УДК 629.7.054

В.В. Карачун, д.т.н., проф.
Н.А. Кубрак, аспір.
Національний технічний університет України “КПІ”

КОМП’ЮТЕРНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ФУНКЦІЙ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ СТРУННОГО ПІДВІСУ ПРИЛАДІВ

Запропоновано алгоритм наближеного комп’ютерного моделювання динаміки струнного підвісу ряду навігаційних приладів.

Математична модель струнного підвісу ряду навігаційних приладів може бути представлена у вигляді хвильового рівняння (як перше наближення) і більш повно у вигляді рівняння динаміки важкої нитки, навантаженої одним (на вільному кінці) або кількома тягарями [1, 2].

Ці два рівняння можуть бути зведені в одне:

$$m(x)\frac{d^2 y_z}{dt^2} + R(x)\frac{dy_z}{dt} = T(x)\frac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

де x, t – лінійний розмір та час; y – відхилення точки підвісу від її положення рівноваги;

$m(x)$, $R(x)$ та $T(x)$ – відповідно маса, коефіцієнт опору рухові та натяжіння нитки;

$f(x,t)$ – зовнішня (поперечна) сила, що діє на підвіс.

Для струни (хвильове рівняння) натяжіння вважається константою, а для нитки натяжіння в кожній точці дорівнює сумі мас, розташованих під даною точкою, помноженій на g – прискорення земного тяжіння.

Аналітичні (точні) розв’язки даної задачі відомі, але вони надзвичайно громіздкі, щоб їх можна було використовувати в інженерних розрахунках динаміки приладів, а тим більше більш складних технічних систем. Тому представляє інтерес пошук наближеної моделі, наприклад, у вигляді дробово-раціональної передаточної функції окремого каналу чи, можливо, ряду каналів, які цікавлять дослідника, в подібному об’єкті.

Для цього динамічну модель підвісу будемо уявляти як сукупність зосереджених мас («бусинок»), з’єднаних між собою невагомими нерозтяжними нитками. Відстань h між сусідніми бусинками є сталою:

$$h = l/m,$$

де l – довжина струни;

m – кількість відрізків, на стиках яких розміщуються бусинки.

Масу нитки рівномірно розподіляємо між бусинками ($m_z = m_{стр}/m$, $1 \le z \le m-1$, де m_z – маса z-ї бусинки; $m_{стр}$ – маса усієї струни).

Бусинкам на кінцях струни надаємо маси $m_0 = m_m = m_z/2$. За такої умови сумарна маса струни буде якраз дорівнювати сумі мас бусинок. Якщо на струні фіксується довільна кількість зосереджених мас будь-якої величини, то їх маси додаються до мас відповідних бусинок. Остаточний розподіл мас між бусинками фіксується масивом:

Mb:Coef (*type Coef*=*array*[-1..30] *of real*) [4, 5].

	-1	0	1	2	3	...	m	...	30
Mb	m	m_0	m_1	m_2	m_3	...	M_m	...	

Сили опору рухові відтворюються масивом *Mr* такої ж структури, як і масив *Mb*. На z – y бусинку діє сила, яка дорівнює силі опору, прикладеній до відрізка підвісу довжиною h. Якщо ж на підвісі фіксовані маси з ненульовими розмірами, то опір, викликаний наявністю цих мас, відображається відповідним збільшенням елементів масиву *Mr*.

Масив *T:Coef* заповнюється значеннями натяжіння струни (константа для моделі струни, або як згадувалось вище – для моделі нитки).

Дискретна модель підвісу набуває вигляду:

$$m_z\frac{d^2 y_z}{dt^2} + R_z\frac{dy_z}{dt} = D_z\left(y_{z-1} - \left(D_z + D_{z+1}\right)\cdot y_z + y_{z+1}\right) + f_{xt}(s,t),$$
$$1 \le z \le m-1, \tag{2}$$

де $D = T_s / h^2$ (далі будемо користуватися масивом *D:Coef*).

Граничні умови будемо розглядати трьох родів (Ngl = 1, 2, 3 для $x = 0$; Ngr = 1, 2, 3 для $x = l$).

