Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А.Е. Кононюк

ИНФОРМАЦИОЛОГИЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Книга 2

Киев

«Освіта України »

2011

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К65.
Рецензент: *Н.К. Печурин* - д-р техн. наук, проф. (Нацинальный авиационный университет).

Кононюк А.Е.
К65 Информациология. Общая теория информации
К.:"Освіта України ", 2011. Книга 2. 476 с.
ISBN 978-966-7699-50-8

В настоящей работе в последовательной систематизированной форме излагаются основы информациологии как всеобъемлющей теории о естественной и искусственной информации – информации природы Вселенной и информации, созданной человеком. Дается формализация понятий информации и информационных процессов как абстрактных понятий познания и формализация самой теории информациологии. Концепция информациологии дается в аспекте социальной и природной значимости информации для отдельного человека, коллектива и общества в целом, а также – в свете информационного единства человека и природы, единства всех форм и типов информации, всех процессов информационного взаимодействия, процессов самоинформацизации Вселенной и процессов социальной (государственной) информатизации. Изложены методологические основы информациологии, базирующиеся на фундаментальном принципе информациологического подхода, на системном сочетании интеграционного и дифференцированного подходов к исследованию. Монография может быть полезной для людей самых различных специальностей – филологов, информациологов, математиков, лингвистов, правоведов, методистов, преподавателей ВУЗов, научных работников, магистров, аспирантов, докторантов, всех, кто интересуется проблемами информации, информатики, информатизации и информациологии в целом.

ББК В161.я7

ISBN 978-966-7699-50-8

Оглавление

6. Информационные пространства событий

Теория информации возникла в результате длительного накопления опытного материала, приведшего к глубокому преобразованию наших физических представлений о формах материи и движения. После целого ряда попыток приспособить прежние понятия о пространстве, времени и других физических величинах к вновь открытым опытным фактам обнаружилось, что для этой цели требуется перестроить все эти понятия коренным образом. Эта задача может быть выполнена лишь в том смысле, если будет дано стройное формально-математическое описание нового положения вещей. Эту задачу попытался решить Клод Шеннон в 1949г., когда предложил оценивать информацию в численных единицах – битах. Впрочем, задача была выполнена лишь в том смысле, что было дано стройное формально-математическое описание нового положения вещей. Задача глубокого, подлинно физического обоснования этой математической схемы все еще стоит перед теорией информации.

Мы имеем здесь в виду, что теория информации проявляет себя в основном макроскопической теорией и в этом отношении продолжает традицию классической информации. Между тем трудно сомневаться в том, что макроскопические понятия, в том числе и наши пространственно-временные представления, на самом деле уходят своими корнями в микромир. Когда-нибудь они должны быть раскрыты как некоторый статистический итог, вытекающий из закономерностей этого мира — далеко еще не разгаданных — при суммарном наблюдении огромного числа микроявлений.

По характеру этой книги основы теории информации будут даны именно с их математической стороны в готовой, относительно законченной форме. В частности, поучительная история накопления опытного материала, подталкивавшего шаг за шагом к созданию теории информации, почти полностью выпадает из рамок нашего изложения. Мы говорим об этом для того, чтобы у читателя не создалось впечатления, что теория информации была кем-то выдумана «из головы» сразу в том виде, как она здесь излагается. В действительности это математическое оформление теории информации появилось лишь как итог долгих информационных поисков.

Дальше мы будем заниматься общей теорией информации.

Математический аппарат общей теории информации сводится к теории тензорных полей в четырехмерном псевдоевклидовом информационном пространстве индекса 1. Между тем общая теория информации требует более квалифицированного математического аппарата, который будет рассмотрен нами в последующих разделах.

Общая теория информации пронизывает собой в сущности всю современную науку. Выводы общей теории информации, означающие огромный переворот в наших представлениях о пространстве—времени, а в связи с этим и о других физических величинах, всесторонне подтверждаются опытом.

Будет разумным рассматривать общую теорию информации в ее современном математическом оформлении скорее как эскиз теории, чем как установленную истину. Вместе с тем трудно подвергать сомнению ее основные идеи: зависимость между информационными свойствами пространства-времени и распределением и движением масс и вытекающее отсюда объяснение явлений тяготения. Но вполне возможно, что математическое оформление этих идей еще не окончательное.

От подлинного содержания общей теории информации следует отличать связанный с нею большой поток исследований, не имеющих серьезного научного обоснования и представляющих собой лишь математические спекуляции на ее темы.

6.1. Пространство событий

В дальнейшем у нас будет играть важную роль в общей теории информации понятие системы отсчета. Систему отсчета можно наивно представлять себе в виде подвижной «платформы» (т. е. некоторой системы неизменно скрепленных между собой твердых тел), на которой установлены движущиеся вместе с ней измерительные приборы — часы, эталоны длины и т. д., позволяющие производить измерения различных величин, как мы будем говорить, относительно данной системы отсчета.

В частности, можно «установить» прямоугольные координатные оси *X, Y, Z,* твердо связанные с данной системой отсчета, и отмечать координаты точек, в которых совершаются те или иные события. Можно также при помощи часов, движущихся вместе с системой отсчета, отмечать моменты совершения этих событий, отсчитывая время t от некоторого произвольно выбранного начального момента. При этом подразумевается, что все системы отсчета снабжены совершенно одинаковыми часами и эталонами длины.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что с системой отсчета неизменно скреплены каким-либо образом выбранные координатные оси *X, Y, Z* и указан начальный момент для отсчета времени. Таким образом, под системой отсчета мы будем понимать подвижную «платформу» вместе с установленными на ней прямоугольными координатными осями *X, Y, Z* и выбранным начальным моментом для отсчета времени *t.*

Если на прежней «платформе» мы установим по-другому координатные оси или изменим начальный момент для отсчета времени, то мы будем считать, что перешли к другой системе отсчета, хотя такое преобразование системы отсчета и будет тривиальным (так мы и будем его в дальнейшем называть).

С классической точки зрения среди систем отсчета существует лишь одна система (если не считать ее тривиальных преобразований), неподвижная в каком-то абсолютном смысле, относительно которой и формулируются информационные законы физики.

Правда, для классической механики с самого начала ее возникновения было известно, что формулировка ее законов нисколько не меняется, если покоящуюся систему заменить системой, движущейся относительно нее равномерно и прямолинейно, — такие системы мы будем называть инерциальными. В этом заключается принцип относительности Галилея.

В самом деле, пусть система *S* — покоящаяся, а S^r—движущаяся инерциальная система. Предположим для простоты, что координатные оси *X, Y, Z,* связанные с *S,* и *X', Y*', Z', связанные с *S'*, в начальный момент совпадают, причем ось *X* идет по направлению движения системы *S'.* Если (постоянную) скорость движения инерциальной системы *S'* обозначить через *v,* то спустя время *t* координатные оси *X'*, *Y'*, *Z'* сдвинутся относительно неподвижных координатных осей *X*, *Y*, *Z* на расстояние *vt* в направлении оси *X.* Поэтому, если в момент *t* произойдет какое-либо событие в точке с координатами *x, y, z* относительно системы *S,* то относительно сисемы *S'* эта точка будет иметь координаты:

$$x'=x—vt, \quad y'=y, \quad z' = z. \tag{6.1}$$

К этому нужно добавить, что с точки зрения классической механики время имеет абсолютный характер, т. е. промежуток времени между днумя событиями имеет всегда одну и ту же величину независимо от того, в какой системе отсчета он измеряется. Поэтому момент совершения данного события будет одинаковым с точки зрения обеих систем отсчета, и к формулам (6.1) можно присоединить еще одну:

$$t' = t. \tag{6.2}$$

Если мы прослеживаем движение материальной точки, так что *x, y, z* являются функциями *t* (и аналогично в системе *x',y',z'* — функциями от *t*'), то из формул (6.1), (6.2) вытекает, что

$$\frac{d^2x'}{dt'^2}=\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2}=\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2}=\frac{d^2z}{dt^2},$$

т. е. проекции ускорения на оси будут одинаковыми для обеих систем отсчета. Теперь нужно учесть, что в классической динамике рассматривается система материальных точек, ускорения которых пропорциональны действующим на них силам, а силы зависят от взаимного расположения этих точек в каждый данный момент. Но это расположение тоже, очевидно, выглядит одинаково с точки зрения обеих систем, так как *разности* координат любых двух точек $x_2 — x_1$, $y_2—y_1$, $z_2—z_1$ будут при данном t равны $x'_2— x'_1$, $y'_2— y'_1$, $z'_2— z'_1$ (как следует из уравнений (6.1)). Теперь ясно, что уравнения движения запишутся одинаково относительно обеих систем отсчета S и S'.

Итак, наблюдая механические явления, мы не в состоянии установить, наблюдаем ли мы их с точки зрения покоящейся или с точки зрения равномерно и прямолинейно движущейся системы. Однако к началу XX века, теоретическая физика состояла не только из механики. Наряду с ней стояла другая, столь же важная теория, созданная в XIX веке, — электродинамика. И вот основные законы электродинамики не удовлетворяли принципу относительности (если руководствоваться «галилеевыми» преобразованиями (6.1), (6.2)). Наиболее выпукло это сказывалось в том известном результате, что скорость света (т. е. скорость распространения электромагнитных волн) в пустоте является постоянной величиной c. С классической точки зрения было ясно, что этот результат может относиться лишь к покоящейся системе отсчета, так как относительно системы отсчета, движущейся со скоростью v, скорость света будет $c — v$, если свет «догоняет» систему, и $c+v$, если он движется ей навстречу. Поэтому, естественно, считали, что можно обнаружить абсолютную скорость движения данной системы отсчета, наблюдая те отклонения от законов электродинамики, в частности, от закона постоянства скорости света, которые должны обнаружиться в этой системе, если только она не находится в абсолютном покое.

