

Ю.В. Петраков, д.т.н., проф.

М.О. Луценко, аспір.

Національний технічний університет України "КПІ"

**РОЗРАХУНОК ПРУЖНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ТОС  
ПРИ ФРЕЗЕРУВАННІ СКЛАДНИХ ПОВЕРХОНЬ**

*Викладається методика розрахунку вектора пружних деформацій технологічної оброблюючої системи (ТОС) при фрезеруванні просторових 3D-поверхонь.*

При обробці складних поверхонь на верстатах з ЧПУ процес різання є суттєво нестационарним, що у поєднанні з квазістационарністю передаточної функції еквівалентної пружної системи призводить до утворення значної похибки обробки, викликаної, в основному, пружними деформаціями ТОС. Оскільки похибка обробки, викликана пружними деформаціями, з достатнім ступенем точності може бути розрахована на етапі моделювання, найбільш раціональним методом управління є управління за апріорною інформацією, яке реалізується САП визначеної структури [1].

Одним із основних модулів такої САП є модуль визначення вектора деформації різального інструмента у вигляді його проєкцій на осі декартової системи координат. Розглянемо математичне забезпечення такого модуля на прикладі фрезерування кінцевою сферичною фрезою (рис. 1).

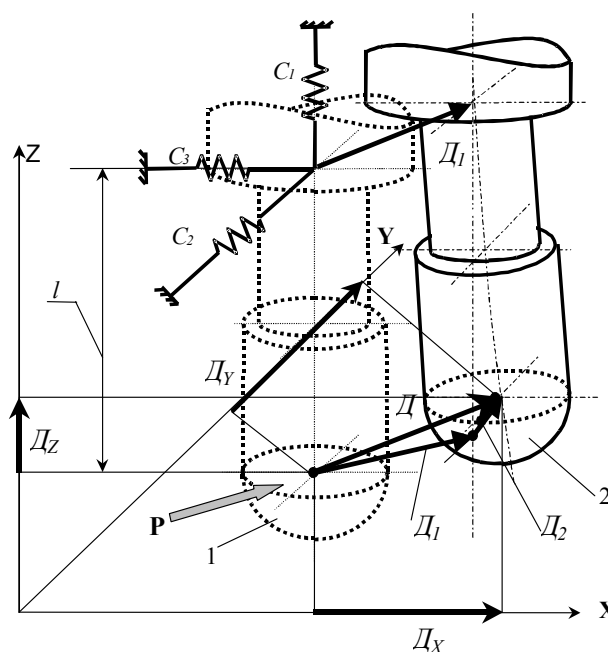


Рис. 1. Деформація кінцевої сферичної фрези

Траекторія формоутворюючого руху розраховується для центра сферичної інструментальної поверхні кінцевої фрези (положення 1 на рис. 1). При обробці деталі під дією сили різання  $P$  інструмент зміститься в положення 2. Ясно, що вектор деформації  $\Delta$  є вектором, направленим з центра теоретичного положення в центр фактичного положення сферичної поверхні інструмента.

З геометричних побудов рис. 1 видно, що вектор пружних деформацій складається з деформації пружної системи верстата  $\Delta_1$  і деформації  $\Delta_2$  інструментального шпинделя. Деформація інструментального шпинделя представляє собою згин в площині  $XZ$  під дією проекції сили різання  $P_x$ , згин в площині  $YZ$  під дією складової сили різання  $P_y$  і стиск (розтяг) в напрямку осі  $OZ$  під дією складової сили різання  $P_z$ . Таким чином, складові загального вектора деформації  $\Delta$  в першому наближенні можуть бути розраховані за залежностями:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \frac{P_x}{C_3} + \frac{P_x l^3}{3EI}; \\ \Delta_y &= \frac{P_y}{C_2} + \frac{P_y l^3}{3EI}; \\ \Delta_z &= \frac{P_z}{C_1} + \frac{P_z l}{EF}; \\ I &= \frac{\pi d^4}{64}; \\ F &= \frac{\pi d^2}{4}, \end{aligned}$$

(1)

де  $I$  – усереднений осьовий момент інерції інструмента;  $F$  – усереднена площа поперечного перерізу інструмента;  $d$  – усереднений діаметр інструмента;  $l$  – довжина вильоту інструмента;  $E$  – модуль пружності матеріалу інструмента.

Однак результати експериментальних досліджень, які навів Г.С. Лазарєв у [2], доводять, що модель пружної системи верстата з орієнтованими осями жорсткості дозволяє повніше врахувати властивості всієї системи верстата в процесі різання. Ця модель пружної системи представляється у вигляді трьох жорсткостей  $C_1^1, C_2^1, C_3^1$  (головні осі жорсткості), орієнтованих під деякими кутами ( $\xi, \mu, \tau$ ) відносно прийнятої системи координат (рис. 2). На рис. 2 жорсткості приведені до центра сферичної інструментальної поверхні фрези. Розрахувати значення жорсткості по головних осях і кути, які визначають орієнтацію осей жорсткості, можна на основі методики, викладеної в [2].