Для лівого кінця ($x = 0$):

$$Ngl = 1; \qquad y_0 = y^L(t), \tag{3}$$

де $y^L(t)$ – переміщення точки підвісу $x = 0$;

$$Ngl = 2;$$

$$m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = f^L(t) + D_1(y_1 - y_0) - R_0 \frac{dy_0}{dt}, \tag{4}$$

де $f^L(t)$ – сила, прикладена в точці $x = 0$;

$$Ngl = 3;$$

$$m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = C_0\left[y_k{}^L(t) - y_0\right] + D_1(y_1 - y_0) - R_0 \frac{dy_0}{dt}, \tag{5}$$

де C_0 – коефіцієнт жорсткості пружини, один кінець якої приєднано до підвісу в точці $x = 0$, а інший переміщується на величину $y_K^L(t)$.

Для правого кінця ($x = l$):

$$Ngr = 1; \qquad y_m = y^R(t), \tag{6}$$

де $y^R(t)$ – переміщення точки підвісу $x = l$;

$$Ngr = 2;$$

$$m_m \frac{d^2 y_m}{dt^2} = f^R(t) + D_m(y_{m-1} - y_m) - R_m \frac{dy_m}{dt}, \tag{7}$$

де $f^R(t)$ – сила, що діє на точку $x = l$;

$$Ngr = 3;$$

$$m_m \frac{d^2 y_m}{dt^2} = C_1\left[y_k{}^R(t) - y_m\right] + D_m(y_{m-1} - y_m) - R_m \frac{dy_m}{dt}, \tag{8}$$

де C_1 – жорсткість пружини, один кінець якої приєднано до підвісу в точці $x = l$, а інший зміщується на величину $y_k^R(t)$.

Оскільки математична модель формується нами для визначення передаточної функції будь-якого каналу, то в залежності від вибраного каналу відповідний збурюючий чинник (вхідний сигнал) вважається присутнім. Усі ж інші чинники приймаються рівними нулю.

Щоб формалізувати задання вхідної точки групи (віяла) каналів, яка нас цікавить, домовимося нумерувати вхідні сигнали наступним чином:

$$N_{inp} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 1); \\ 2, & \text{якщо } f^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 2); \\ 3, & \text{якщо } y_k^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 3); \\ 4, & \text{якщо } y^R(t) \text{ є входом } (Ngl = 1); \\ 5, & \text{якщо } f^R(t) \text{ є входом } (Ngl = 2); \\ 6, & \text{якщо } y_k^R(t) \text{ є входом } (Ngl = 1); \\ 7, & \text{якщо } f_{xt}(z_{inp}, t) \text{ є входом, тобто входом є сила,} \\ & \text{прикладена тільки до } z_{inp} \text{ – ї бусинки;} \\ 8, & \text{якщо входом є } f(z,t) = f_1(z) f_2(t) \text{ – сила,} \\ & \text{прикладена одночасно до усіх бусинок.} \end{cases}$$

Виконуємо над (2) перетворення Лапласа при нульових початкових умовах та ділимо кожен член на зображення вхідного сигналу:

$$-DW_{z-1}(p) + P_z(p)W_z(p) - D_{z+1}W_{z+1}(p) = K_z, \tag{9}$$

де

$$P_z(p) = m_z p^2 + R_z p + D_z + D_{z+1};$$

$$K_z = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left(\left(N_{inp} = 7\right) \text{ та } \left(Z = Z_{inp}\right)\right) \quad \text{або} \quad \left(\left(N_{inp} = 8\right) \text{ та } \left(1 \le z \le m-1\right)\right); \\ f_1(z), \text{ якщо } \left(N_{inp} = 8\right); \\ 0 - \text{в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

$W_z(p)$ – передаточна функція каналу « $X_{inp} \to Y_z$ ».

Відомо [4], що в динамічних об'єктах передаточні функції усіх каналів можуть бути представлені у вигляді:

$$W_z(p) = \frac{B_z(p)}{A(p)}, \tag{10}$$

де $A(p)$ – спільний для усіх передаточних функцій даного об'єкта знаменник (характеристичний поліном об'єкта).