Ряд опытов, поставленных с этой целью (где в качестве движущейся системы отсчета служила Земля в ее движении по орбите), дал отрицательный результат. Оказалось, что движение системы отсчета не нарушает законов электродинамики вопреки тому, что бесспорно следовало из классической теории. Разрешение возникшего таким образом глубокого противоречия было дано специальной теорией относительности, согласно которой *не только законы механики, но и электродинамики тоже, выглядят совершенно одинаково в любой* *инерциальной системе; в частности, скорость света (в пустоте) постоянна и равна с в любой инерциальной системе.*

Но если дело обстоит таким образом, то теряет смысл отличать среди инерциальных систем те, которые находятся «в абсолютном покое», от тех, которые «движутся». Раз за понятием абсолютно покоящейся системы отсчета не стоит никакой физической реальности, которая отличала бы ее от остальных инерциальных систем, то это значит, что мы имеем дело с неудачной абстракцией, не оправдавшейся дальнейшим развитием науки. В дальнейшем, рассматривая инерциальные системы, мы будем считать их все равноправными и обладающими движением лишь одна относительно другой (а не абсолютным).

Итак, вместо *одной* привилегированной системы отсчета возникает привилегированный *класс инерциальных систем,* в которых законы физики формулируются одинаково и которые движутся одна относительно другой равномерно и прямолинейно. Этими свойствами класс инерциальных систем и будет описываться в общей теории информации.

Мы уже указывали на противоречие между опытом, который показал равноправие всех инерциальных систем, и классической теорией, согласно которой законы электродинамики верны лишь в «покоящейся» системе, а в остальных нарушаются. С точки зрения теории относительности это противоречие имеет своим источником в первую очередь *неправильность формул* (6.1), (6.2), пересчитывающих пространственно-временные координаты события x, y, z, t, вычисленные относительно одной инерциальной системы S, на x', y', z', t', вычисленные относительно другой инерциальной системы S' (мы вывели эти формулы, предполагая систему S покоящейся, но в них ничего не изменится, если считать S любой инерциальной системой, а S'—движущейся относительно нее со скоростью v в направлении оси X, причем в начальный момент S и S' совпадают). Согласно теории относительности эти формулы должны быть заменены новыми, которые обеспечат инвариантность уже всех физических законов; и в области механики, и в области электродинамики. Само собой ясно, что признание формул (6.1), (6.2) неправильными означает отрицание наших прежних представлений о пространстве и времени, на основании которых эти формулы легко получаются, а замена их новыми означает коренную перестройку этих представлений. В дальнейшем мы все это увидим на конкретных примерах.

Чтобы подойти к установлению новых формул с достаточно широкой точки зрения, мы должны будем рассмотреть *четырехмерное* *информационное пространство событий,* которое на протяжении всего этого раздела будет играть у нас основную роль и в котором будут развертываться все наши построения.

Под *событиями* мы условимся понимать элементарные события, а именно: результат действия(й), которые происходят в мире и происходящие в столь малой области информационного пространства и в столь короткий промежуток времени, что, идеализируя положение вещей, их можно считать происходящими в одной точке и мгновенно. На этом этапе само содержание события нас интересовать не будет, так что в сущности *событие в нашем понимании сводится к заданию определенного места (точки) в информационном пространстве в определенный момент времени*. Таким образом, наше понятие события примерно в том же смысле представляет собой идеализацию реального физического процесса малой протяженности в пространстве и времени, в каком информационное понятие точки — идеализацию реального физического тела малой протяженности в пространстве.

Перед нами стоит задача установления новых формул преобразования, смысл которой можно формулировать так. Одно и то же событие может рассматриваться относительно различных инерциальных систем; рассмотрим какие-нибудь две из них, S и S'. Пусть относительно S событие произошло в точке с координатами x, y, z в момент времени t, а относительно S' в точке с координатами x', y', z' и в момент времени t'. Спрашивается, какова зависимость между координатами события в системе S и системе S' (координатами события мы будем называть числа x, y, z, t).

Прежде всего *мы предполагаем, что эта зависимость будет линейной,* т. е. t', x', y', z' выражаются линейными (вообще говоря, неоднородными) функциями от t, x, y, z.

Действительно, классическая зависимость (6.1), (6.2) является линейной как в том простейшем случае взаимного расположения осей X, Y, Z и X', Y', Z', для которого она у нас выписана, так, конечно, и в самом общем случае. Естественно попытаться решить поставленную нами задачу, видоизменяя коэффициенты этой зависимости, но не отказываясь от ее линейного характера.

Более же глубокая причина заключается в том, что лишь при линейном характере зависимости мы обеспечиваем соблюдение закона инерции в любой инерциальной системе (предполагая, что он соблюдается в одной из них).

Далее, нам нужно обеспечить, чтобы скорость распространения света была с точки зрения любой инерциалыюй системы одна и та же и равнялась константе c. Точнее говоря, нам нужно потребовать, чтобы *всякий сигнал, распространяющийся в каком-либо направлении со скоростью с относительно одной инерциальной системы, распространялся бы с этой же скоростью с и относительно любой другой инерциальной системы.*

В таком случае, принимая, что свет распространяется в любом направлении со скоростью *с* относительно хотя бы одной инерциальной системы, мы получим этот же результат и для любой другой инерциальной системы.

Будем рассуждать следующим образом.

Пусть первое событие *М* состоит в том, что из некоторой точки в некоторый момент времени подается сигнал, а второе событие $\tilde{M}$ — в том, что этот сигнал принимается в какой-то другой точке в другой момент времени. Координаты событий *М* и $\tilde{M}$ относительно системы *S* обозначим *(t, x, y, z)* и $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, а относительно системы *S'* — теми же буквами, но со штрихами. Тогда тот факт, что сигнал распространялся со скоростью *с,* относительно системы *S* можно записать в виде

$$\sqrt{(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2}=c\,(\tilde{t}-t),$$

т. е. путь, пройденный световым лучом, равен протекшему времени, умноженному на *с.* Возводя почленно в квадрат и перенося все члены налево, получим:

$$-(c\tilde{t}-ct)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2=0. \qquad (6.3)$$

Тот же самый факт, записанный с точки зрения системы *S'*, приводит к аналогичному соотношению:

$$-(c\tilde{t}'-ct')^2+(\tilde{x}'-x')^2+(\tilde{y}'-y')^2+(\tilde{z}'-z')^2=0. \qquad (6.4)$$

Мы требуем, чтобы из того, что сигнал распространяется со скоростью *с* относительно одной инерциальной системы, следовала бы такая же скорость его распространения и относительно любой другой инерциальной системы. Другими словами, из соотношения (6.3) должно следовать (6.4), и обратно.

Однако мы потребуем еще большего, а именно, чтобы *для любых двух событий М,* $\tilde{M}$ выражения, стоящие в левых частях равенств (6.3), (6.4), всегда были бы равны между собой:

$$-(c\tilde{t}-ct)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2\equiv$$
$$\equiv-(c\tilde{t}'-ct')^2+(\tilde{x}'-x')^2+(\tilde{y}'-y')^2+(\tilde{z}'-z')^2. \qquad (6.5)$$

Ясно, что если это требование соблюдается, то из (6.3), т. е. из обращения в нуль левой части (6.5), следует (6.4), т. е. обращение в нуль правой части (6.5) (равно как и обратно). Однако мы требуем соблюдения (6.5) и в тех случаях, когда его правая и левая части в нуль не обращаются, что означает дополнительное предположение. Мы как будто произвольно усилили наши требования, но дело в том, что иначе мы пришли бы к физически нелепым выводам, которые все равно вынудили бы нас сделать дополнителъные предположения.

Итак, окончательно: *линейная зависимость t', x', y', z' от t, x, y, z при переходе от одной инерциальной системы к другой должна быть такова, чтобы для любых двух событий соблюдалось равенство* (6.5).

Теперь нетрудно установить связь с предшествующей математической теорией, именно с положениями четырехмерного псевдоевклидова информационного пространства индекса 1. В ортонормированной координатной системе x^0, x^1, x^2, x^3 скалярный квадрат вектора выражается в этом пространстве формулой

$$\mathbf{x}^2 = -{x^0}^2 + {x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2,$$

в частности, скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$, «соединяющего» две какие-нибудь точки $M(x^i)$, $\tilde{M}(\tilde{x}^i)$, имеет вид

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = -(\tilde{x}^0 - x^0)^2 + (\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (\tilde{x}^3 - x^3)^2. \tag{6.6}$$

Выберем какую-нибудь инерциальную систему *S*, и пусть *t, x, y, z* будут координаты событий с точки зрения *S*.

Выберем в нашем псевдоевклидовом информационном пространстве какую-нибудь *ортонормированную* координатную систему x^0, x^1, x^2, x^3.

Условимся изображать каждое событие *M(t, x, y, z)* точкой $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ в псевдоевклидовом информационном пространстве таким образом, чтобы

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z. \tag{6.7}$$

В результате пространство событий взаимно однозначно отобразится на наше псевдоевклидово пространство.

Допустим теперь, что события мы отнесли к другой инерциальной системе *S'*. Теперь каждое событие *M* имеет координаты *(t', x', y', z')*. Но мы *уже поставили* в соответствие каждому событию *M* точку *M* псевдоевклидова пространства. Припишем этой точке следующие координаты (не предрешая вопроса о их характере с точки зрения псевдоевклидова пространства):

$$x^{0'} = ct', \quad x^{1'} = x', \quad x^{2'} = y', \quad x^{3'} = z'. \tag{6.8}$$

Будем утверждать, что координаты $x^{i'}$ *будут тоже ортонормированными.* В самом деле, так как *t', x', y', z'* линейно зависят от *t, x, y, z*, то координаты $x^{i'}$ линейно зависят от координат x^i. А так как эти последние — ортонормированные аффинные координаты, то $x^{i'}$ *тоже будут аффинными координатами.* Но, кроме того, для любых двух событий выполняется соотношение (6.5). Это соотношение можно переписать для соответствующих точек псевдоевклидова пространства следующим образом (пользуясь (6.7), (6.8)):

$$-(\tilde{x}^0-x^0)^2+(\tilde{x}^1-x^1)^2+(\tilde{x}^2-x^2)^2+(\tilde{x}^3-x^3)^2=$$
$$=-(\tilde{x}^{0'}-x^{0'})^2+(\tilde{x}^{1'}-x^{1'})^2+(\tilde{x}^{2'}-x^{2'})^2+(\tilde{x}^{3'}-x^{3'})^2. \qquad (6.9)$$

Так как левая часть выражает скалярный квадрат $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ согласно (6.6) (координаты x^i ортонормированные!), то наше равенство можно переписать в виде

