УДК 681.5.013

В.А. Сушицький, ст. викл.

Житомирський інженерно-технологічний інститут

ПРЯМИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ СУБОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Викладений прямий чисельний метод синтезу субоптимального керування, який грунтується на представленні початкового розв'язку у вигляді функцій часу. Для пошуку найкращих із допустимих фазових траєкторій руху об'єкта використовується ітераційна процедура. Метод орієнтований на використання ЕОМ і відрізняється універсальністю підходу до розв'язку широкого класу задач.

Розглянемо задачу пошуку оптимального керування динамічним об'єктом при наявності обмежень. Нехай на інтервалі керування ($t_0,\ t_k$) об'єкт порядку r описується системою (в загальному випадку – нелінійних) диференціальних рівнянь:

$$\dot{X} = F(X, U), \tag{1}$$

де $X,\ \dot{X}$ – вектори фазових координат об'єкта та їх похідних;

F – функції фазових координат та керувань;

$U = (u_1,\ u_2,\ ...,\ u_m),\ \ m < r$ – вектор керуючих функцій.

Необхідно знайти керування $U \in \Gamma$ (Γ – замкнута область), які переводять об'єкт з відомої початкової у відому кінцеву точку фазового простору і забезпечують екстремум функціоналу:

$$I = \int_{t_0}^{t_k} \varphi(X, U, t)dt\ . \tag{2}$$

Для вирішення цієї задачі в [1] запропоновано машинно-орієнтований метод синтезу субоптимальних термінальних керувань, алгоритм якого базується на прямому методі Рітца: розв'язок шукають у вигляді інтерполяційних сплайн-функцій часу степеня k:

$$X = S_k(\tau_j),\quad j = 0,\ 1,\ 2, ...,\ n\ , \tag{3}$$

де $S_k(\tau_j)$ – сплайн-функція степеня k > 0 на системі з n вузлових точок в інтервалі керування ($t_0,\ t_k$):

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_n = t_k\ .$$

Практичне застосування цього метода для розв'язку складних нелінійних задач виявило ряд його недоліків. Найбільш суттєвим серед них є те, що результат розрахунку:

- має статистичний характер;
- залежить від сукупності факторів, типових для багатьох пошукових методів: розташування початкової точки пошуку, величини штрафу, наявності та місцезнаходження особливих точок;
- залежить від кількості сплайнів, способу задання їх нахилів та способу розбиття інтервалу керування на часткові відрізки.

 © В.А. Сушицький, 2000

Нижче описаний метод пошуку субоптимального керування динамічним об'єктом при наявності обмежень, вільний від вказаних недоліків. Він може розглядатися як доповнення або завершальний етап методу інтерполяційних сплайн-функцій [1], оскільки для початку його роботи необхідно мати початковий (стартовий) розв'язок. Але в силу того, що цей розв'язок може бути отриманий не тільки вищезгаданим, але й іншими (порівняно з ним – менш ефективними) методами [2], можна виділити його в окремий прямий чисельний метод синтезу субоптимального керування.

Припустимо, що на інтервалі керування $(t_0,\ t_k)$ існує деякий неоптимальний стартовий розв'язок поставленої задачі у вигляді довільних функцій часу (наприклад (3)), який не забезпечує екстремум функціоналу (2), однак задовольняє системі (1), граничним умовам задачі та обмеженням на керування. У векторній формі цей розв'язок має вигляд:

$$X = \Phi^0(t),\quad t \in (t_0,\ t_k).$$

Методику синтезу субоптимального керування зручно демонструвати на одномірному динамічному об'єкті другого порядку. Нехай такий об'єкт описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\ x_2); \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,\ x_2,\ u). \end{cases} \tag{4}$$

Необхідно знайти керування $u \in \Gamma$ (Γ – замкнута область), які переводять об'єкт з відомої початкової $[x_1(t_0),\ x_2(t_0)]$ у відому кінцеву точку $[x_1(t_k),\ x_2(t_k)]$ фазового простору:

$$x_1(t_0) = x_1^0;\quad x_2(t_0) = x_2^0;$$
$$x_1(t_k) = x_1^k;\quad x_2(t_k) = x_2^k,$$