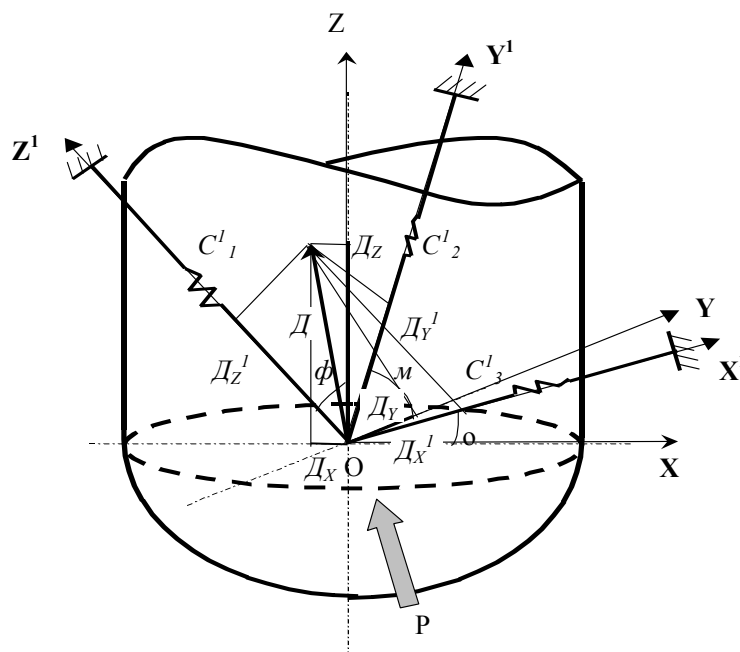


Рис. 2. Схема визначення вектора деформації при орієнтованій в просторі моделі ТОС:

$P$  – вектор сили різання;  $\Delta$  – вектор деформації інструмента;  $\Delta_x^1, \Delta_y^1, \Delta_z^1$  та  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  – проєкції вектора деформації відповідно в системах координат  $XYZ$  та  $X^1 Y^1 Z^1$ ;

$\xi, \mu, \tau$  – кути відповідно між осями  $X$  та  $X^1, Y$  та  $Y^1, Z$  та  $Z^1$

Розглянемо методику визначення деформації інструмента в напрямку осей системи координат  $XYZ$ . Вихідними даними при цьому є: сила різання, задана своїми проєкціями у системі координат  $XYZ$   $P(P_x; P_y; P_z)$ ; значення жорсткості по головних осях жорсткості  $C^1_1, C^1_2, C^1_3$  і кути  $\xi, \mu, \tau$ , які визначають напрямок осей жорсткості. Першим кроком при рішенні поставленої задачі є визначення проєкцій сили різання  $P(P_x^1; P_y^1; P_z^1)$  в системі координат  $X^1 Y^1 Z^1$ . Перехід від однієї системи координат до іншої здійснюється за такими залежностями:

$$\begin{aligned}
 P_x^1 &= P_x \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta + P_y \cdot (\cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) + \\
 &+ P_z \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta); \\
 P_y^1 &= -P_x \cdot \sin \gamma + P_y \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma + P_z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \gamma; \\
 P_z^1 &= -P_x \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta - P_y \cdot (\cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta) - \\
 &- P_z \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta).
 \end{aligned}$$

(2)

Кути  $\alpha, \beta, \gamma$  є проміжними змінними і визначаються за залежностями:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arccos \frac{b}{t}; \\
 \beta &= \arccos \frac{c}{t}; \\
 \gamma &= \arccos t,
 \end{aligned}$$

(3)

де  $a = \cos \tau; b = \cos \mu; c = \cos \xi$ , а  $t$  є коренем бікватратного рівняння:

$$t^4 + (a^2 - b^2 - c^2 - 1) \cdot t^2 + (b^2 + c^2 + b^2c^2 - 2abc) = 0. \tag{4}$$

Проекції вектора деформації визначаються за залежностями, аналогічними (1), однак в новій системі координат  $X^1 Y^1 Z^1$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{X^1} &= \frac{P_X^1}{C_3^1} + \frac{P_X^1 l^3}{3EI}; \\ \Delta_{Y^1} &= \frac{P_Y^1}{C_2^1} + \frac{P_Y^1 l^3}{3EI}; \\ \Delta_{Z^1} &= \frac{P_Z^1}{C_1^1} + \frac{P_Z^1 l}{EF}. \end{aligned} \tag{5}$$