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2=-(\tilde{x}^{0'}-x^{0'})^2+(\tilde{x}^{1'}-x^{1'})^2+(\tilde{x}^{2'}-x^{2'})^2+(\tilde{x}^{3'}-x^{3'})^2. \qquad (6.10)$$

Итак, $x^{i'}$ являются аффинными координатами, в которых скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}^2$ выражается формулой (6.10), т. е. приводится к сумме-разности квадратов его координат $\tilde{x}^{i'}-x^{i'}$. Но мы знаем, что скалярный квадрат вектора имеет такое выражение в ортонормированной и *только в ортонормированной* координатной системе псевдоевклидова информационного пространства. Следовательно, $x^{i'}$ представляют собой *тоже ортонормированную координатную систему.*

Окончательный результат: *информациооное пространство событий можно так взаимно однозначно отобразить на четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса* 1, *что координаты событий t, x, y, z, вычисленные с точки зрения любой инерциальной системы S, будут играть роль ортонормированных координат в псевдоевклидовом пространстве (причем t нужно еще умножить на с):*

$$x^0 = ct, \quad x^1=x, \quad x^2=y, \quad x^3 = z. \qquad (6.11)$$

Тем самым выбор инерциальной системы S в информационном пространстве событий равносилен выбору ортонормированной координатной системы в псевдоевклидовом информационном пространстве, а переход от одной инерциальной системы S к другой S' равносилен переходу от одной ортонормированной координатной системы к другой. Но мы знаем, что этот последний переход совершается при помощи формул

$$x^{i'}=A^{i'}_i x^i+A^{i'}, \qquad (6.12)$$

где $A^{i'}{}_i$ — псевдоортогональная матрица 4-го порядка, индекса 1. Напомним, что это означает, что матрица $A^{i'}{}_i$ связана со своей обратной матрицей $A^{i}_{i'}$, как следует из соотношений (5.171), следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} A^{0'}_{0} & A^{0'}_{1} & A^{0'}_{2} & A^{0'}_{3} \\ A^{1'}_{0} & A^{1'}_{1} & A^{1'}_{2} & A^{1'}_{3} \\ A^{2'}_{0} & A^{2'}_{1} & A^{2'}_{2} & A^{2'}_{3} \\ A^{3'}_{0} & A^{3'}_{1} & A^{3'}_{2} & A^{3'}_{3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A^{0}_{0'} & -A^{1}_{0'} & -A^{2}_{0'} & -A^{3}_{0'} \\ -A^{0}_{1'} & A^{1}_{1'} & A^{2}_{1'} & A^{3}_{1'} \\ -A^{0}_{2'} & A^{1}_{2'} & A^{2}_{2'} & A^{3}_{2'} \\ -A^{0}_{3'} & A^{1}_{3'} & A^{2}_{3'} & A^{3}_{3'} \end{Vmatrix}. \qquad (6.13)$$

Другими словами, данная матрица $A^{i'}_{i}$ и обратная ей $A^{i}_{i'}$ совпадают после транспонирования одной из них и умножения первой строки и первого столбца у одной из них на —1. При этом, как мы вскоре увидим, нам придется ограничиться случаем $A^{0'}_{0} > 0$ (следовательно, и $A^{0}_{0'} > 0$).

Так как x^i согласно (6.11) могут служить и координатами событий, то (6.12) дает нам общий вид перехода от одной инерциальной системы к другой. *Этим и решается основная задача, поставленная в этом пункте.*

В дальнейшем мы всегда будем представлять себе, что информационное пространство событий отображено указанным образом на псевдоевклидово пространство и восприняло его информацию, причем инерциальные системы отсчета приняли вид ортонормированных координатных систем.

Заметим, что если два события M, $\tilde{M}$ являются одновременными относительно какой-либо системы отсчета S, то в соответствующей ортонормированной системе $\tilde{x}^0 = x^0$ формула (6.6) принимает вид

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = (\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (\tilde{x}^3 - x^3)^2,$$

и расстояние $M\tilde{M}$ в пространстве событий совпадает с точки зрения системы S с обычным расстоянием между точками, где события произошли.

Если же относительно системы S два события M и $\tilde{M}$ произошли в одной точке,

$$\tilde{x}^1 = x^1, \qquad \tilde{x}^2 = x^2, \qquad \tilde{x}^3 = x^3,$$

то формула (6.6) дает

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = -(\tilde{x}^0 - x^0)^2,$$

откуда видно, что расстояние $M\tilde{M}$ в пространстве событий будет мнимым и равно $i(\tilde{x}^0 - x^0) = ic(\tilde{t} - t)$, т. е. равно промежутку времени, протекшему между этими событиями, умноженному на ic.

Таким образом, псевдоевклидова метрики в информационном пространстве событий носит универсальный характер и объединяет в себе измерение как пространственных, так и временных расстояний. В первом случае расстояния в этой метрике получаются вещественными, во втором — мнимыми.

6.2. Формулы Лоренца

Разберемся теперь детально в полученном результате, именно в новых формулах перехода (6.12) от одной инерциальной системы к другой. С информационной точки зрения речь идет о переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой в пространстве событий, т. е. в четырехмерном псевдоевклидовом информационном пространстве индекса 1. Этот переход изучался нами специально в п. 5.10. Там было выяснено, что, проделав предварительно тривиальные вращения над ортонормированными реперами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ и параллельный сдвиг одного из них, можно свести преобразование к простому виду (5.154) (5.155):

$$\mathbf{e}_{0'}=\frac{\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}},\quad \mathbf{e}_{1'}=\frac{\beta\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}},\quad \mathbf{e}_{2'}=\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_{3'}=\mathbf{e}_3, \tag{6.14}$$

причем *O* неподвижно.

Соответствующее преобразование ортонормированных координат x' будет иметь вид

$$x^{0'}=\frac{x^0-\beta x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}},\quad x^{1'}=\frac{-\beta x^0+x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}},\quad x^{2'}=x^2,\quad x^{3'}=x^3 \tag{6.15}$$

(см. переход от преобразования (5.165) к (5.170)). Посмотрим, что означает этот результат с точки зрения пространства событий.

Прежде всего параллельный сдвиг репера, например $\mathfrak{R}$, означает, что над ортонормированными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 произведено преобразование, заключающееся в добавлении к ним некоторых констант. Но так как координаты x^i имеют теперь в соответствующей инерциальной системе *S* физический смысл (6.11), то это означает, что некоторые константы добавились к *t, x, y, z,* т. е. изменен начальный момент отсчета времени и координатные оси *X, Y, Z* параллельно сдвинуты и укреплены на прежней «платформе» в новом положении. Такое изменение системы отсчета мы относили к числу тривиальных.

Далее, тривиальное вращение репера $\mathfrak{R}$ (и аналогично $\mathfrak{R}'$) заключается в том, что вектор $\mathbf{e}_0$ не меняется, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ испытывают вращение в своей плоскости, т. е. в трехмерном собственно евклидоном информационном пространстве. Отсюда следует, что x^0 не меняется, а x^1, x^2, x^3 подвергаются обычному ортогональному преобразованию. Но, учитывая (6.11), мы видим, что это означает некоторый определенный поворот координатных осей *X, Y, Z* при прежнем отсчете времени *t*. Так как коэффициенты ортогонального преобразования константы от времени не зависят, то повернутые оси *X, Y, Z* твердо расположены относительно прежних осей *X, Y, Z* и укреплены на той же «платформе». Такое преобразование системы отсчета мы тоже назвали тривиальным.

Итак, за счет тривиального преобразования инерциальных систем отсчета S и S', т. е. сохраняя прежнее движение «платформ» и лишь иначе скрепляя с ними координатные оси X, Y, Z и X', Y' Z', а также, возможно, изменяя начальный момент отсчета времени, можно добиться, чтобы переход от S к S' принял вид (6.15).

Чтобы выпуклее представить этот результат, перепишем формулы (6.15), пользуясь (6.11), в следующем виде:

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \qquad (6.16)$$

Здесь имеется четыре варианта выбора знаков в знаменателях. Однако мы из них оставим лишь один, именно, когда оба знака положительны. В первой формуле мы делаем это на основе физических соображений: если бы знак знаменателя был отрицательным, то возрастание *t* вызывало бы убывание *t'* (считая для простоты *x, y, z* постоянными). Другими словами, наблюдая с точки зрения системы *S'* существование точки *Q (x, y, z)*, скрепленной с системой *S*, мы увидели бы все события происходящими в обратной последовательности. Этот физически абсурдный результат заставляет нас отказаться от знака минус в первой формуле (6.16) и, что то же самое, в первой формуле (6.15) и по совершенно аналогичным причинам считать и в общей формуле (6.12) коэффициент $A^{0'}{}_{0}$ положительным: $A^{0'}{}_{0} > 0$. Заметим, что с точки зрения информационного пространства событий это означает, что переход от одной инерциальной системы к другой не есть любой переход от одного ортонормированного репера к другому. Этот переход представляет собой либо собственное движение, либо несобственное движение 1-го рода (но не 2-го и не 3-го). Соответственно этому инерциальным системам будут отвечать в информационном пространстве событий ортонормированные реперы не всех четырех, а лишь двух классов.

Что же касается случая знака минус в знаменателе второй формулы (6.16), то его устранение не связано с какими-либо принципиальными соображениями и достигается просто изменением положительного направления оси *X* на обратное, вследствие чего x^i

меняет знак. Итак, окончательно формулы (6.16) мы будем писать в виде

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{6.17}$$

Таковы формулы перехода от одной инерциальной системы *S* к другой *S'* после упрощений, внесенных предварительным тривиальным преобразованием этих систем отсчета. Нетрудно догадаться, каков настоящий смысл этих тривиальных преобразований: мы так повернули и сдвинули координатные оси, скрепленные с каждой из платформ, и так изменили начальный момент отсчета времени на одной из них, чтобы оси *Y, Z* системы *S* в начальный момент $t = 0$ совпадали с осями *Y', Z'* системы *S'* в начальный момент $t' = 0$, а последующее движение *S'* относительно *S* (равно как и *S* относительно *S')* происходило вдоль общей оси *X*. Однако, если бы мы попытались привести формулы преобразования к упрощенному виду (6.17), исходя непосредственно из этих соображений, то могли бы легко запутаться в новых, еще неизвестных нам, пространственно-временных соотношениях.

