

Е.П. Ушаков, к.т.н., доц.

Вінницький державний технічний університет

СИНТЕЗ КЕРУЮЧИХ ПІДСИСТЕМ ПІДВИЩЕНОЇ НАДІЙНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Розглядається задача синтезу лінійних стаціонарних систем керування з врахуванням можливих відмов окремих підсистем. Синтез здійснюється на основі наближення вихідних реакцій систем, усереднених за моментами виникнення відмов, до заданої часової області. Використання ортогональних розкладів для опису динамічних характеристик системи дозволяє зводити процедуру синтезу до розв'язання системи алгебраїчних нерівностей.

При проектуванні сучасних автоматичних систем як основний чинник, що обмежує складність алгоритму керування, що вибирається, все частіше виступає необхідний рівень надійності. Для підвищення надійності систем широке застосування знаходять методи, що базуються на використанні резервування. Проте існує й інша можливість підвищення надійності систем, пов'язана з властивою складним технічним системам функціональною надмірністю. Під функціональною надмірністю розуміється спроможність окремих підсистем керування виконувати функції підсистем, що відмовили, що дозволяє в ряді випадків забезпечувати прийнятний рівень якості керування. Ефективність такого підходу значно зростає, якщо синтез «живучих» систем здійснювати на основі функціонально-статистичних критеріїв, що враховують можливості різноманітних станів системи. При цьому найбільший інтерес викликає випадок, коли відмова відбувається протягом перехідного процесу. Інтенсивності відмов елементів на перехідних режимах роботи системи значно вищі, ніж на сталих. Крім того, реакції системи будуть залежати не тільки від характеристик системи з відмовою, але й від випадкового моменту виникнення відмови, що значно ускладнює процедуру обчислення їх статистичних характеристик. При використанні операторних методів опису лінійних систем з можливими порушеннями математичне сподівання та дисперсію вихідних реакцій можна одержати лише в припущенні про відомий розподіл коренів характеристичного рівняння. Проте, при розв'язанні задачі синтезу системи необхідно, щоб усереднення вихідних реакцій здійснювалося у формі, що дозволяє встановити безпосередню залежність відповідних статистичних характеристик від невідомих параметрів керуючої частини. Для цього пропонується вихідні реакції системи описувати за допомогою рядів ортогональних функцій експоненціального виду. При цьому шукані параметри системи входять у вирази для коефіцієнтів при експоненціальних функціях, показники яких певною мірою залежать від часу, що дозволяє достатньо просто усереднювати вихідні реакції за випадковими моментами виникнення відмов. У результаті застосування зазначеного підходу математичні сподівання вихідних реакцій системи рекомендуються у вигляді експоненціальних поліномів, для яких можна сформулювати систему обмежень, що визначають приналежність названих математичних сподівань до заданої часової області.

В даній роботі розв'язання сформульованої задачі обмежується класом лінійних стаціонарних систем з випадковою зміною структури. Запропонований метод може бути розповсюдженим на лінійні системи зі змінними параметрами та нелінійні системи за умови, що їх вихідні реакції є кусково-гладкими функціями часу.

Нехай є система керування, математична модель якої будується за децентралізованим принципом. Модель містить опис об'єкта керування:

$$x_0(t) = A_0 x_0(t) + B_0 u_0(t); \quad y_0(t) = C_0 x_0(t), \tag{1}$$

де $x_0(t)$ – вектор стану розмірності n_0 ; $u_0(t)$ – вектор керувань розмірності r_0 ; $y_0(t)$ – вектор вхідних координат розмірності m_0 ,

а також сукупність рівнянь керуючих підсистем:

$$x_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t); \quad y_i(t) = C_i x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t)$, $u_i(t)$, $y_i(t)$ – вектори стану, керування та вихідних координат i -ї підсистеми ($i = 1, 2, \dots, M$) мають розмірності відповідно n_i , r_i , m_i . Числові матриці A_i , B_i , C_i розмірністю $n_i \times n_i$, $n_i \times r_i$, $m_i \times n_i$ при $i = 0, 1, 2, \dots, M$ у рівняннях (1), (2) є заданими.

Взаємодія об'єкта керування та керуючих підсистем описується рівняннями зв'язку:

$$u_0(t) = \sum_{i=1}^M L_i y_i(t); \tag{3}$$

$$u_i(t) = \sum -F_{ij} y_j(t) + K_i (u_c(t) - y_0(t)).$$

де L_i , F_{ij} , K_i – числові матриці розмірністю $r_0 \times m_i$, $r_i \times m_j$, $r_i \times m_0$; $u_c(t)$ – m_0 -мірний вектор керувань системи, компоненти якого належать множині обмежених кусково-гладких функцій.