Виходячи з того, що розрахунки, які виконуються модулем САП, повинні узгоджуватися з прийнятою системою координат  $XYZ$ , в якій здійснюється формоутворення, необхідно визначити пружне переміщення різального інструмента в напрямку осей цієї системи координат. Перехід від системи координат  $X^1 Y^1 Z^1$  до системи  $XYZ$  здійснюється за такими залежностями:

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \Delta_{X^1} \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \Delta_{Y^1} \cdot \sin\gamma - \Delta_{Z^1} \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma; \\ \Delta_Y &= \Delta_{X^1} \cdot (\cos\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \sin\alpha) + \\ &+ \Delta_{Y^1} \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha - \Delta_{Z^1} \cdot (\sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha + \cos\beta \cdot \sin\alpha); \\ \Delta_Z &= \Delta_{X^1} \cdot (\cos\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos\alpha) + \\ &+ \Delta_{Y^1} \cdot \cos\gamma \cdot \sin\alpha + \Delta_{Z^1} \cdot (\cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha). \end{aligned} \tag{6}$$

Отримані залежності (2)–(6) дозволяють набагато точніше розрахувати пружне переміщення різального інструмента вздовж осей прийнятої системи координат, які не співпадають з головними осями жорсткості. Однак такий алгоритм є досить громіздким, що значно збільшує час моделювання на ЕОМ. Єдиним способом зменшення часу розрахунку є спрощення моделі пружної системи верстата. З цією метою пропонується використовувати модель пружної системи ТОС з двома орієнтованими осями жорсткості та третьою віссю, яка жорстко зв'язана з віссю прийнятої системи координат. Аналіз показує, що для операції фрезерування 3D-поверхні, без суттєвої помилки, просторова система може бути замінена на плоску. Вибирати вісь прийнятої системи координат, яка буде суміщена з однією з головних осей жорсткості, можна за наступними критеріями: жорсткість в напрямку цієї осі більша, ніж жорсткість в напрямку двох інших осей прийнятої системи координат; проекція сили різання на цю вісь менша, ніж проекції на дві інші осі.

За приклад розглянемо ТОС, в якій обробка виконується кінцевою сферичною фрезою (рис. 3). На рис. 3 жорсткості пружної системи верстата приведені до центра сферичної інструментальної поверхні фрези. Нехай жорсткість в напрямку осі  $OZ$  – найбільша в порівнянні з двома іншими осями. Тому сумістимо одну із головних осей жорсткості з віссю  $OZ$ , а дві інші осі жорсткості будуть орієнтовані в площині  $XY$ . Визначити значення жорсткості пружної системи верстата в напрямку головних осей жорсткості, а також орієнтацію головних осей жорсткості в площині  $XY$  можна на основі методики, викладеної нижче.

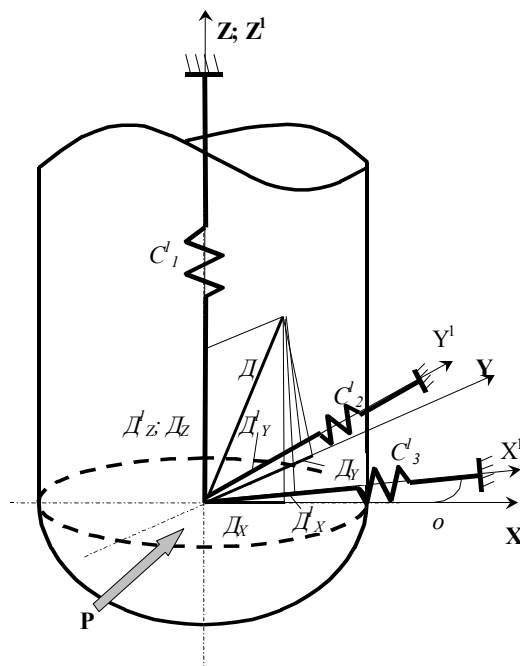


Рис. 3. Схема визначення вектора деформації при орієнтованій в площині моделі ТОС:

$\xi$  – кут між осями  $X$  та  $X^1$

Експериментальним шляхом визначають діаграму повного переміщення  $\Delta$  інструмента в будь-якому напрямку площини  $XY$  шляхом навантаження його сталою силою  $P$  із заданим інтервалом зміни напрямку, наприклад,  $30^\circ$ . До складу повного переміщення, крім деформації пружної системи верстата, входить іще і деформація безпосередньо мірної заготовки, яка використовується як аналог різального інструмента. Цю другу складову треба виключити або розрахунковим шляхом, використовуючи аналітичні залежності (1), або шляхом підвищення жорсткості мірної заготовки.

Після обробки експериментальних даних будують годограф вектора деформації пружної ТОС (рис. 4). Використовуючи експериментальний годограф, можна визначити найбільше  $\Delta_{max}$  та найменше  $\Delta_{min}$  значення повного переміщення, а також їх напрямки. Ці напрямки і будуть напрямками головних осей жорсткості, а значення  $\frac{P}{\Delta_{max}}$  і  $\frac{P}{\Delta_{min}}$  відповідно будуть величинами жорсткості в напрямку головних осей.