Формулы (63.17) *представляют собой аналог формул* (6.1) и (6.2) *и призваны их заменить при переходе от классической точки зрения к релятивистской.* Уже беглое сравнение этих формул показывает глубокую разницу между ними, которая при дальнейшем исследовании станет еще более разительной.

Прежде всего нужно выяснить смысл параметра β, входящего в формулы (6.17). По аналогии с (6.1), (6.2) следует ожидать, что он должен быть связан со скоростью движения *v* одной инерциальной системы относительно другой, и это действительно оправдывается.

Рассмотрим точку *P,* закрепленную в системе *S'*. Ее координаты *x', y', z'* остаются, следовательно, постоянными; время же *t'* будем считать переменным, так что мы рассматриваем одну и ту же (с точки зрения системы *S')* точку *P* в разные моменты времени *t'*.

Как будет восприниматься поведение точки *P* с точки зрения системы *S?* Дифференцируя почленно последние три из четырех уравнений (6.17) и учитывая, что в нашем случае $dx' = dy' = dz' = 0$, получаем:

$$0 = \frac{-\beta c\, dt + dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 = dy, \quad 0 = dz,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt}=\beta c,\quad \frac{dy}{dt}=0,\quad \frac{dz}{dt}=0. \tag{6.18}$$

Эти формулы показывают, что всякая точка Р, закрепленная в системе S', движется относительно системы S с постоянной скоростью β*c в направлении оси X.* Последний результат позволяет нам говорить, что и вообще инерциальная система *S'* движется относительно *S* поступательно с постоянной скоростью β*c* (в направлении оси *X),* имея в виду, что так движется всякая точка, скрепленная с системой *S* '. Обозначим скорость движения *S*' относительно *S* через *v*, так что

$$v=\beta c,\quad \beta=\frac{v}{c}. \tag{6.19}$$

Так как параметр β меняется в пределах

$$-1<\beta<1,$$

то скорость *v* может принимать значения в пределах

$$-c<v<c.$$

Таким образом, относительная скорость инерциальных систем никогда не достигает скорости света. А так как мы считаем, что в принципе со всяким твердым телом можно связать систему отсчета, то в теории относительности принимается, что вообще никакие два тела не могут иметь относительной скорости, превышающей или хотя бы достигающей скорости света. Далее мы увидим, что все основные формулы приводятся к абсурду, если предположить противное: дело в том, что в них вслед за формулами (6.17) почти во всех основных формулах будет фигурировать радикал

$$\sqrt{1-\beta^2}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

который становится мнимым, если предположить $v > c$. Принимается также, что никакое возмущение не может распространяться со ско-\ ростью, превосходящей *c*, хотя скорость *c* и может им достигаться, как это происходит для электромагнитного возмущения. Теперь формулы (6.17) можно переписать в виде

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad x'=\frac{-vt+x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z. \tag{6.20}$$

Эти формулы перехода от одной инерциальной системы *S* к другой *S'* носят название *формул Лоренца.*

Если, обратно, выразить отсюда t, x, y, z через t', x', y', z', то это обратное преобразование, как показывает элементарный подсчет, будет иметь вид

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad x=\frac{vt'+x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z', \tag{6.21}$$

т. е. отличается от прямого лишь заменой v на $-v$. Это означает, что если система S' движется относительно S со скоростью v, то S движется относительно S' со скоростью $-v$. Это, правда, представляется само собой ясным, но так как нас ждут в дальнейшем выводы, опрокидывающие многие привычные представления, то этот результат следует отметить.

6.3. Исследование фермул Лоренца

При первом взгляде на формулы (6.20) поражает их, казалось бы, полное несходство с формулами (6.1), (6.2) классической теории. А между тем мы знаем, что классические формулы практически безусловно верны, по крайней мере, с большой степенью точности. Поэтому возникает вопрос, как согласовать формулы Лоренца с классическими. Ответ очень прост. На практике мы обычно имеем дело со скоростями, весьма малыми сравнительно со скоростью света, т. е. отношение $\frac{v}{c}$ — очень мало, и его квадратом практически можно пренебречь по сравнению с 1. Поэтому можно считать

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx 1. \tag{6.22}$$

Кроме того, в первой формуле (6.20) можно пренебречь величиной $\frac{v}{c^2}x$ сравнительно с временем t, так как $\frac{v}{c^2}x$ есть произведение весьма малого промежутка временем $\frac{x}{c}$ (точнее, малым предполагается $\frac{\Delta x}{c}$, где $\Delta x=x-x_0$, а x_0 — некоторая константа; она может быть большой, но дает лишь тривиальное преобразование: $t'=t-\frac{vx_0}{c^2}$) на весьма малую дробь $\frac{v}{c}$.

В результате формулы (6.20) принимают вид

$$t'\approx t,\quad x'\approx -vt+x,\quad y'=y,\quad z'=z,$$

т. е. мы возвращаемся к классическим формулам (6.1), (6.2). Таким образом, *при скоростях, малых сравнительно со скоростью света, теория относительности дает практически те же результаты, что и классическая механика.* Это будет повторяться в дальнейшем постоянно, и, естественно, так оно и должно быть — иначе теория относительности стояла бы в явном противоречии с нашим повседневным опытом. Но при больших скоростях, в повседневной практике недостижимых, появляется разногласие между обеими теориями, и опыт решает этот спор в пользу теории относительности.

Разберем теперь некоторые частные следствия формул Лоренца, которые покажут нам характерные черты новых пространственно-временных соотношений.

1°. *Сокращение продольных размеров движущихся тел.* Пусть на оси X' в инерциальной системе S' покоится стержень длиной l. Обозначим абсциссы концов этого стержня через x'_1, x'_2. Тогда

$$x'_2 - x'_1 = l. \qquad (6.23)$$

Абсциссы x'_1, x'_2 остаются постоянными, но t' мы считаем переменным, т. е. рассматриваем существование стержня во времени.

Относительно системы S этот стержень вместе с системой S' движется со скоростью v в направлении оси X, вдоль которой он расположен. Заметим, что вообще оси X и X' все время совпадают в том смысле, что всякое событие, происходящее на оси X с точки зрения S, происходит с точки зрения S' на оси X'. Это сейчас же следует из того, что обращение в нуль y, z влечет обращение в нуль и y', z'.

Попробуем измерить длину нашего стержня относительно системы S. Ввиду того что он движется, нужно зафиксировать положение его концов в какой-либо определенный (один и тот же!) момент времени t, а затем найти расстояние между отмеченными точками. Пусть абсциссы этих точек будут x_1, x_2. Тогда согласно второй формуле (6.20) абсциссы концов стержня в системе S' выразятся следующим образом:

$$x'_1 = \frac{-vt + x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_2 = \frac{-vt + x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая почленно из второй формулы первую и учитывая, что l имеет в обоих случаях одно и то же значение, получаем:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обозначая длину отрезка с точки зрения системы S через l':

$$l' = x_2 - x_1,$$

и пользуясь (6.23), получаем:

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ т. е. } l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{6.24}$$

Таким образом, стержень, имеющий длину l в той инерциальной системе, где он покоится, имеет длину $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ *в той инерциальной системе, относительно которой он движется со скоростью v в продольном направлении.*

Все сказанное относительно стержня применимо и к любым твердым телам. Таким образом, когда относительно данной инерциальной системы *S* твердое тело приводится в поступательное движение с постоянной скоростью *v*, его размеры в направлении движения сокращаются с точки зрения системы *S* в отношении $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. В то же время с точки зрения системы *S'*, связанной с самим движущимся телом, в нем не происходит ни малейших изменений. Итак, оказывается, что размеры тела не есть нечто принадлежащее только ему самому; они носят относительный характер, т. е. зависят и от той системы отсчета, к которой тело отнесено.

В дальнейшем мы обнаружим относительный характер еще ряда величин, считавшихся ранее абсолютными. Это обстоятельство нередко давало повод к идеалистическому толкованию: на нем пытались обосновать субъективный характер физических величин, именно, зависимость их от положения наблюдателя на той или иной системе отсчета. В действительности же речь идет о материальных взаимоотношениях двух физических тел: одно, например, наш стержень, другое, практически обычно более массивное и соподчиняющее себе первое,— наша инерциальная система отсчета *S*. Длина стержня «с точки зрения системы *S*»—это объективно существующий факт, результат материального взаимодействия этих двух физических тел.

Заметим кстати, что подлинная цель общей теории информации не в установлении *относительности физических величин,* а (в известном смысле наоборот) в установлении *абсолютного характера физических законов,* одинаковых в любой инерциальной системе.

Сокращение размеров движущегося тела происходит лишь в продольном направлении (т. е. в направлении движения); поперечные же его размеры не меняются. Это видно из формул $y' = y$, $z' = z$, показывающих, что поперечные размеры тел одинаковы с точки зрения обеих инерциальных систем.

2°. *Относительный характер одновременности.* Пусть на оси X в инерциальной системе S происходят два события в точках x_1, x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = t$. Отметим моменты совершения этих событий t'_1, t'_2 в системе S'. Согласно первой формуле (6.20) получаем:

$$t'_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_2 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Мы замечаем, что $t'_1 \neq t'_2$, а именно:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.25}$$

Таким образом, два события, одновременных относительно S, *оказываются разновременными относительно* S' и притом с тем большим расхождением во времени, чем далее отстоят друг от друга с точки зрения системы S места, где они произошли (расстояние учитывается лишь в направлении оси X, т. е. в направлении относительного движения систем S и S'; поперечное смещение в сторону осей Y, Z не играет роли). Так, например, если с точки зрения системы S электрические лампочки, расположенные цепью вдоль оси X, вспыхнули одновременно, то с точки зрения системы S' они вспыхивали последовательно, начиная с того края, который расположен по направлению движения S' относительно S.