Рівняння зв'язку показують, що вектор керувань для об'єкта керування формується тільки з вихідних координат керуючих підсистем, а вектори керувань підсистем залежать, крім цього, від вектора неузгодженостей.

Вважаємо, що під час перехідного процесу кожна з керуючих підсистем може відмовити з постійною інтенсивністю η_k . Під відмовою будемо розуміти повну відмову, в результаті якої підсистема, що відмовила, припиняє брати участь у процесі керування. Дана ситуація є характерною як при відмовах типу «обрив», так і при заклинюванні виконавчих механізмів, після чого їхні вихідні координати перестають змінюватися. До подібних наслідків призводять й інші типи відмов, якщо система містить пристрої контролю, що відключають відповідну підсистему при виявленні в ній відмов. Математична модель описаного типу відмов відповідає обнуленню матриць $L_k = 0$, $F_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, M$), що встановлюють зв'язок вихідних координат k -ї підсистеми з іншими частинами системи, при $t > k$, де k – момент відмови k -ї підсистеми ($k = 1, 2, \dots, M$). Оскільки розглядається випадок, коли відмова виникає на достатньо короткочасних перехідних режимах роботи системи, то можна прийняти припущення про неможливість двох і більше відмов за час одного перехідного процесу. Проте це припущення можна поширити на весь час функціонування системи, якщо мати на увазі системи, що характеризуються високою надійністю окремих підсистем (малою інтенсивністю відмов η_k) або малим часом неперервного функціонування.

Мета синтезу системи полягає у виборі таких матриць L_i, F_{ij}, K_i , при яких математичне сподівання $M(y_0(t))$ вектора вихідних координат об'єкта керування буде належати до заданої тимчасової області.

Для розв'язання сформульованої задачі скористаємося розкладанням тимчасових характеристик системи в ряд за сукупністю ортогональних функцій експоненціального виду.

Для побудови системи ортогональних функцій розглянемо сукупність лінійно-незалежних функцій:

$$\psi_k(t) = \exp(-\beta(k-1)t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

повну на множині кусково-неперервних функцій.

Побудуємо на цій сукупності систему ортонормованих в інтервалі $[0; +\infty)$ з вагою $h(t) = \exp(-\nu t)$ функцій:

$$\varphi_k(t) = \sum_{l=1}^n \lambda_{kl} \psi_l(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Основна властивість отриманої ортогональної системи полягає в тому, що для будь-якої кусково-гладкої функції $f(t) \in L_2[0, \infty; h(t)]$, похідна якої задовольняє умові Ліпшиця порядку $0 < \delta \leq 1$ в інтервалі $[0; +\infty)$, ряд Фур'є за системою ортогональних функцій (5) з параметрами $\nu \leq \beta$ сходиться до $f(t)$ рівномірно у всьому інтервалі ортогональності $[0; \infty)$, причому має місце така нерівність:

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^q d_k \varphi_k(t) \right| \leq \frac{k(\nu, \beta) (1 + \sqrt{\beta q (\alpha + q)})}{q^{1+\delta}}, \quad (6)$$

де d_k – коефіцієнти розкладу; $k(\nu, \beta)$ – постійна, що не залежить від q .

Таким чином, якщо деяка функція $f(t)$ задовольняє сформульованим вимогам, то її можна представити з будь-якою наперед заданою точністю у вигляді скінченної суми ряду Фур'є за системою (5). Скористаємося отриманим результатом для обчислення математичного сподівання вектора вихідних координат системи керування з урахуванням можливих відмов окремих підсистем.

Для обчислення математичного сподівання вихідних координат системи з випадковою структурою запишемо рівняння системи (1)–(3) у матричній формі, попередньо виключивши проміжні координати $u_i(t), y_0(t), i = 1, 2, \dots, N$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [A + BHC] \mathbf{x}(t) + BKu_c(t); \quad \mathbf{y}_0(t) = C_0 \mathbf{x}_0(t), \quad (7)$$

де $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{x}}_i(t)$ – пряма сума векторів $\mathbf{x}_i(t)$ розмірності $n = \sum_{i=0}^N n_i$; $A = \text{diag}\{A_0, \dots, A_N\}$,

$B = \text{diag}\{B_0, \dots, B_N\}$, $C = \text{diag}\{C_0, \dots, C_N\}$ – блоково-діагональні матриці.