і забезпечують екстремум функціоналу:

$$I = \int_{t_0}^{t_k} \varphi(x_1,\ x_2,\ u)\, dt\ . \tag{5}$$

Координата x_1 та її похідні задані стартовим розв'язком:

$$x_1 = \phi^0(t); \tag{6}$$
$$\dot{x}_1 = \dot{\phi}^0(t); \tag{7}$$
$$\ddot{x}_1 = \ddot{\phi}^0(t). \tag{8}$$

Послідовною підстановкою виразів (6) та (7) в перше рівняння системи (4), а потім виразу (8) – в друге рівняння цієї системи, отримують функціональні залежності другої координати та керування від координати x_1 та її похідних:

$$x_2 = \psi_1(x_1,\ \dot{x}_1);$$
$$u = \psi_2(x_1,\ \dot{x}_1,\ \ddot{x}_1),$$

або відносно стартового розв'язку:

$$x_2 = \psi_1\left[\phi^0(t),\ \dot{\phi}^0(t)\right];$$
$$u = \psi_2\left[\phi^0(t),\ \dot{\phi}^0(t),\ \ddot{\phi}^0(t)\right].$$

Покривають інтервал $(t_0,\ t_k)$ рахунковою сіткою з кроком h і представляють дискретний час, стартовий розв'язок та його похідні у вигляді матриці:

© В.А. Сушицький, 2000

$$M\left[r,i\right]=\begin{Vmatrix}\theta^0(0) & \theta^0(1)\ldots & \theta^0(ih)\ldots & \theta^0(N)\\ \phi^0(0) & \phi^0(1)\ldots & \phi^0(ih)\ldots & \phi^0(N)\\ \dot{\phi}^0(0) & \dot{\phi}^0(1)\ldots & \dot{\phi}^0(ih)\ldots & \dot{\phi}^0(N)\\ \ddot{\phi}^0(0) & \ddot{\phi}^0(1)\ldots & \ddot{\phi}^0(ih)\ldots & \ddot{\phi}^0(N)\end{Vmatrix}, \tag{9}$$

де

$$\theta^0(i)=t_0+ih\,,\quad i = 0, 1, 2,\ldots, N;$$

$$N=\frac{t_K-t_O}{h};\quad r = 0, 1, 2, 3.$$

Функціонал якості (5) представляють у дискретному вигляді:

$$I=\sum_{i=0}^{N}\varphi\left(M\left[1,i\right],\ M\left[2,i\right],\ M\left[3,i\right]\right). \tag{10}$$

Для кожного значення $i\in\left[1, N-1\right]$ проводять наступну послідовність операцій:

– виконують варіацію швидкості $\dot{\phi}(i)$ на величину $\Delta\dot{\phi}$ і розраховують відповідні до цього зміни елементів матриці M : час руху об’єкта на двох рахункових інтервалах, суміжних з i-ою точкою, вираховують як кратне від ділення приросту шляху на середнє значення швидкості у відповідному інтервалі, а прискорення руху об’єкта на цих же інтервалах вираховують як кратне від ділення приросту швидкості на час, за який цей приріст відбувся. В порядку виконання математичних дій це описується так:

$$\dot{\phi}^v(i)=M\left(2,\ i\right)+\Delta\dot{\phi};$$

$$\theta^v(i)=2\frac{M\left(1,\ i\right)-M\left(1,\ i-1\right)}{\dot{\phi}^v(i)+M\left(2,\ i-1\right)};$$

$$\ddot{\phi}^v(i)=\frac{\dot{\phi}^v(i)-M\left(2,\ i-1\right)}{\theta^v(i)};$$

$$\theta^v(i+1)=2\frac{M\left(1,\ i+1\right)-M\left(1,\ i\right)}{M\left(2,\ i+1\right)+\dot{\phi}^v(i)};$$

$$\ddot{\phi}^v(i+1)=\frac{M\left(2,\ i+1\right)-\dot{\phi}^v(i)}{\theta^v(i+1)};$$

– вираховують нове значення керуючої дії в точках i та (i + 1):

$$u^v(i)=\psi_2\left(M\left(1,\ i\right),\ \dot{\phi}^v(i),\ddot{\phi}^v(i)\right);$$

$$u^v(i+1)=\psi_2\left(M\left(1,\ i+1\right),\ \dot{\phi}^v(i+1),\ \ddot{\phi}^v(i+1)\right);$$