Этот результат разрушает наше привычное представление об абсолютном характере времени: одновременность двух событий не есть нечто, свойственное лишь самим этим событиям; она зависит еще от той системы отсчета, относительно которой устанавливается. Более того, возможно, что события, происшедшие относительно системы S в одной последовательности, наблюдаются в системе S' в обратной последовательности. Это легко показать, если, вместо того чтобы брать $t_2 = t_1$, взять $t_2 > t_1$. Тогда, считая $x_2 > x_1$, $v > 0$, мы получим, *если* $t_2 - t_1$ *достаточно мало,* что $t'_2 < t'_1$. На первый взгляд это кажется явным абсурдом: если в системе S причина, как и полагается, предшествовала следствию, то не значит ли это, что в системе S следствие будет предшествовать причине?

Этот парадокс разъясняется следующим образом. Прежде всего исключительно важно, что относительный характер одновременности имеет место лишь для событий, происходящих в *разных местах пространства.* В самом деле, если наши события в системе S произошли не только одновременно, но и в одной и той же точке ($x_2 = x_1$), то из (6.25) следует, что $t'_2 = t'_1$, т. е. одновременность будет наблюдаться и с точки зрения системы S'. Но раз события произошли в разных местах пространства, то чтобы одно служило причиной, а другое следствием, нужно, чтобы некоторое возмущение, вызванное первым, пришло к месту совершения второго не позже, чем в момент его совершения. Но у нас все возмущения распространяются со скоростью, не превышающей c.

И вот оказывается следующее: когда два события таковы, что их последовательность относительно разных инерциальных систем может быть различной, возмущение, вызванное первым событием, никогда не может своевременно поспеть к месту совершения второго события (т. е. если и приходит, то уже после его совершения). Поэтому из таких двух событий *одно не может служить причиной другого.* Или, что то же самое: если одно событие способно служить причиной другого, т. е. возмущение, вызванное первым событием и распространяющееся со скоростью света, способно своевременно достичь места совершения второго события, то *последовательность таких двух событий одинакова относительно всех инерциальных систем.*

Справедливость наших утверждений будет показана в следующем пункте, и этим парадокс устраняется.

Заметим, что, переходя от формул (6.16) к (6.17), мы опирались на то, что знак минус в знаменателе первой формулы приводит к обратному течению времени в системе S', причем *речь шла о событиях, происходящих в одной и той же точке $Q(x, y, z)$ в системе S;* но в этом случае события способны служить одно причиной другого, и их обратная последовательность действительно представляет абсурд.

3°. *Отставание движущихся часов.* Пусть в системе S' неподвижно укреплены часы, отсчитывающие время t'. Их пространственные координаты x', y', z' являются, следовательно, постоянными. Будем наблюдать показания этих часов с точки зрения системы S. Отмечаем с точки зрения системы S тот момент t_1, когда часы показывают время t'_1; согласно первой формуле (6.21)

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Совершенно аналогично показание часов t'_2 наблюдается с точки зрения S в момент t_2

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая почленно, получаем:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ т. е. } t'_2 - t'_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1). \tag{6.26}$$

Итак, с точки зрения системы *S* прошел промежуток времени $t_2 — t_1$; если же судить по показаниям движущихся часов (точно таких же, какими измеряется время в системе *S*), то этот промежуток времени равен $t'_2 — t'_1$, т. е. короче в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. *Таким образом, движущиеся часы начинают отставать,* ход их замедляется в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, хотя с точки зрения той инерциальной системы *S* ', которая движется вместе с часами, в часах не произошло абсолютно никаких изменений.

В этом примере, как и в большинстве других, отклонения от обычного положения вещей зависят от значения радикала $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Когда скорость *v* мала сравнительно со скоростью света *с* (как это и бывает в повседневной практике), радикал ничтожно мало отличается от единицы, и эти отклонения незаметны. Напротив, при скоростях, близких к скорости света, когда значение радикала приближается к нулю, создается картина, резко отличная от наших обычных представлений.

4°. *Формула сложения скоростей.* Мы уже говорили о том, что относительные скорости инерциальных систем и вообще физических, тел не достигают скорости света. На первый взгляд здесь заключено противоречие: допустим, что система *S'* движется относительно *S* со скоростью 0,9*c* и система *S* " относительно *S'* движется в том же направлении тоже со скоростью 0,9*c*. Казалось бы, что тогда *S''* относительно *S* должна двигаться со скоростью 1,8*c*.

Но дело заключается в том, что обычная формула сложения скоростей неверна с точки зрения теории относительности и должна быть заменена новой. В самом деле, пусть некоторая материальная точка движется относительно системы *S'*, причем составляющие ее скорости по осям *X'*, *Y'*, *Z'* равны v'_x, v'_y, v'_z:

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x, \quad \frac{dy'}{dt'} = v'_y, \quad \frac{dz'}{dt'} = v'_z. \tag{6.27}$$

Пусть система S' движется относительно S по-прежнему со скоростью v в направлении общей оси X. Тогда, дифференцируя формулы (6.21), получаем:

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad dx = \frac{v\,dt' + dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz',$$

откуда скорость движения точки уже относительно системы S имеет следующие составляющие по осям X, Y, Z:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\frac{dy'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}, \qquad \frac{dz}{dt} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\frac{dz'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Пользуясь обозначениями (6.27) и аналогичными обозначениями для системы S, запишем окончательно:

$$v_x = \frac{v + v'_x}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{v'_y}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{v'_z}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}. \tag{6.28}$$

Итак, результирующая скорость v_x в направлении оси X, полученная наложением двух скоростей — скорости v системы S' относительно S и скорости v'_x точки относительно S',— равна не просто сумме $v+v'_x$, как в классической механике, а сумме с последующим делением на

$$1 + \frac{vv'_x}{c^2}.$$

Когда v и v'_x малы сравнительно с c, эта величина практически равна единице, и мы возвращаемся к классической формуле. Зато если хоть одна из слагаемых скоростей близка к скорости света, то влияние знаменателя велико, и результирующая скорость растет непропорционально мало, в частности, не может превзойти скорости света c. Это особенно заметно, если взять предельный случай $v=c$. Тогда

$$v_x = \frac{c + v'_x}{1 + \frac{cv'_x}{c^2}} = c,$$

т. е. когда одна из слагаемых скоростей равна *c*, то добавление к ней любой другой скорости ее не меняет. Это, впрочем, есть лишь перефразировка нашего исходного положения — постоянства скорости света относительно всех инерциальных систем.

До сих пор мы говорили о сложении одинаково направленных (по оси *X)* скоростей v и v'_x. Если же наша точка обладает относительно S' еще «поперечной» скоростью, например, v'_y, то относительно S эта скорость оказывается уже иной, а именно, приобретает множитель

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}}$$

(конечно, весьма близкий к единице при небольших v, v'_x).

Мы начали с рассмотрения информационного пространства событий, введения в нем псевдоевклидовой метрики и сопоставления инерциальных систем ортонормированным координатным системам в этом пространстве. Но получив отсюда формулы Лоренца, дающие связь между различными инерциальными системами, мы выводили следствия непосредственно из них, как бы забыв о псевдоевклидовой геометрии. Между тем и отдельные наши конкретные результаты имеют поучительное истолкование в псевдоевклидовой геометрии пространства событий; но для этого нам будут нужны некоторые свойства кривых в псевдоевклидовом информационном пространстве.

6.4. Кривые в вещественном евклидовом информационном пространстве

В *n*-мерном аффинном информационном пространстве естественно определить *кривую* как совокупность точек *M(x')*, зависящих от одного параметра *t:*

$$x^i = x^i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{6.29}$$

Под x^i мы понимаем координаты в какой-либо аффинной координатной системе. Зависимость $x^i(t)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой. В частности, если эта зависимость линейная, то мы получаем прямую линию, о которой ранее уже говорилось. Мы ограничиваемся вещественным пространством и все рассматриваемые величины считаем вещественными.

Радиус-вектор $\vec{OM}$ точки *M(t),* очевидно, тоже будет функцией от *t*

$$\vec{OM} = \mathbf{x}(t) = x^i(t)\mathbf{e}_i. \qquad (6.30)$$

Продифференцируем радиус-вектор по *t*, определяя производную обычным образом:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \qquad (6.31)$$

При этом переход к пределу для вектора, например, $\mathbf{x}_0 = \lim \mathbf{x}$, мы определяем как переход к пределу для каждой его координаты, $x^i_0 = \lim x^i$. Очевидно, смысл этого определения одинаков в любой аффинной координатной системе: если $x^i_0 = \lim x^i$ в одной системе, то $x^{i'}_0 = \lim x^{i'}$ в любой другой системе в силу одинакового линейного закона преобразования и для x^i и для x^i_0 при переходе к $x^{i'}$ и $x^{i'}_0$. В частности, непрерывность функций $x^i(t)$ равносильна непрерывности векторной функции $\mathbf{x}(t)$, т. е. соотношению $\lim \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)$ при $t \to t_0$ (в нашем случае при каждом t_0, $t_1 \leq t_0 \leq t_2$).

Таким образом, координаты вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ по определению получаются предельным переходом от координат вектора $\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}$, а эти последние равны $\frac{\Delta x^i}{\Delta t}$ и дают в пределе $\frac{dx^i}{dt}$. Итак, $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ существует и имеет координаты $\frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\mathbf{e}_i. \qquad (6.32)$$

Предполагая, что вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ отличен от нуля, мы будем называть его *касательным* вектором к нашей кривой в данной точке *M(t).* Такой вектор определяется с точностью до численного множителя, так как вдоль прежней кривой можно выбрать новый параметр *t*, и тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{t}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}.$$

Прямую линию, проходящую через точку *M(t)* и направленную по вектору $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, мы будем называть *касательной* к нашей кривой в точке *M(t).*

Дифференциал радиуса-вектора определяется как произведение его производной на приращение параметра:

$$d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\Delta t = \frac{dx^i}{dt}\mathbf{e}_i\,dt = dx^i\mathbf{e}_i. \tag{6.33}$$

Так как t — аргумент, то можно писать dt вместо Δt. Дифференциал $d\mathbf{x}$ направлен по касательной и показывает смещение по ней из точки *M(t),* пропорциональное приращению Δt параметра t. Сравним дифференциал $d\mathbf{x}$ с приращением $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)$. Очевидно, $\Delta\mathbf{x}$ даст вектор смещения из точки *M(t)* в другую точку $M\,(t+\Delta t)$ на кривой. Так как

$$\Delta\mathbf{x} = \Delta x^i(t)\,\mathbf{e}_i, \tag{6.34}$$

то, сравнивая с (6.33), мы видим, что соответствующие координаты векторов $\Delta\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}$ (т. е. $\Delta x^i(t)$ и dx^i) отличаются друг от друга при бесконечно малом Δt на бесконечно малые высшего порядка. Поэтому, окончательно, *смысл дифференциала* $d\mathbf{x}$ *заключается в том, что он выражает вектор смещения по касательной из точки касания M(t), растущий пропорционально* Δt *и притом так, что уклонение от истинного смещения по кривой в точку* $M(t+\Delta t)$ *будет бесконечно малым высшего порядка относительно* Δt. Одновременно здесь содержится разъяснение геометрического смысла касательной: из всех прямых, проходящих через *M(t),* только по касательной можно смещаться так, что уклонение от кривой будет бесконечно малым высшего порядка сравнительно с самим смещением.