Блокові матриці H и K побудовані за таким принципом:

$$H_{11} = 0; \quad H_{i,i+1} = L_i; \quad H_{i,i+1} = -K_i; \quad H_{i+1,j+1} = -F_i;$$

$$K = \|\|0; K_1; \dots, K_N\|^T; \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Позначимо через $G_0 = A + BHC$ матрицю справної системи та через $G_k = A + BH_kC$ – матрицю системи з відмовою k -ї керуючої підсистеми. Тоді система керування в справному стані буде описуватися сукупністю рівнянь:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G_0 \mathbf{x}(t) + BKu_c(t); \quad \mathbf{y}_0(t) = C_0 \mathbf{x}_0(t) \quad (8)$$

з початковими умовами $\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0)$, а при виникненні відмови k -ї підсистеми –

$$\dot{\mathbf{x}}(t, \tau_k) = \mathbf{G}_k \mathbf{x}(t, \tau_k) + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{u}_c(t); \quad \mathbf{y}_0(t, \tau_k) = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_0(t, \tau_k), \quad t \geq \tau_k \quad (9)$$

з початковими умовами $\mathbf{x}(t, \tau_k)|_{t=\tau_k} = \mathbf{x}(t)|_{t=\tau_k}$.

Представимо розв'язок $\mathbf{x}(t, \tau_k)$ рівняння (9) у вигляді скінченної суми ряду за системою ортогональних функцій (5):

$$\mathbf{x}(t, \tau_k) = \mathbf{P}(\tau_k) \cdot \Phi(t - \tau_k), \quad t \geq \tau_k, \quad (10)$$

де $\Phi(t - \tau_k) = \|\varphi_i(t - \tau_k)\|_{q \times 1}$ – вектор ортогональних функцій.

Тоді для вихідних координат об'єкта керування при відмові k -ї керуючої підсистеми справедливий вираз:

$$y_i^0(t, \tau_k) = \sum_{l_1=1}^q \sum_{l_2=1}^q a_{l_1 l_2}^{ki} \exp(-\beta(l_1 - 1)t) \exp(-\beta(l_2 - l_1)\tau_k), \quad i = 1, 2, \dots, m_0. \quad (11)$$

Знайдемо тепер математичне сподівання вектора вихідних координат об'єктів керування, усереднюючи його компоненти за областю можливих значень випадкових моментів відмов керуючих підсистем:

$$\mathbf{M}[y_0(t, T)] = \int_{\Theta} y_0(t, T) f(T) d\Theta, \quad (12)$$

де $\mathbf{T} = \|\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\|$ – вектор випадкових моментів відмов; θ – простір можливих значень цього вектора; $d\theta$ – елемент простору θ ; $f(T)$ – щільність розподілу ймовірностей вектора \mathbf{T} .

Вважаючи, що в системі відсутні накопичення відмов, математичне сподівання (12) можна представити таким чином:

$$\mathbf{M}[y_0(t, \mathbf{T})] = \sum_{k=0}^N p_k(t) \mathbf{M}_k(t), \quad (13)$$

де $p_0(t) = \prod_{i=1}^N \int_t^{\infty} f_i(\tau_i) d\tau_i$ – ймовірність справного стану системи;

$p_k(t) = \prod_{i=1, i \neq k}^N \int_t^{\infty} f_i(\tau_i) d\tau_i$ – ймовірність стану системи, при якому справні всі керуючі підсистеми, крім k -ї; $M_k(t)$ – вектор умовних математичних сподівань вихідних координат об'єкта керування щодо можливих станів системи, при цьому $M_0(t) = y_0(t)$ і $\mathbf{M}_k(t) = \int y_0(t, \tau_k) f_k(\tau_k) d\tau_k$,

$k = 1, 2, \dots, N$.

Використання співвідношення (11) дозволяє достатньо просто обчислювати інтеграли в записі умовних математичних сподівань:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^k(t) &= \int_0^t y_i^0(t, \tau_k) \eta_k \exp(-\eta_k \tau_k) d\tau_k = \sum_{l_1=1}^q \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{l_1 l_2}^{ki} \eta_k}{(l_2 - l_1)\beta + \eta_k} \times \\ &\times \{ \exp[-(l_1 - 1)\beta t] - \exp[-(l_2 - 1)\beta + \eta_k] t \}, \\ i &= 1, 2, \dots, m_0; \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (14)$$

При цьому компоненти вектора математичних сподівань $M[y_0(t, T)]$ (13) будуть такими:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[y_i^0(t, \mathbf{T})] &= \sum_{l_1=1}^q b_{l_1} \exp[-((l_1 - 1)\beta + \chi_0)t] + \sum_{k=1}^N \sum_{l_1=1}^q \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{l_1 l_2}^{ki} \eta_k}{(l_2 - l_1)\beta + \eta_k} \times \\ &\times \{ \exp[-((l_1 - 1)\beta + \chi_k)t] - \exp[-((l_1 - 1)\beta + \chi_0)t] \}, \end{aligned}$$

(15)

де

$$\chi_0 = \sum_{i=1}^N \eta_i ; \quad \chi_k = \sum_{i=1, i \neq k}^N \eta_i , \quad i = 1, 2, \dots, m_0 .$$

Якщо в системі відбувається накопичення двох і більше відмов, то підсумовування за формулою (13) повинно здійснюватися по всіх можливих станах системи. При цьому методика обчислення вихідних реакцій системи залишається незмінною, з урахуванням тієї обставини, що замість справної системи розглядається система з визначеним комплексом підсистем, що відмовили.