– перевіряють виконання обмежень на керування:

$$\left|u^v(i)\right|\le 1;$$

$$\left|u^v(i+1)\right|\le 1.$$

Якщо хоча б одна з цих нерівностей не виконується, то варіація вважається невдалою, відповідним елементам матриці M залишають їхні попередні значення та переходять до наступної точки (i збільшують на 1). В іншому випадку – перевіряють виконання умови просування в напрямку наближення до екстремуму функціоналу якості (10). Для цього визначають знак його приросту, порівнюючи між собою початкове та нове значення локальної суми функціоналу в точках i та (i + 1):

$$\Delta I^{\,0}=\varphi\left(M\left(1,\ i\right),\ M\left(2,\ i\right),\ M\left(3,\ i\right)\right)+\varphi\left(M\left(1,\ i+1\right),\ M\left(2,\ i+1\right),\ M\left(3,\ i+1\right)\right);$$

$$\Delta I^{\,v}=\varphi\left(M\left(1,\ i\right),\ \dot{\phi}^v(i),\ \ddot{\phi}^v(i)\right)+\varphi\left(M\left(1,\ i+1\right),\ \dot{\phi}^v(i+1),\ \ddot{\phi}^v(i+1)\right),$$

 © В.А. Сушицький, 2000

Якщо локальна сума функціоналу якості змінилася в напрямку наближення до екстремуму, то варіація вважається вдалою, і відповідним елементам матриці M присвоюють їх тимчасові значення:

$$M(0, i) = \theta^{v}(i);$$
$$M(2, i) = \dot{\phi}^{v}(i);$$
$$M(3, i) = \ddot{\phi}^{v}(i);$$
$$M(0, i+1) = \theta^{v}(i+1);$$
$$M(3, i+1) = \ddot{\phi}^{v}(i+1).$$

Якщо ж локальна сума функціоналу якості не змінилася або змінилася в напрямку віддалення від екстремуму, то варіація вважається невдалою, відповідним елементам матриці M залишають їхні попередні значення і переходять до наступної точки (i збільшують на 1). У всіх випадках елементи другого рядка матриці M залишаються без змін.

Після того, як буде досягнута кінцева точка $i = N - 1$, закінчується поточна ітерація та починається нова, ідентична попередній. Цей процес продовжується доти, доки під час чергової ітерації виявлятиметься вдалою хоча б одна варіація із заданою величиною та знаком $\Delta\dot{\phi}$.

Якщо під час чергової ітерації не виявиться жодної вдалої варіації (холоста ітерація), знак $\Delta\dot{\phi}$ змінюють на протилежний і процес повторюється до наступної холостої ітерації. Після цього зменшують значення $\Delta\dot{\phi}$ (наприклад, в два рази), і процес знову повторюється. Сигналом про закінчення процедури пошуку керування може служити виконання нерівності:

$$\left|\Delta\dot{\phi}\right| \le \xi ,$$

де ξ – задане мінімальне значення модуля приросту швидкості.

З описаної методики видно, що варіації траєкторій в ітеративному процесі здійснюються на всіх рахункових точках відрізку керування, крім крайніх. Отже, метод гарантує виконання граничних умов, оскільки граничні умови, отримані разом із стартовим розв'язком, залишаються без змін.

Можливості методу перевірені на задачі, яка має точний аналітичний розв'язок [3]. На інтервалі керування (t_0, t_k) об'єкт описується системою диференціальних рівнянь з обмеженнями, накладеними на керування:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases} \tag{11}$$

$$|u| \le 1 . \tag{12}$$

Потрібно перевести об'єкт з початкової точки фазової площини $\left[x_1(t_0) = 0;\ x_2(t_0) = 0\right]$ в кінцеву точку $\left[x_1(t_k) = 1;\ x_2(t_k) = 0\right]$ за мінімальний час.