Все сказанное до сих пор относится к кривым в аффинном информационном пространстве и, разумеется, остается верным и в евклидовом информационном пространстве. Но в этом случае добавляются и новые свойства. Прежде всего вдоль кривой вещественного евклидова информационном пространства можно вычислять длину дуги. *Длину дуги* кривой между точками $M_1\,(t_1)$ и $M_2\,(t_2)$ проще всего определить как интеграл

$$\overset{\frown}{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} |d\mathbf{x}| = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| dt \tag{6.35}$$

по аналогии с длиной дуги в обычном евклидовом информационном пространстве черточки означают, что вектор берется по длине. Нетрудно заметить, что выписанный интеграл не зависит от выбора параметра t вдоль кривой. Действительно, при переходе к новому параметру τ, так что $\tau=\tau\,(t)$ и $t = t(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые возрастающие функции, получаем:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right|d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt.$$

В случае псевдоевклидова информационного пространства касательный вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ может иметь или вещественную, или мнимую, или нулевую длину. Это будет зависеть от того, будет ли скалярный квадрат вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, или, что то же, вектора $d\mathbf{x}$, положительным, отрицательным или нулем:

$$d\mathbf{x}^2>0, \quad d\mathbf{x}^2<0, \quad d\mathbf{x}^2 = 0. \qquad (6.36)$$

Соответственно этому и наша кривая будет в любом своем куске иметь вещественную, мнимую или нулевую длину (изотропная кривая). Конечно, можно провести кривую и так, что на одном ее участке будет одно положение, а на другом другое, но таких кривых мы рассматривать не будем.

Из формулы (6.35) видно, что если отсчитывать дугу $s=\overset{\frown}{M_0M}$ от некоторой начальной точки $M_0(t_0)$ до переменной точки $M(t)$ на кривой $s=\overset{\frown}{M_0M}$, то ее дифференциал будет выражаться формулой

$$ds=|d\mathbf{x}|=\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt, \qquad (6.37)$$

т. е. совпадает с подынтегральным выражением. Или, что то же,

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 \qquad (6.38)$$

Если кривая имеет вещественную длину, то S можно принять за параметр t вдоль кривой, и тогда формула (6.37) дает

$$ds=\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|ds, \text{ откуда } \left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|=1.$$

Таким образом, производная радиуса-вектора по дуге s дает *единичный касательный вектор*

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}=\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \qquad \vec{\boldsymbol{\tau}}^2=1. \qquad (6.39)$$

Если кривая имеет мнимую длину, то s является чисто мнимой величиной

$$s = \sigma i \qquad (6.40)$$

и за параметр t вдоль кривой мы примем *вещественный* коэффициент σ при мнимой единице. Тогда $ds=id\sigma$, и формула (6.37) дает

$$i\,d\sigma = \left|\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\right| d\sigma, \quad \text{откуда} \quad \left|\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\right| = i. \tag{6.41}$$

Таким образом, производная радиуса-вектора по σ дает *мнимоединичный касательный вектор*

$$\vec{\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}, \qquad \vec{\tau}^2 = -1. \tag{6.42}$$

Сам вектор $\vec{\tau}$ — вещественный, и вообще в псевдоевклидовом информационном пространстве мы по-прежнему не рассматриваем каких-либо мнимостей кроме (в некоторых случаях) длин.

Пусть теперь кривая — изотропная, т. е. на любом участке имеет нулевую длину, что равносильно изотропности ее касательного вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ в любой ее точке

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| = 0, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 = 0. \tag{6.43}$$

В этом случае выбор дуги в качестве параметра невозможен.

Нас будут особо интересовать псевдоевклидовы информационные пространства индекса 1, так как информационное пространство событый принадлежит к их числу. Для каждой точки такого информационного пространства можно построить, как мы знаем, изотропный гиперконус с вершиной в этой точке, причем векторы вещественной длины, отложенные из данной точки, пойдут вне гиперконуса, векторы мнимой длины — внутри его, а изотропные векторы — по его образующим (рис. 6.1).

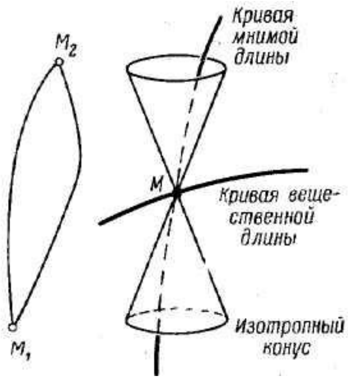


Рис. 6.1.

Соответственно этому кривая вещественной длины в каждой своей точке направлена вовне изотропного конуса в этой точке, кривая мнимой длины — внутрь его, а изотропная кривая касается его образующей (но, вообще говоря, не совпадает с ней).

6.5. Кинематика точки

Рассмотрим процесс движения какой-либо материальной точки. Для этого нужно указать положения, которые занимает точка в отдельные моменты времени, т. е. совокупность событий, зависящую от одного параметра (например, от времени t измеряемого относительно какой-либо системы S). Но такая совокупность событий образует в четырехмерном пространстве событий некоторую линию. В самом деле, зададим процесс движения точки относительно какой-либо инерциальной системы S. Для этого нужно переменные координаты этой точки x, y, z выразить как функции времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{6.44}$$

Но ct, x, y, z можно рассматривать как ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в информационном пространстве событий, так что наши уравнения примут вид

$$x^1 = f_1\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^2 = f_2\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^3 = f_3\left(\frac{x^0}{c}\right). \tag{6.45}$$

Мы получаем, следовательно, совокупность событий $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$, зависящих от одного параметра x^0, т. е. линию в информационном пространстве событий. *Итак, процесс движения материальной точки изображается линией в информационном пространстве событий.* Если, в частности, движение точки *равномерное и прямолинейное,* то функции (6.44) линейные, а следовательно, и x^1, x^2, x^3 линейно зависят от x^0, и *линия будет прямой.*

Кривая, отображающая в пространстве событий процесс движения материальной точки, называется ее *четырехмерной траекторией.* Вернее было бы говорить об изображении не «процесса движения», а «истории существования» данной материальной точки. Дело в том, что движение мы рассматриваем всегда *относительно* той или иной системы отсчета S, между тем четырехмерная траектория является построением *абсолютным,* не зависящим от выбора системы отсчета S и в таком выборе вообще не нуждающимся. Действительно, грубо говоря, четырехмерная траектория есть совокупность событий, из которых состоит история существования данной материальной точки, следовательно, определяется вне связи с выбором S и представляет собой *однозначным образом определенную кривую в информационном пространстве событий.* В связи с этим и касательный к ней мнимоединичный вектор — тоже вполне определенный вектор, инвариантный относительно выбора системы отсчета. Однако не всякая кривая в информационном пространстве событий может служить четырехмерной траекторией материальной точки: для этого необходимо и достаточно, чтобы кривая была *мнимой длины.*

В самом деле, материальная точка может двигаться лишь со скоростью, меньшей c. Запишем это с точки зрения инерциальной системы S, в которой закон движения точки имеет вид (6.44).

Так как проекции скорости на оси X, Y, Z суть

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$$

то получаем:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} < c, \tag{6.46}$$

откуда

$$-c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0, \tag{6.47}$$

или, переходя в соответствующие ортонормированные координаты в пространстве событий:

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 < 0. \tag{6.48}$$

Но согласно (6.33) для нашей четырехмерной траектории

$$d\mathbf{x} = dx^i\mathbf{e}_i = dx^0\mathbf{e}_0 + dx^1\mathbf{e}_1 + dx^2\mathbf{e}_2 + dx^3\mathbf{e}_3,$$

откуда

$$d\mathbf{x}^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 < 0, \tag{6.49}$$

а это согласно (6.36) означает, что *четырехмерная траектория есть кривая мнимой длины в информационном пространстве событий.* Мы будем относить ее к вещественному параметру $\sigma = \frac{s}{i}$, условившись отсчитывать σ в сторону возрастания x^0. Пишем ее уравнения в виде

$$x^0 = x_0(\sigma),\quad x^1 = x^1(\sigma),\quad x^2=x^2(\sigma),\quad x^3 = x^3(\sigma). \tag{6.50}$$

При этом

$$ds = |d\mathbf{x}| = \sqrt{-dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}} = i\sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}},$$

так что

$$d\sigma = \sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}}. \tag{6.51}$$

Касательный, вектор

$$\vec{\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}$$

будет, как мы знаем, мнимоединичным. Его координаты имеют при этом вид

$$\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma} = \frac{dx^i}{\sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}}}. \tag{6.52}$$

Ясно, что и, обратно, всякая кривая мнимой длины в пространстве событий может служить четырехмерной траекторией некоторой материальной точки, так как обеспечивает скорость движения, меньшую *с*.

Будем представлять себе, как это делается в геометрической оптике, что свет в пустоте распространяется прямолинейными лучами наподобие частиц, движущихся прямолинейно и равномерно со скоростью *с.* Тогда можно говорить о четырехмерных траекториях распространения света; эти траектории будут, очевидно, *прямыми линиями* и притом *изотропными,* так как в формулах (6.46) — (6.49) придется везде изменить знак $<$ на $=$.

