задач минимизации. Часть 1. Определение и основные свойства // Проблемы управления и информатики, 1996. - № 5. - С. 29–43.
6. *Когут П.И.* Секвенциальные свойства S-пределов и их приложения в задачах оптимизации // Компьютерные методы в задачах прикладной математики и механики. Сб. трудов ИК НАН Украины. - 1997. — С. 47–54.
7. *Kogut P., Leugering G.* S-Homogenization of Optimal Control Problems in Banach Spaces // Mathematische Nachrichten, 2000 (to appear).
8. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. - М.: Мир, 1966. - Т. 1. - 594 с.
9. Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. Е.Г. Гольштейна -- М.: Наука, 1991. — 448 с.
10. *Федорчук В.В., Филлипов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. - М.: МГУ, 1998. - 252 с.

КОГУТ Петро Ілліч —доктор фізико-математичних наук, професор кафедри комп'ютерних інформаційних технологій Дніпропетровського державного технічного університету залізничного транспорту.

Наукові інтереси:

-- варіаційне числення та теорія оптимального керування.

ПОВІДАЙКО Петро Михайлович — кандидат технічніх наук, доцент кафедри автоматизованого управління в технічних системах Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– проектування систем оптимального керування.

РУДЯНОВА Тетяна Миколаївна - доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних технологій Дніпропетровського державного фінансово-економічного інституту.

Наукові інтереси:

—варіаційне числення та теорія оптимального керування.

Подано 05.12.1999.