Помноживши (9) на $A(p)$, одержимо:

$$-DB_{z-1}(p) + P_z(p)B_z(p) - D_{z+1}B_{z+1}(p) = K_z A(p), \quad 1 \le z \le m-1. \tag{11}$$

Система (11) є тридіагональною. Для її розв'язання скористаємося методом прогонки [3], особливістю якого буде те, що оперувати доведеться не числами, а поліномами від p. В процесі виконання прямого ходу будемо приводити z-е рівняння до такого вигляду:

$$V_z(p)B_z(p) - U_z(p)B_{z+1}(p) = Q_z A(p). \tag{12}$$

Тоді $(z-1)$-е рівняння матиме вигляд:

$$V_{z-1}(p)B_{z-1}(p) - U_{z-1}(p)B_z(p) = Q_{z-1}A(p). \tag{13}$$

Помноживши (11) на $V_{z-1}(p)$, а (13) на D_z і склавши ці рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} &\left[P_z(p)V_{z-1}(p) - D_z U_{z-1}(p)\right]B_z(p) - D_{z+1}V_{z-1}(p)\cdot B_z(p) = \\ &= \left[k_z V_{z-1}(p) + D_z Q_{z-1}(p)\right]A(p). \end{aligned} \tag{14}$$

Порівнюючи (12) з (14), приходимо до висновку, що:

$$\begin{cases} V_z(p) = P_z(p)V_{z-1}(p) - D_z U_{z-1}(p); \\ U_z(p) = D_{z+1}V_{z-1}(p); \\ Q_z(p) = K_z V_{z-1}(p) + D_z Q_{z-1}(p), \quad 1 \le z \le m-1. \end{cases} \tag{15}$$

Формули (15) можна розглядати як рекурентні. Але для того, щоб вони «запрацювали», необхідно з лівої граничної умови визначити

$$V_0(p), \quad U_0(p) \quad \text{та} \quad Q_0(p).$$

Розглянемо, як це можна зробити. Якщо над (3) ($Ngl = 1$) виконати перетворення Лапласа, поділити на зображення вхідного сигналу і помножити на $A(p)$, то одержимо:

$$B_0(p) = \begin{cases} A(p), \text{ якщо } N_{inp} = 1; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

звідки, порівнюючи останній вираз з (12) при $z = 0$, можемо прийняти:

$$\begin{cases} V_0(p) = 1; \\ U_0(p) = 0; \\ Q_0(p) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } N_{inp} = 1; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \tag{16}$$

Для $Ngl = 2$ з (4) аналогічно маємо:

$$\left(m_0 p^2 + R_0 p + D_1\right)B_0(p) = D_1 B_1(p) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } N_{inp} = 2; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Порівнюючи останній вираз з (12) при $z = 0$, приходимо до висновку, що

$$\begin{cases} V_0(p) = m_0 p^2 + R_0 p + D_1; \\ U_0(p) = D_1; \\ Q_0(p) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } N_{inp} = 2; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \tag{17}$$

При $Ngl = 3$ з (5) маємо:

$$\left(m_0 p^2 + R_0 p + C_0 + D_1 B_0\right)(p) - D_1 B_1(p) = \begin{cases} C_0 A(p), \text{ якщо } N_{inp} = 3; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Порівнюємо останній вираз з (12) при $z = 0$:

$$\begin{cases} V_0(p) = m_0 p^2 + R_0 p + C_0 + D; \\ U_0(p) = D; \\ Q_0(p) = \begin{cases} C_0, \text{ якщо } N_{inp} = 3; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (18)$$

Отже, прямий хід може бути виконаний за формулами (15). При $z = m - 1$ з (12) матимемо:

$$V_{m-1}(p) B_{m-1}(p) - U_{m-1}(p) B_m(p) = Q_{m-1} A(p). \quad (19)$$

Щоб знайти $B_m(p)$, доповнимо рівняння (19) граничною умовою при $x = 1$ $Ngl = 1$. Згідно з (6) маємо:

$$B_m(p) = \begin{cases} A(p), \text{ якщо } N_{inp} = 4; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \quad (20)$$

Підставимо $B_m(p)$ з останнього виразу в (19) і розв'яжемо останнє відносно $B_{m-1}(p)$:

$$B_{m-1}(p) = \frac{Q_{m-1}(p) + \begin{cases} U_{m-1}(p), \text{ якщо } Ninp = 4; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках} \end{cases}}{V_{m-1}(p)} \cdot A(p).$$