Для синтезу керування, що забезпечує бажаний вид математичних сподівань, уявимо, що кожна з припустимих областей, що визначають бажаний вид математичних сподівань відповідних компонентів вектора вихідних координат, описується при деякому фіксованому векторі керувань $u_c(t)$ своїми верхньою $M_i^I(t)$ та нижньою $M_i^{II}(t)$ границями, які обмежені кусково-гладкими функціями. Тоді досліджувані математичні сподівання будуть належати допустимим областям при виконанні нерівностей:

$$M_i^I(t) - M[y_i^0(t, T)] \geq 0; \quad M[y_i^0(t, T)] - M_i^{II}(t) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_0 . \quad (16)$$

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти елементи шуканих матриць L_i, K_i, F_{ij} для забезпечення нерівностей (16). З цією метою розкладаємо в ряд за системою функцій (5) співмножники вигляду $\exp(-\chi_k t)$ у записі виразу (15):

$$\exp(-\chi_k t) = \sum_{l_1=1}^q \sum_{l_2=1}^q \sum_{l_3=1}^q \frac{\lambda_{l_2 l_1} \lambda_{l_3 l_2}}{v + (l_3 - 1)\beta + \chi_k} \psi_{l_1}(t) = \sum_{l_1=1}^q \varepsilon_{kl_1} \psi_{l_1}(t) \quad (17)$$

і границі допустимих областей:

$$\begin{aligned} M_i^I(t) &= \sum_{j=1}^q m_{ij}^I \varphi_j(t) = \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^q m_{ij}^I \lambda_{jl} \psi_l(t); \\ M_i^{II}(t) &= \sum_{j=1}^q m_{ij}^{II} \varphi_j(t) = \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^q m_{ij}^{II} \lambda_{jl} \psi_l(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Підставимо розклад (17) у (15) та зведемо подібні члени:

$$M[y_i^0(t, T)] = \sum_{l_1=1}^{2q-1} \delta_{il_1} \exp(-(l_1 - 1)\beta t), \quad (19)$$

де

$$\delta_{il_1} = \sum \left[\left(b_{j_1} - \sum_{k=1}^N \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{l_2 j_1}^{ki} \eta_k}{(j_1 - l_2)\beta + \eta_k} \right) \varepsilon_{0 j_2} + \sum_{k=1}^N \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{j_1 l_2}^{ki} \eta_k}{(l_2 - j_1)\beta + \eta_k} \varepsilon_{k j_2} \right].$$

Тут підсумовування проводиться за всіма індексами j_1 та j_2 , що задовольняє умові $j_1 + j_2 = l_1 + 1$. Ввівши в (16) заміну змінної $z = \exp(-\beta t)$, з урахуванням (18) і (19) одержимо:

$$\begin{aligned} P_i^I(z) &= \sum_{l_1=1}^{2q-1} \left(\sum_{j=1}^q m_{ij}^I \lambda_{j l_1} - \delta_{il_1} \right) z^{l_1-1} \geq 0; \\ P_i^{II}(z) &= \sum_{j=1}^q \left(\delta_{il_1} - \sum_{j=1}^q m_{ij}^{II} \lambda_{j l_1} \right) z^{l_1-1} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для забезпечення (20) достатньо задати умови, при яких би виконувалися нерівності $P_i^I(0) > 0$, $P_i^{II}(0) > 0$ і всі позитивні корені поліномів $P_i^I(z)$ і $P_i^{II}(z)$ розташовувалися правіше точки $z = 1$. Оскільки між нижньою границею z позитивних коренів деякого полінома $P(z)$ r -го степеня та верхньої границі коренів поліному $z^{-1}P(1/z)$ існує співвідношення $z = 1/z$, то, відповідно до теореми Ньютона щодо верхньої границі позитивних коренів поліномів [2, 3, 6], сформульовані вище вимоги задовольняються при виконанні нерівностей:

$$\begin{aligned} P_i^I(0) > 0, P_i^{II}(0) > 0; \\ [z^{2q-2}P_i^{II}(1/z)]_{z=1}^{(k)} \geq 0, k = 0, 1, \dots, 2q-3; i = 1, 2, \dots, m_0; \\ [z^{2q-2}P_i^I(1/z)]_{z=1}^{(k)} \geq 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Отримана система алгебраїчних нерівностей визначає множину можливих значень елементів матриць L_i, K_i, F_{ij} вихідних реакцій, що забезпечують бажаний вигляд системи, усереднених по можливих моментах виникнення відмов у керуючій частині. Таким чином, алгоритм синтезу системи зводиться до такого.