Пусть событие *М* состоит в том, что световой сигнал исходит в данный момент из данной точки; тогда картина его распространения по всевозможным направлениям изображается *в информационном пространстве событий всевозможными образующими изотропного гиперконуса, исходящими из точки М (точнее, «верхними» полуобразующими,* так как «нижние» полуобразующие отвечают времени, предшествующему подаче сигнала). Четырехмерные же траектории материальных точек будут представлять собой кривые, в каждой своей точке направленные *внутрь* соответствующего изотропного гиперконуса, что означает скорость движения, меньшую *с*.

Параметр σ (деленный на *с*) имеет физический смысл так называемого собственного времени материальной частицы (под которой можно понимать в известном контексте и достаточно крупное тело, например космический корабль или даже планету).

Действительно, на бесконечно малом отрезке четырехмерной траектории вычислим $dx^0=cdt$ в системе отсчета *S,* в этот момент движущейся «вместе с частицей» или, что то же самое, в системе отсчета *S*, относительно которой частица в этот момент покоится:

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0.$$

Получаем согласно (6.51):

$$d\sigma = dx^0 = cdt.$$

Естественно принять, что внутренние процессы, происходящие в неравномерно движущейся «частице», согласуются с течением времени $t = \frac{1}{c}\sigma$; в самом деле, на каждом бесконечно малом участке четырехмерной траектории $\frac{d\sigma}{c}$ имеет смысл протекшего времени dt в системе S, движущейся в этот момент «вместе с частицей».

Если две различные частицы имеют четырехмерные траектории с общей начальной точкой M_1 и общей конечной точкой M_2, то собственное время $\frac{1}{c}\sigma$, протекшее от «начальной встречи» частиц до их «конечной встречи», имеет, вообще говоря, свое значение для каждой из частиц, так как их четырехмерные траектории, соединяющие точки M_1, M_2, могут быть весьма различными (рис. 6.1). При этом, как нетрудно показать, наибольшего значения протекшее время достигает в случае прямолинейной траектории.

Если одна из «частиц» — Земля, а другая — космический корабль, улетающий с Земли с очень большой скоростью, а затем на нее возвращающийся, то из сказанного следует, что космонавты по возвращении на Землю постареют меньше, чем люди, оставшиеся на Земле. Дело в том, что четырехмерную траекторию Земли приближенно можно считать прямой линией взамен «винтовой линии», сильно вытянутой в направлении оси x^0, как это на самом деле имеет место (в системе отсчета S, связанной с Солнцем).

Мы хотим теперь кинематические результаты, полученные в п. 6.3, геометрически истолковать в информационном пространстве событий. По-прежнему рассматриваем инерциальные системы S и S', связанные формулами Лоренца (6.20), (6.21). Но для простоты и наглядности мы будем рассматривать *лишь события, происходящие на оси X в системе S и, значит, на оси X' в системе S'*.

Другими словами, мы считаем $y = z = 0$, а значит (согласно формулам Лоренца), и $y' = z' = 0$. Так как ct, x, y, z в информационном пространстве событий представляют собой ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3, то это означает, что все рассматриваемые события располагаются в двумерной плоскости $x^2 = x^3 = 0$ (или, что то же, $x^{2'} = x^{3'} = 0$). Это будет координатная плоскость, построенная на ортах $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ или равным образом на ортах $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$, и притом псевдоевклидова, так как $\mathbf{e}^2_0 = -1$, $\mathbf{e}^2_1 = 1$. Эту псевдоевклидову плоскость мы и будем рассматривать, выделив ее из информационного пространства событий (рис. 6.2).

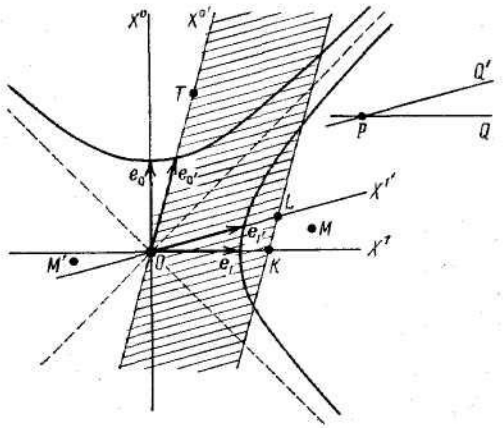


Рис. 6.2.

Инерциальные системы S и S' представлены в этой плоскости ортонормированными реперами ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$) и ($\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$) и соответственно координатными системами (x^0, x^1) и ($x^{0'}$, $x^{1'}$). В силу $x^2 = x^3 = 0$ мы сохраняем лишь две из формул Лоренца

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.53}$$

и обратные формулы

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.54}$$

Рассмотрим прежде всего вопрос об одновременности событий.

Относительно системы S одновременными будут события с одинаковыми значениями t:

$$t = \text{const}, \quad \text{т. е. } x^0 = \text{const}. \tag{6.55}$$

Но уравнение x^0 = const определяет на нашей плоскости прямую, параллельную оси X^1, так что *одновременные относительно системы S события располагаются на одной прямой, например PQ, параллельной оси* X^1. В частности, события, происшедшие в начальный момент $t = 0$, т. е. $x^0 = 0$, изображаются точками самой оси X^1. Как известно (конец п. 6.1), псевдоевклидовы расстояния между событиями, одневременными относительно какой-либо системы S, выражают просто расстояния между точками, где эти события произошли (тоже относительно S). На рис. 6.2 псевдоевклидово расстояние между событиями P, Q можно измерить, взяв отношение отрезка PQ к единице длины, отложенной в том же направлении (орт $\mathbf{e}_1$). Это отношение выражает расстояние между точками, где произошли события P, Q, с точки зрения системы S.

Совершенно аналогично события, одновременные относительно S', характеризуются условием

$$t' = \text{const}, \text{ т. е. } x^{0'} = \text{const} \tag{6.56}$$

и изображаются точками какой-либо прямой, например, PQ', параллельной оси $X^{1'}$. В частности, события, происшедшие в начальный момент $t' = 0$, изображаются точками самой оси $X^{1'}$. Ясно, что события, одновременные относительно системы S, будут разновременными относительно системы S'. Далее, изображенное на рисунке событие M расположено над осью X^1 и под осью $X^{1'}$, т. е. произошло с точки зрения системы S после начального момента $t = 0$, а с точки зрения системы S' — до начального момента $t = 0$; событие же M', наоборот, произошло с точки зрения системы S до начального момента $t = 0$, а с точки зрения системы S' — после начального момента $t' = 0$. Выходит, что относительно системы S событие M' произошло раньше, а M — позже; относительно же системы S' — наоборот.

Процесс движения какой-нибудь точки, закрепленной в системе S' (на оси X'), характеризуется тем, что x'= const, а t' меняется. Другими словами, мы получаем совокупность событий, характеризуемую уравнением

$$x^{1'} = \text{const} \qquad (x^{0'} \text{ — переменное})$$

и изображаемую, следовательно, прямой, параллельной $OX^{0'}$.

Прямые линии, параллельные $OX^{0'}$, представляют собой четырехмерные траектории точек, закрепленных на оси X' в системе S'. Аналогично прямые линии, параллельные OX^0, дают четырехмерные траектории точек, закрепленных на оси X в системе S:

$$x = \text{const}, \quad \text{т. е. } x^1 = \text{const}.$$

Если мы хотим изобразить процесс движения целого стержня, покоящегося, например, в системе S' на оси X', то нужно взять совокупность четырехмерных траекторий всех его точек (стержень мы представляем себе в виде отрезка). Пусть в начальный момент $t'=0$ стержень изображается отрезком OL оси $X^{1'}$ (ось $OX^{1'}$ в пространстве событий, как мы знаем, изображает ось X' в системе S', точнее, происходящие на этой оси события в начальный момент $t' = 0$).

Тогда в другие моменты времени t' стержень будет изображаться отрезком *OL*, параллельно сдвинутым в направлении оси $X^{0'}$ (см. штриховку на рисунке). Не надо забывать, что стержень покоится в системе *S'*, и его различные изображения показывают лишь течение времени, а не перемену места: у каждой точки стержня $x^{1'}$ = const, а меняется лишь $x^{0'}$.

В результате на рис. 6.2 история существования стержня изобразится целой заштрихованной полосой. Ее можно получить также, строя четырехмерные траектории каждой точки стержня, т. е. проводя параллели оси $X^{0'}$ через все точки отрезка *OL*.

Рассмотрим эту полосу с точки зрения координатной системы X^0OX^1. Здесь она уже не вытянута вдоль оси X^0, а является наклонной. Это говорит о том, что происходит не только течение времени, но и перемена места. И действительно, относительно системы *S* стержень движется вместе с системой *S'*. Желая рассмотреть этот движущийся стержень в какой-нибудь момент времени *t* с точки зрения системы *S*, например, в начальный момент, мы должны положить:

$$t = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad x^0 = 0,$$

и рассмотреть соответствующие точки полосы. В результате мы получаем отрезок *ОК* на оси X^1, который изображает наш стержень в начальный момент $t = 0$ с точки зрения системы *S*. В другие моменты времени *t* стержень будет изображаться параллельными *ОК* срезами полосы.

Обращает на себя внимание, что когда относительно системы *S* мы фиксируем движущийся стержень в определенный момент времени *t* (например, в виде отрезка *ОК* при $t=0$), то относительно системы *S'* мы фиксируем разные точки этого стержня *в разные моменты времени* (значения $x^{0'}$ будут для различных точек различными).

Соотношение (6.24)

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

можно было бы элементарным путем вывести из нашего рисунка. При этом, очевидно, *l* будет равно отношению отрезка *OL* к единице длины на оси $OX^{1'}$ (орт $\mathbf{e}_{1'}$), а *l'* — отношению *ОК* к единице длины на OX^1 (орт $\mathbf{e}_1$). На глаз видно, что $l' < l$.