Вважаємо, що стартовий розв'язок одержано методом [1] – ним може стати перша ж знайдена регулярним чи випадковим пошуком сплайн-функція, яка задовольняє обмеженням (12) з дотриманням граничних умов. Виходячи з системи рівнянь (11), можна записати:

$$x_1 = \phi^{0}(t);$$
$$x_2 = \dot{\phi}^{0}(t);$$
$$u = \ddot{\phi}^{0}(t).$$

© В.А. Сушицький, 2000

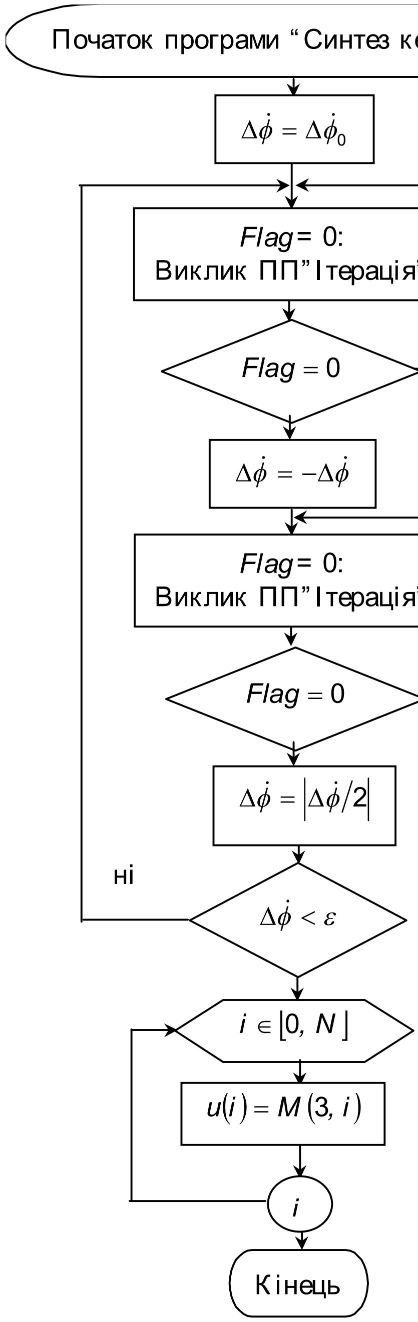

Рис. 1. Блок-схема основної програми синтезу керування

Матриця $M[r, i]$ матиме вигляд (9), а функціонал якості:

$$I = min\left(\sum_{i=1}^{N} M[0,\ i]\right), \quad N = \frac{t_K}{h}.$$

Подальші операції зручно представити у вигляді блок-схеми алгоритму пошуку числового розв’язку задачі. Цей алгоритм складається з основної програми “Синтез керування” (рис. 1) та підпрограми “Ітерація” (рис. 2).