За вихідні дані при синтезі використовується інформація про функціональний склад системи керування, динамічні властивості об'єкта керування та керуючі підсистеми, показники їх надійності (інтенсивності відмов η_k), а також вимоги до динамічних характеристик системи (межа областей $M^I(t), M^{II}(t)$). Алгоритм:

1. Формування математичної моделі функціонування системи в справному стані та при можливих відмовах – обчислення матриць $G_k, k = 0, 1, \dots, N$.

2. Побудова системи ортогональних функцій $\varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, q$. При виборі параметрів ν і β необхідно враховувати співвідношення ν/β . Щодо числа q членів ортогонального ряду, то доцільно враховувати таку обставину. Умови (16) визначають сукупність близьких за видом вихідних реакцій системи, тому необхідна точність їхньої апроксимації частковими сумами ортогональних рядів досягається, як правило, при однакових значеннях q . Отже, про величину q можна судити з розкладу в ряд границь допустимих областей.

3. Обчислення коефіцієнтів ортогональних розкладів векторів $M^I(t), M^{II}(t), u_c(t)$.

4. Формування матриць $\hat{\Gamma}_0$ і $W_k, k = 1, 2, \dots, N$ відповідно до формул (14), (15):

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0 &= [\Pi \otimes I_n - I_q \otimes G_0]^{-1} [(E_q^T \otimes I_n) \times (0) + \hat{S}], S = BKQ(A^T)^{-1}; \\ W_k &= [\Pi \otimes I_n - I_q \otimes G_k]^{-1} [(E_q^T \otimes I_n) \Gamma_0 A^T A + \\ &+ (I_q \otimes (BKQA))[(A^T A)^{-1}] \bullet (E_q \otimes I_q)]. \end{aligned}$$

5. Обчислення коефіцієнтів b_{i1} і $a_{i_1 i_2}^{ki}$ у виразі для вихідних реакцій справної системи та при врахуванні можливих відмов (17), (19):

$$\begin{aligned} b_{i1} &= \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^q \sum_{j_3=1}^q C_{ij_1} \Gamma_{j_1 j_2}^0 A_{j_3 j_2} A_{j_3 j_1}, i = 1, 2, \dots, m_0; k = 1, 2, \dots, N; \\ a_{i_1 i_2}^{ki} &= \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^q \sum_{j_3=1}^q C_{ij_1} W_{(j-j_2)n+j_1; j_2}^k A_{j_3 j_2} A_{j_3 j_1}, i_1, i_2 = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

6. Обчислення коефіцієнтів δ_{i11} розкладу математичних сподівань вихідних координат системи (19):

$$\delta_{il_1} = \sum \left[\left(b_{j_1} - \sum_{k=1}^N \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{l_2 j_1}^{k i} \eta_k}{(j_1 - l_2)\beta + \eta_k} \right) \varepsilon_{0 j_2} + \sum_{k=1}^N \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{j_1 l_2}^{k i} \eta_k}{(l_2 - j_1)\beta + \eta_k} \varepsilon_{k j_2} \right],$$

$i = 1, 2, \dots, m_0; \quad l_1 = 1, 2, \dots, 2q - 1.$

Підсумовування тут, як відзначалося вище, проводиться за всіма індексами j_1 і j_2 , що задовольняє умові $j_1 + j_2 = l_1 + 1$.

7. Формування системи алгебраїчних нерівностей (21) щодо шуканих значень L_i, K_i, F_{ij} :

$$m_{i1}^1 \lambda_{i1} - \delta_{i1} > 0; \quad \delta_{i1} - m_{i1}^1 \lambda_{i1} > 0;$$

$$\sum_{l_1=1}^{2q-k-1} \frac{(k + l_1 - 1)!}{(l_1 - 1)!} (\delta_{i, 2q-k-l_1} - \sum_{j=1}^q m_{ij}^l \lambda_{j, 2q-k-l_1}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_0;$$

$$\sum_{l_1=1}^{2q-k-1} \frac{(k + l_1 - 1)!}{(l_1 - 1)!} (\sum_{j=1}^q m_{ij}^l \lambda_{j, 2q-k-l_1} - \delta_{i, 2q-k-l_1}) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2q - 3.$$

8. Розв'язання системи нерівностей. Воно може здійснюватися за допомогою відомих алгоритмів: симплекс-методу, методу найменших квадратів; при великій розмірності множини шуканих параметрів ефективними є методи випадкового пошуку. Якщо розв'язок не може бути знайдено, то необхідно змінити вимоги до системи.