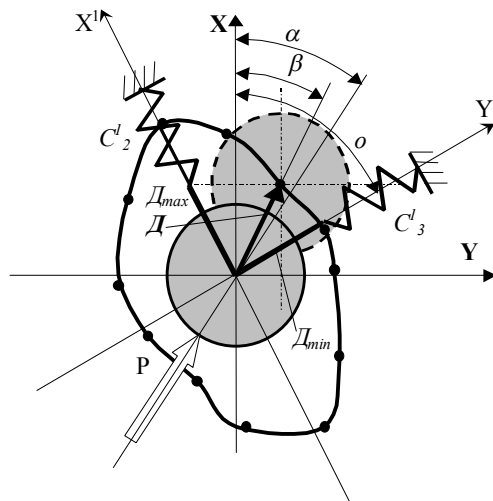


Рис. 4. Експериментальний годограф вектора деформації ТОС

Методика визначення деформації в напрямку осей системи координат XYZ аналітичним шляхом така ж, як і у випадку орієнтованої в просторі пружної системи верстата. Вихідними даними при цьому є: сила різання, задана своїми проекціями  $P(P_x; P_y; P_z)$  в системі координат XYZ; значення жорсткості по головних осях жорсткості  $C_1^1, C_2^1, C_3^1$  і кут  $\xi$ , який визначає орієнтацію головних осей жорсткості в площині XY. Проекції сили різання в системі координат  $X^1 Y^1 Z^1$  розраховуються за залежностями:

$$\begin{aligned} P_x^1 &= P_x \cdot \cos \xi + P_y \cdot \sin \xi; \\ P_y^1 &= -P_x \cdot \sin \xi + P_y \cdot \cos \xi; \\ P_z^1 &= P_z. \end{aligned} \tag{7}$$

Далі, на основі залежностей (5), визначаються складові деформації в напрямку осей системи координат  $X^1 Y^1 Z^1$ . Перехід від системи координат  $X^1 Y^1 Z^1$  до системи XYZ здійснюється за залежностями:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \Delta_x^1 \cdot \cos \xi - \Delta_y^1 \cdot \sin \xi; \\ \Delta_y &= \Delta_x^1 \cdot \sin \xi + \Delta_y^1 \cdot \cos \xi; \\ \Delta_z &= \Delta_z^1. \end{aligned} \tag{8}$$

Відомо [2], що теоретична діаграма деформації пружної ТОС представляє собою еліпс з головними осями  $\Delta_{max}$  і  $\Delta_{min}$ , однак експериментальний годограф вектора деформації відрізняється від еліпса (див. годограф на рис. 4). Крім того, напрямок вектора сили у загальному випадку не співпадає з напрямком вектора деформації пружної ТОС. Тому при розрахунку за наведеним вище алгоритмом буде виникати деяка помилка. Усунути цю похибку при моделюванні на ЕОМ можна за допомогою чисельного методу, який базується на використанні експериментальних даних.

Згідно із запропонованим методом, годограф вектора пружної деформації представляється у вигляді трьох взаємозв'язаних масивів значень жорсткостей  $C_i$  і кутів  $\alpha_i, \beta_i$ . Для розрахунку ве-

ктора деформації пружної ТОС  $\Delta(\beta_i)$ , викликаного силою різання  $P(\alpha)$ , ЕОМ реалізує наступний алгоритм. Спочатку визначаються найближчі найбільше і найменше значення вихідного масиву  $\alpha_i$ , і у відповідності до прийнятого методу інтерполяції розраховуються значення жорсткості  $C$  і кута  $\beta$ . Потім розраховується модуль вектора деформації  $\Delta$ , а його напрямок визначається інтерпольованим раніше значенням кута  $\beta$ .

Запропоновані методики розрахунку вектора пружних деформацій ТОС враховують як деформацію пружної системи верстата, так і деформацію безпосередньо різального інструмента і можуть бути покладені в основу відповідного модуля розрахунку САП. Крім того, вони дозволяють враховувати нелінійність характеристик пружної ТОС згідно з експериментальними даними і, таким чином, забезпечити найкращу адекватність розрахунку.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. *Петраков Ю.В.* Теорія автоматичного управління в металообробці. – К.: ІЗМН, 1999. – 212 с.
2. *Лазарев Г.С.* Устойчивость процесса резания металлов. – М.: Высшая школа, 1973. – 184 с.

ПЕТРАКОВ Юрій Володимирович – доктор технічних наук, професор Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

– обробка складних поверхонь.

ЛУЦЕНКО Максим Олександрович – аспірант Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

– обробка складних поверхонь.

Подано 21.10.1999.