Отже, можемо прийняти:

$$\begin{cases} B_m(p) = Q_{m-1}(p) + \begin{cases} U_{m-1}(p), \text{ якщо } N_{inp} = 4; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках;} \end{cases} \\ A(p) = V_{m-1}(p). \end{cases} \quad (21)$$

При $Ngr = 2$ згідно з (7) одержимо:

$$\left(m_m p^2 + R_m p + D_m\right) B_m(p) - D_m B_{m-1}(p) = \begin{cases} A(p), \text{ якщо } Ninp = 5; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо визначити $B_{m-1}(p)$ з останнього виразу та підставити його в (19), то одержимо:

$$B_m(p) = \frac{D_ь Q_{m-1}(p) + V_{m-1}(p) \cdot \begin{cases} 1, \text{ якщо } Ninp = 5; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках} \end{cases}}{\left(m_m p^2 + R_m p + D_ь\right) \cdot V_{m-1}(p) - D_ь U_{m-1}(p)} \cdot A(p).$$

Отже, можна прийняти:

$$\begin{cases} B_m(p) = D_m Q_{m-1}(p) + V_{m-1}(p) \cdot \begin{cases} 1, \text{ якщо } N_{inp} = 5; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках;} \end{cases} \\ A(p) = \left(m_m p^2 + R_m p + D_m\right) \cdot V_{m-1}(p) - D_m U_{m-1}(p). \end{cases} \quad (22)$$

Гранична умова $Ngr = 3$. Згідно з (8):

$$\left(m_m p^2 + R_m p + C_1 + D_m\right) B_0(p) - D_m B_{m-1}(p) = \begin{cases} C_1 A(p), \text{ якщо } Ninp = 6; \\ 0 - \text{в усіх інши випадках.} \end{cases}$$

Підставляємо $B_{m-1}(p)$ з останнього виразу в (19) і отримуємо:

$$\begin{cases} B_m(p) = D_m Q_{m-1}(p) + \begin{cases} C_1 V_{m-1}(p), \text{ якщо } N_{inp} = 6; \\ 0 - \text{в усіх інших випадках;} \end{cases} \\ A(p) = V_{m-1}(p)\left(m_m p^2 + R_m p + C_1 + D_m\right) - D_m U_{m-1}(p). \end{cases} \quad (23)$$

На цьому прямий хід в методі прогонки завершується.

Зворотний хід реалізується з використанням формули (12), яка приводиться до вигляду:

$$B_z(p) = \frac{Q_z(p) A(p) + U_z(p) B_{z+1}(p)}{V_z(p)}. \quad (24)$$

Z перебирається, починаючи з $m - 2$, якщо $Ninp = 4$, або з $(m - 1)$ – в інших випадках, і завершується при $Z = 0$.