Наприкінці необхідно зупинитися на перспективах використання запропонованого методу синтезу. Даний підхід можна використовувати при описі вихідних реакцій визначеного класу нестационарних систем, змінні коефіцієнти яких є кусково-гладкими функціями часу, і нелінійних систем, тимчасові характеристики котрих також описуються кусково-гладкими функціями. У цих випадках в ряд за запропонованою системою ортогональних функцій, крім векторів змінних стану, необхідно розкласти відомі функції, що описують змінні коефіцієнти або нелінійні характеристики об'єкта керування. Вважаючи, що характер представлення вихідних реакцій ортогональним рядом не змінюється при піднесенні цих функцій у квадрат і до більш високих степеней, зазначений підхід може застосовуватися при обчисленні їхніх дисперсій, а також моментів більш високих порядків.

Як приклад розглянемо систему автоматичного керування технологічним процесом нейтралізації рослинної олії в мильно-лужному розчині, рівняння динаміки якого при визначеному режимі роботи мають вигляд [1]:

$$\dot{x}_0(t) = -0,625 x_0(t) + 0,5 u_1^0(t) + u_2^0(t); \quad y_0(t) = x_0(t),$$

де за керуючі впливи $u_1^0(t)$ і $u_2^0(t)$ обрані витрати олії та реактиву, а за керований параметр – рівень поділу середовища «олія – мильно-лужний розчин».

Нехай динаміка виконавчих механізмів, що регулюють витрати олії та реактиву, описується рівняннями:

$$\dot{x}_0(t) = u_1(t); \quad \dot{x}_2(t) = u_2(t);$$

$$y_1(t) = x_1(t); \quad y_2(t) = x_2(t).$$

Структура системи керування формується відповідно до рівнянь зв'язку:

$$u_1(t) = -F_{11} y_1(t) - F_{12} y_2(t) + K_1 (u_c(t) - y_0(t));$$

$$u_2(t) = -F_{21} y_1(t) - F_{22} y_2(t) + K_2 (u_c(t) - y_0(t));$$

$$u_1^0(t) = L_{11} y_1(t) + L_{12} y_2(t);$$

$$u_2^0(t) = L_{21} y_1(t) + L_{22} y_2(t).$$

Вважаємо, що перша керуюча підсистема може відмовити з інтенсивністю $\eta = 1,5$. При цьому витрати олії перестають змінюватися, а бажаний характер зміни рівня поділу середовищ повинен забезпечуватися за рахунок регулювання витрат реактиву. Потрібно знайти значення коефіцієнтів F_{ij} , L_{ij} , K_i , при яких математичне сподівання вихідної реакції об'єкта $M(y_0(t))$ на вплив $u_c(t) = 1 - \exp(-0,7t)$ буде належати області, обмеженій кривими $M^I(t) = 0,8 - 0,7\exp(-0,5t)$ і $M^{II}(t) = 0,65 - \exp[-0,5(t - 1,5)]$.

Побудуємо систему ортогональних функцій (5) з параметрами $\nu = l, \beta = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 1; \quad \varphi_2(t) = \sqrt{3}(2\exp(-t) - 1); \\ \varphi_3(t) &= \sqrt{5}(6\exp(-2t) - 6\exp(-t) + 1); \\ \varphi_4(t) &= \sqrt{7}(20\exp(-3t) - 30\exp(-2t) + 12\exp(-t) - 1) \end{aligned}$$

тощо. Розкладемо в ряд за отриманою системою ортогональних функцій межі припустимої області, утримуючи перші чотири члени:

$$\begin{aligned} M^I(t) &= 0,758 - 1,334\exp(-t) + 1,334\exp(-2t) - 0,658\exp(-3t); \\ M^{II}(t) &= 0,523 - 4,033\exp(-t) + 4,033\exp(-2t) - 1,990\exp(-3t), \end{aligned}$$

а також керування $u_c(t)$ і функцію $\exp(-1,5t)$:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= 0,995 - 1,573\exp(-t) + 1,089\exp(-2t) - 0,479\exp(-3t); \\ \exp(-1,5t) &= -0,0069 + 0,312\exp(-t) + 0,935\exp(-2t) - 0,242\exp(-3t). \end{aligned}$$