 © В.А. Сушицький, 2000

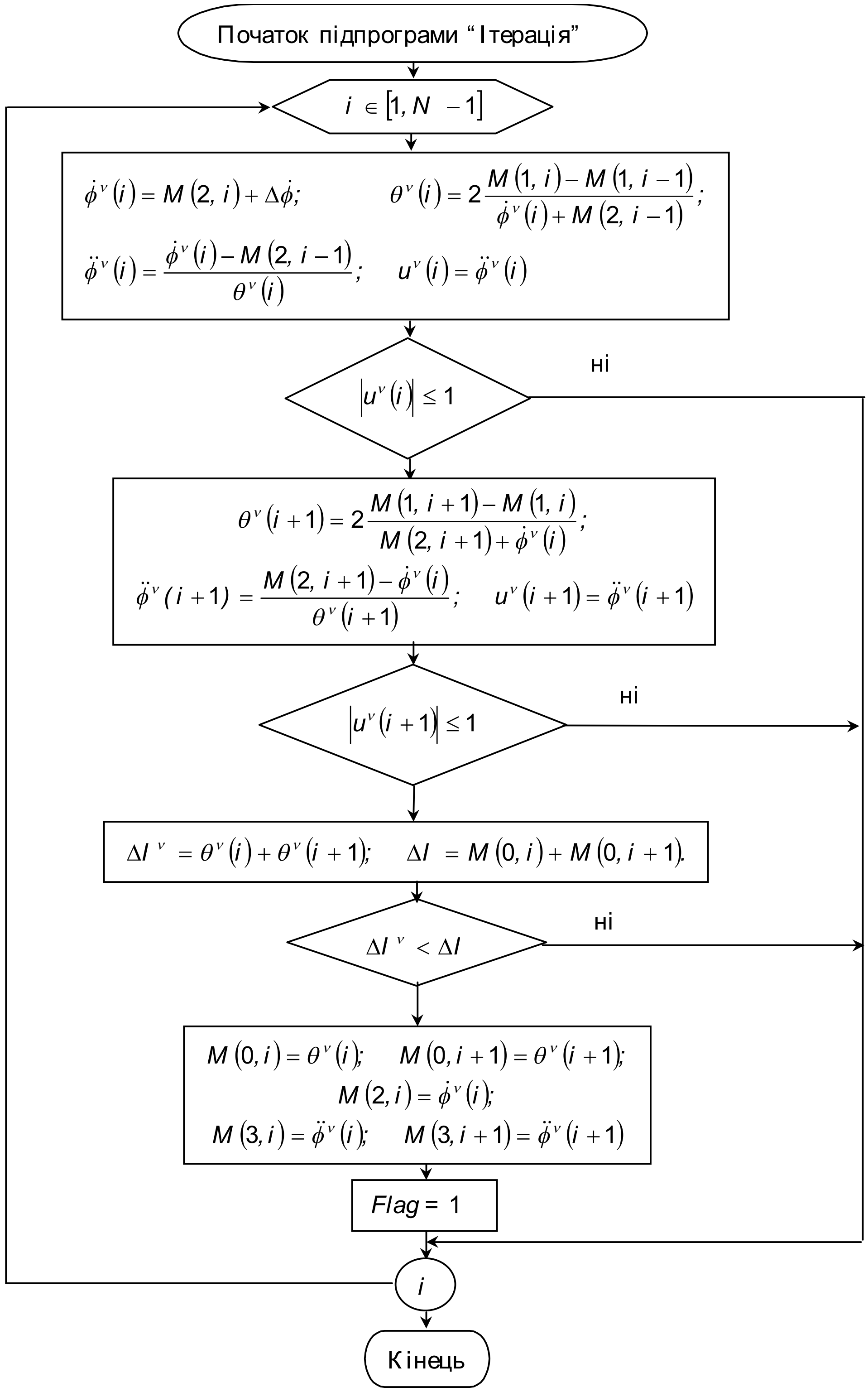

Рис. 2. Блок-схема підпрограми “Ітерація”

© В.А. Сушицький, 2000

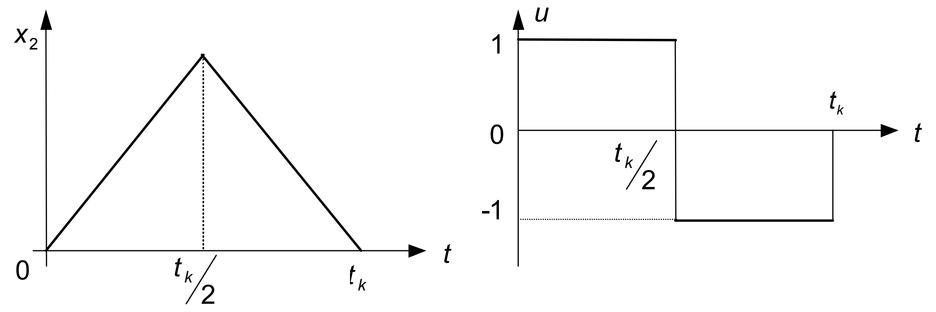

Рис. 3. Оптимальний розв'язок задачі

Графіки знайдених функціональних залежностей координати $x_2(t)$ та керування $u(t)$, які задовольняють умови задачі, представлені на рис. 3.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Сушицький В.А.* Машинно-орієнтований метод синтезу субоптимального керування // Вісник ЖІТІ. – 1996. – № 3. – С. 167–170.
2. *Батенко А.П.* Системы терминального управления. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М: Наука, 1976. – 392 с.

СУШИЦЬКИЙ В'ячеслав Анастасійович – старший викладач кафедри А і КТ Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– розробка систем промислової автоматики.

Подано 03.11.1999.

 © В.А. Сушицький, 2000