Оформляємо описаний алгоритм у вигляді підпрограми WpStrNit:

```
procedure WpStrNit(Mb,Mr,D:Coef; Ninp:integer;  var A:Coef; var B:CoefC);
 var s,z,Zn:integer;    k,F,p:Coef;
  begin
   U[0,-1]:=0; Q[0,-1]:=0; Q[0,0]:=0;
  case Ngl of
   1:begin
      V[0,-1]:=0; V[0,0]:=1; U[0,0]:=0;  if Ninp=1 then Q[0,0]:=1
    end;
   2: begin
      V[0,-1]:=2; V[0,0]:=D[1]; U[0,0]:=D[1];  V[0,1]:=Mr[0]; V[0,2]:=Mb[0];
      if Ninp=2 then Q[0,0]:=1
    end;
   3:begin
      V[0,-1]:=2; V[0,0]:=C0+D[1]; U[0,0]:=D[1];
      if Ninp=3 then Q[0,0]:=C0
    end
  end;
  for z:=1 to m-1 do
    begin
    P[-1]:=2; P[0]:=D[z]+D[z+1]; P[1]:=Mr[z]; P[2]:=Mb[z];
    UmnPol(P,V[z-1],P);   F[-1]:=0; F[0]:=D[z]; UmnPol(F,U[z-1],F);
    AlSumPol(P,F,'-',V[z]); F[-1]:=0; F[0]:=D[z+1];
     UmnPol(F,V[z-1],U[z]);  K[-1]:=0; K[0]:=0;
    if ((Ninp=7) and (Z=Zinp)) or  (Ninp=8) then  K[0]:=1;
    if Ninp=8    then K[0]:=F1[z];
     F[-1]:=0; F[0]:=D[z];
     UmnPol(K,V[z-1],P); UmnPol(F,Q[z-1],F); AlSumPol(P,F,'+',Q[z]);
    end;
   case Ngr of
    1: begin
       A:=V[m-1]; B[m]:=A;  B[m-1]:=Q[m-1];
       if Ninp=4 then  AlSumPol(B[m-1],U[m-1],'+',B[m-1]);
      end;
    2:begin
       F[1]:=0; F[0]:=D[m]; UmnPol(F,Q[m-1],B[m]);
       if Ninp=5 then AlSumPol(B[m],V[m-1],'+',B[m]);
       P[-1]:=2; P[0]:=D[m]; P[1]:=Mr[m];P[2]:=Mb[m];  UmnPol(P,V[m-1],P);
       F[-1]:=0; F[0]:=D[m];  UmnPol(F,U[m-1],F);   AlSumPol(P,F,'-',A)
     end;
    3:begin
        F[1]:=0; F[0]:=D[m]; UmnPol(F,Q[m-1],B[m]);
       if Ninp=6 then
        begin
         P[-1]:=0; P[0]:=C1; UmnPol(P,V[m-1],P);  AlSumPol(B[m],P,'+',B[m])
        end;
       P[-1]:=2; P[0]:=D[m]+C1; P[1]:=Mr[m];P[2]:=Mb[m];
       UmnPol(P,V[m-1],A); F[-1]:=0; F[0]:=D[m];
       UmnPol(F,U[m-1],F);   AlSumPol(A,F,'-',A)
     end;
  end;
    if Ninp=4 then Zn:=m-2   else Zn:=m-1;
     for z:=Zn downto 0 do
      begin
       UmnPol(Q[z],A,P);  UmnPol(U[z],B[z+1],F);
      AlSumPol(P,F,'+',P);    DelPol(P,V[z],B[z],F)
     end;
  end;
```

В даній підпрограмі використані підпрограми AlSumPol, UmnPol та DelPol, що реалізують такі операції над поліномами [4, 5]:

$C(p) = A(p) \pm B(p)$ (procedure AlSymPol(A,B,:Coef; OP:char; var C:Coef));

$C(p) = A(p)*B(p)$ (procedure UmnPol(A,B:Coef; var C:Coef))

та

$$\frac{A(p)}{B(p)} = C(p) + \frac{D(p)}{B(p)}$$ (procedure DelPol(A,B:Coef; var C,D:Coef)).

В масиві типу Coef інформація про поліном

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

розміщується за схемою:

	-1	0	1	2	...	$n-1$	n	...	30
A	n	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n	...	

Практика використання розглянутого алгоритму показала його безвідмовність, високу швидкодію, зручність у користуванні. Точність апроксимації легко регулюється величиною m.

Розглянутий алгоритм наближеного моделювання може бути використаний і для інших динамічних об'єктів з розподіленими параметрами, як, наприклад, теплоакумулюючих стінок (диференціальне рівняння теплопровідності), трубчатих теплообмінників та в інших випадках.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Олійник О.Я., Піддубний В.І., Салтанов М.В.* Дослідження поведінки гнучких ниток у потоках на основі дискретної моделі // ДАН УРСР, 1979. – № 9.
2. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
3. *Карачун В.В., Кваско М.З., Кубрак Н.А.* Прикладний аналіз і візуалізація характеристик динамічних систем: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1999. – 138 с.
4. *Кубрак А.І.* Ідентифікація динамічних характеристик елементів систем керування. Ч. 1. Математичні методи: Навч. посібник. – К.: ІСДО, 1995. – 208 с.
5. *Фаронов В.В.* Программирование на персональных ЭВМ в среде Турбо Паскаль. – М.: Изд-во МВТУ, 1992. – 448 с.

КАРАЧУН Володимир Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України «КПІ».

Наукові інтереси:

– динаміка бортової апаратури носіїв.

КУБРАК Наталія Анатоліївна – аспірант Національного технічного університету України «КПІ».

Наукові інтереси:

– динаміка механічних систем носіїв.

Подано 10.11.1999.