Обчислимо попередньо матриці:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = \mathbf{BKQ}\mathbf{\Lambda} &= \begin{matrix} & 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0,995K_1; & -1,573K_1; & 1,089K_1; & 0,479K_1; \\ 0,995K_2; & -1,573K_2; & 1,089K_2; & 0,479K_2; \end{matrix} \\ \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} &= \begin{matrix} 16; & -120; & 240; & -140; \\ -120; & 1200; & -2700; & 1680; \\ 240; & -2700; & 6480; & -4200; \\ -140; & 1680; & -4200; & 2800; \end{matrix} \\ \mathbf{P} = (\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda})^{-1} &= \begin{matrix} 1; & 1/2; & 1/3; & 1/4; \\ 1/2; & 1/3; & 1/4; & 1/5; \\ 1/3; & 1/4; & 1/5; & 1/6; \\ 1/4; & 1/5; & 1/6; & 1/7. \end{matrix} \end{aligned}$$

Елементи матриць Γ_0 и W_1 будуть мати, згідно з (14) і (15), вигляд:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{0,7(K_1\omega_{ij}^1 + K_2\omega_{ij}^2)}{j(j + 0,7)}; \\ W_{i+3s-3,j}^1 &= \sum_{l=1}^3 \xi_{il}^s (Z_{lj} P_{js} + \sum_{r=1}^4 \Gamma_{ij}^0 R_{rj}); \\ i &= 1, 2, 3; s = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Вирази для ω_{ij}^1 , ω_{ij}^2 , ξ_{il}^k наведені в табл. 1. Далі, за формулами (17) та (19), знайдемо значення коефіцієнтів b_{l_1} і $a_{l_1 l_2}$ (індекси i и k відкидаємо, оскільки $m_0 = l$ і $k = 1$):

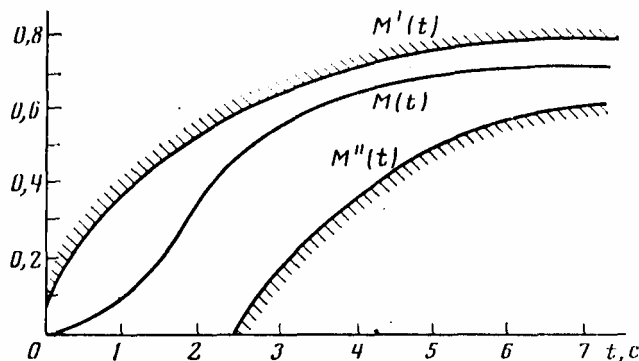
$$b_{l_1} = \sum_{j=1}^4 \Gamma_{ij}^p R_{jl_1};$$

$$a_{l_1 l_2} = \sum_{j=1}^4 W_{3j-2, l_2}^1 R_{jl_1}, \quad l_1, l_2 = 1, 2, 3, 4.$$

За (19) визначаємо коефіцієнти:

$$\delta_{l_1} = \sum_{j_1+j_2=l_1+1} \left(b_{j_1} - \sum_{l_2=1}^4 \frac{1,5a_{l_2 j_1}}{j_1 - l_2 + 1,5} \right) \varepsilon_{j_2} + \sum_{l_2=1}^4 \frac{1,5a_{l_2 l_1}}{l_2 - l_1 + 1,5}; \quad l_1 = \overline{1, 7},$$

де ε_{j_2} — коефіцієнти при експонентах в розкладі функції $\exp(-l, 5t)$.



$$1,240 - \sum_{i=1}^6 (7-i) \delta_i \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^6 (7-i) \delta_i + 6,865 \geq 0;$$

$$8,120 - \sum_{i=1}^5 (7-i)(6-i) \delta_i \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^5 (7-i)(6-i) \delta_i + 28,514 \geq 0;$$

$$38,99 - \sum_{i=1}^4 (7-i)(6-i)(5-i) \delta_i \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 (7-i)(6-i)(5-i) \delta_i + 94,368 \geq 0;$$

$$134,02 - \sum_{i=1}^3 (7-i)(6-i)(5-i)(4-i) \delta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^3 (7-i)(6-i)(5-i)(4-i) \delta_i - 198,89 \geq 0;$$

$$358,68 - 720\delta_1 - 120\delta_2 \geq 0;$$

$$720\delta_1 + 120\delta_2 + 107,40 \geq 0.$$

Рис. 1

Тепер можна побудувати систему нерівностей (21):

$$\begin{aligned} 0,758 - \delta_1 > 0; & \quad 0,758 - \delta_1 > 0; \\ 0,100 - \sum_{j=1}^7 \delta_j > 0; & \quad \sum_{i=1}^7 \delta_i + 1,467 \geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язок $F_{11} = 0; F_{12} = 0; F_{21} = 0; F_{22} = 3,00; L_{11} = 1; L_{12} = 0; L_{21} = 0; L_{22} = 1,00; K_1 = 0,92; K_2 = 1,75$ даної системи нерівностей можливий при використанні стандартного програмного забезпечення типу MathCAD, MathLab тощо.

Математичне сподівання вихідної реакції системи має такий вигляд:

$$\begin{aligned} M(t) = & 0,7126 - 3,8500exp(-t) + 9,5234exp(-2t) - 3,5441exp(-3t) + \\ & + 11,2328exp(-4t) - 4,7132exp(-5t) + 0,6138exp(-6t). \end{aligned}$$

Графік цієї функції наведений разом із границями допустимої області на рис. 1.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Ушаков Э.П. Способ автоматического управления технологическим процессом нейтрализации растительного масла: А. с. № 1472486, МКИ С11 В3/06.
2. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
3. Цирлин А.М. Оптимальное управление технологическими процессами. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.
4. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 652 с.
5. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
6. Крутько П.Д., Максимов А.И., Скворцов Л.М. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем. – М.: Радио и связь, 1988. – 304 с.
7. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Автоматизированное проектирование математического обеспечения АСУ ТП. – К.: Вища школа, 1986. – 336 с.
8. Изерман Р. Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984. – 542 с.

УШАКОВ Едуард Павлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки Вінницького державного технічного університету.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання елементів та систем управління;
- ергономіка та людський фактор в системах управління.

Подано 09.12.1999.

Таблица 1

	$i = 1$		$i = 2$		$i = 3$
ω_{ij}^1	$\frac{(0,5L_{11} + L_{21})j + (0,5L_{11} + L_{21})F_{21} - (0,5L_{12} + L_{22})F_{21}}{\Delta_j}$	ω_{ij}^1	$\frac{j^2 + (0,625 + F_{22})j + (0,625 \cdot F_{22} + (0,5L_{12} + L_{22})K_2)}{\Delta_j}$	ω_{ij}^1	$\frac{-F_{21}j - (0,625F_{21} + K_2(0,5L_{11} + L_{21}))}{\Delta_j}$
ω_{ij}^2	$\frac{(0,5L_{12} + L_{22})j + (0,5L_{12} + L_{22})F_{11} - (0,5L_{11} + L_{21})F_{12}}{\Delta_j}$	ω_{ij}^2	$\frac{-F_{21}j - (0,625F_{12} + K_1(0,5L_{12} + L_{22}))}{\Delta_j}$	ω_{ij}^2	$\frac{j^2 + (0,625 + F_{11})j + (0,625F_{11} + (0,5L_{11} + L_{21})K_1)}{\Delta_j}$
ξ_{i1}^s	$\frac{s^2 + F_{22}s}{\Delta_s}$	ξ_{i1}^s	$\frac{-K_{1s} + (K_2F_{12} + K_1F_{22})}{\Delta_s}$	ξ_{i1}^s	$\frac{-K_2s}{\Delta_s}$
ξ_{i2}^s	0	ξ_{i2}^s	$\frac{s^2 + (0,625 + F_{22})s + (0,625 \cdot F_{22} + (0,5L_{12} + L_{22})K_2)}{\Delta_s}$	ξ_{i2}^s	0
ξ_{i3}^s	$\frac{(0,5L_{12} + L_{22})s}{\Delta_s}$	ξ_{i3}^s	$\frac{-F_{12}s - (0,625F_{12} + K_1(0,5L_{12} + L_{22}))}{\Delta_s}$	ξ_{i3}^s	$\frac{s^2 + (0,625 + F_{11})s}{\Delta_s}$
Δ_j	$j^3 + (0,625 + F_{11} + F_{22})j^2 + (0,625F_{11} + 0,625F_{22} + F_{11}F_{22} + (0,5L_{12} + L_{22})K_2 + (0,5L_{11} + L_{21})K_1 - F_{12}F_{21})j + (0,625F_{11}F_{22} - K_2F_{12}(0,5L_{11} + L_{21}) - K_1F_{21}(0,5L_{12} + L_{22}) + (0,5L_{12} + L_{22})K_2F_{11} + (0,5L_{11} + L_{21})K_1F_{22} - 0,625F_{12}F_{21})i$				

Δ_s^*	$s^3 + (0,625 + F_{22})s^2 + (0,625F_{22} + (0,5L_{12} + L_{22})K_2)s$
--------------	--