Возвращаемся в полное информационное пространство событий и займемся вопросом, в каких случаях события M, $\tilde{M}$ могут влиять одно на другое, и частности, одно может служить причиной другого. Мы уже упоминали, что это возможно тогда, когда сигнал, распространяющийся со скоростью света, успевает дойти от места одного до места другого события за время, протекшее между этими событиями. Будем рассматривать наши события в *какой-либо инерциальной системе S*. Записываем наше условие:

$$\frac{1}{c}\sqrt{(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2} \leqslant |\tilde{t}-t|, \tag{6.57}$$

т. е. время, нужное свету, чтобы пройти соответствующее расстояние, не превышает времени, протекшего между событиями. Отсюда следует:

$$-c^2(\tilde{t}-t)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2 \leqslant 0,$$

т. е.

$$-(\tilde{x}^0-x^0)^2+(\tilde{x}^1-x^1)^2+(\tilde{x}^2-x^2)^2+(\tilde{x}^3-x^3)^2 \leqslant 0 \tag{6.58}$$

(так как ct, x, y, z — не что иное, как ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3). Пользуясь (6.6), получаем, наконец,

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 \leqslant 0. \tag{6.59}$$

Таким образом, для того чтобы из двух событий M, $\tilde{M}$ одно могло влиять на другое, необходимо и достаточно, чтобы длина вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ (равная $\sqrt{\overrightarrow{M\tilde{M}}^2}$) была мнимой или нулевой. Это условие носит, как видим, инвариантный характер (рис. 6.3).

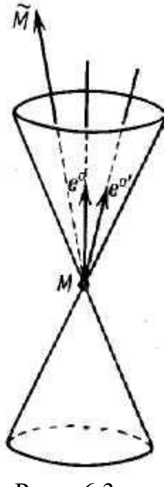


Рис. 6.3.

Мы не уточняли до сих пор, какое именно из двух событий влияет на другое. Допустим, что M влияет на $\tilde{M}$ и, следовательно, предшествует ему во времени, так что $x^0 < \tilde{x}^0$.

Рассмотрим те же события M, $\tilde{M}$ относительно другой инерциальной системы S'. В п. 6.2 мы выяснили, что при переходе от S к S' в первой формуле (6.16), а следовательно, и (6.15) приходится сохранить в знаменателе лишь знак +. Но тогда согласно (6.15)

$$x^{0\prime} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.60}$$

Переписывая эту же формулу для события $\tilde{M}$ и вычитая из нее (6.60), получим:

$$\tilde{x}^{0\prime} - x^{0\prime} = \frac{(\tilde{x}^0 - x^0) - \beta(\tilde{x}^1 - x^1)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.61}$$

Так как $|\beta|<1$ и, как вытекает из (6.59),

$$|\tilde{x}^1 - x^1| \leqslant |\tilde{x}^0 - x^0|,$$

то вычитаемое в числителе (6.61) по модулю меньше уменьшаемого, а значит, числитель имеет тот же знак, как и уменьшаемое $\tilde{x}^0 - x^0$, т. е. положителен. Таким образом, и левая часть (6.61) положительна и

$$\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime}.$$

Итак, если вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ *имеет мнимую или нулевую длину и если событие* $\tilde{M}$ *следует за* M *с точки зрения инерциальной системы* $S\ (\tilde{x}^0 > x^0)$, *то* $\tilde{M}$ *следует за* M *и с точки зрения любой другой инерциальной системы* $S'\ (\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime})$.

Следовательно, как раз в тех случаях, когда событие M может влиять на $\tilde{M}$, временная последовательность этих событий является абсолютной, и $\tilde{M}$ следует за M с точки зрения любой инерциальной системы S. Это показывает, что парадокс с обращением последовательности причины и следствия в действительности места не имеет. Когда же M, $\tilde{M}$ не могут влиять друг на друга, т. е. когда

вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ вещественной длины, тогда, как нетрудно показать, всегда возможно обращение последовательности событий M, $\tilde{M}$ за счет перехода к другой инерциальной системе. Но это не приводит к парадоксам ввиду отсутствия какого-либо влияния одного события на другое.

6.6. Динамика точки

Мы будем рассматривать движение материальной точки в какой-нибудь одной инерциальной системе *S*, предполагая, что все сказанное справедливо и в любой другой инерциальной системе.

Был установлен экспериментальный факт зависимости массы тел от ее скорости. А именно, если масса тела в состоянии покоя равна m_0, то при движении со скоростью u она будет равна:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.62}$$

При $u \to c$ масса m стремится к бесконечности, что подтверждает невозможность разогнать до скорости света тело, обладающее массой покоя.

Мы будем рассматривать материальную точку с массой покоя m_0 и переменной массой m. Вектор скорости обозначим **u**, вектор силы, действующей на точку, обозначим **F**.

Второй закон Ньютона записывается теперь следующим образом:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}), \tag{6.63}$$

т. е. сила **F** равна производной от импульса $m\mathbf{u}$ по времени t. Это выражение не сводится к произведению массы m на ускорение $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$, так как масса m переменная и при дифференцировании дает дополнительный член.

В общей теории информации играет исключительно важную роль *закон взаимосвязи массы и энергии.* Он состоит в том, что *наличие у данного тела энергии E означает наличие у него массы* $\frac{E}{c^2}$, *и наоборот, наличие массы m означает наличие энергии* mc^2:

$$E=mc^2. \tag{6.64}$$

Этот закон подтверждается физическим опытом, особенно ядерными реакциями, при которых излучение энергии связано с соответствующим уменьшением массы ядра или его остатков.

Естественно, что формально «вывести» этот закон в полной общности нельзя. Однако полезно проделать следующую выкладку, которая в значительной мере способна убедить в справедливости этого закона.

Пусть наша материальная точка движется для простоты по прямой линии, например, по оси *X*, под действием силы **F**, тоже направленной по оси *X*. Подсчитаем работу, произведенную силой на каком-нибудь участке пути от точки P_1 до P_2:

$$A=\int_{P_1}^{P_2} F\,dx. \tag{6.65}$$

Формула (6.63) для движения вдоль оси *X* принимает вид

$$F=\frac{d}{dt}(mu), \qquad \text{где} \qquad u=\frac{dx}{dt}. \tag{6.66}$$

Преобразуем интеграл (6.65), пользуясь (6.66):

$$A=\int_{P_1}^{P_2}\frac{d}{dt}(mu)\,dx=\int_{P_1}^{P_2}d\,(mu)\,\frac{dx}{dt}=\int_{P_1}^{P_2}d\,(mu)\,u.$$

Мы вместо пределов в определенном интеграле указываем лишь начало P_1 и конец P_2 данного пути. Это избавляет нас от необходимости каждый раз отдавать отчет в том, что служит аргументом под знаком интеграла.

Последний из полученных интегралов берем по частям и получаем:

$$A=mu^2\Big|_{P_1}^{P_2}-\int_{P_1}^{P_2}mu\,du.$$

Заменяя под знаком интеграла *m* согласно (6.62), продолжаем выкладку:

$$A=mu^2\Big|_{P_1}^{P_2}-\int_{P_1}^{P_2}\frac{m_0u\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=mu^2\Big|_{P_1}^{P_2}+m_0c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\Big|_{P_1}^{P_2}.$$

Заменяя, наконец, m_0 через

$$m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

получаем окончательно

$$A=mc^2\Big|_{P_1}^{P_2}=(m_2-m_1)\,c^2,$$

где m_1, m_2 — значения массы в начале и конце пути. Так как работа *A*, совершенная силой *F* над материальной точкой, пошла на увеличение ее энергии (именно, *кинетической* энергии), то

$$A=E_2-E_1$$

где E_1, E_2 — значения энергии E материальной точки в начале и конце пути. Сравнивая две последние формулы, получаем:

$$E_2—E_1 = (m_2 — m_1)c^2,$$

т. *е. приращение энергии материальной точки равно приращению ее массы, умноженному на* c^2.

Такая взаимосвязь между энергией и массой может показаться случайной, относящейся лишь к кинетической энергии. Однако на основе этого частного случая можно привести некоторые соображения в пользу универсального характера закона. В самом деле, энергия, приобретенная точкой, должна быть в силу закона сохранения энергии откуда-то заимствована. Но и масса, приобретенная точкой, тоже должна быть откуда-то заимствована в силу закона сохранения массы. Естественно предположить, что и энергия и масса были заимствованы у одного и того же тела *К,* именно того тела, которое действовало на точку с силой *F,* чем и было вызвано приращение и массы и энергии точки («тело *К*» здесь нужно понимать в широком смысле; оно может включать в себя и силовое поле, под действием которого находится наша точка). Но в таком случае получается, что потеря телом *К* некоторого количества энергии, независимо от вида этой энергии, сопровождается потерей и соответствующего количества массы.
Это лишь наводящие соображения, говорящие в пользу закона $E=mc^2$. Подлинным его доказательством является прямая и косвенная проверка на опыте; последняя состоит в подтверждении опытом теории относительности, одним из краеугольных камней которой является этот закон.

Запишем формулу кинетической энергии точки с массой покоя m_0 и скоростью движения *u.* В состоянии покоя точка обладает массой m_0 и, следовательно, энергией m_0c^2; двигаясь со скоростью *u,* она обладает массой $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ и, следовательно, энергией $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$.
Приращение энергии и составляет *кинетическую* энергию точки:

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right).$$

Эта формула как будто совсем не похожа на обычную, но когда *u* мало сравнительно с *с,* то, пренебрегая величинами порядка $\left(\frac{u}{c}\right)^4$ и выше, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \approx 1+\frac{u^2}{2c^2},$$

откуда

$$T \approx \frac{m_0 u^2}{2},$$

и мы возвращаемся к обычной формуле. Разумеется, все подсчеты производятся в какой-либо инерциальной системе *S*.

Кроме энергии mc^2 большое значение имеет импульс движущейся точки $m\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — вектор скорости. Запишем проекции импульса на координатные оси *X*, *Y*, *Z* в системе *S:*

$$mu_x, \quad mu_y, \quad mu_z;$$

здесь

$$u_x=\frac{dx}{dt}, \quad u_y=\frac{dy}{dt}, \quad u_z=\frac{dz}{dt}. \tag{6.68}$$

Выразим еще скорость по абсолютной величине:

$$u=|\mathbf{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}. \tag{6.69}$$

Теперь переходим к истолкованию всех этих величин в четырехмерном информационном пространстве событий. Процесс движения материальной точки задается четырехмерной траекторией мнимой длины, которую согласно (6.50) мы будем относить к параметру σ в какой-нибудь ортонормированной координатной системе x^i:

$$x^i = x^i(\sigma). \tag{6.70}$$

Координаты мнимоединичного касательного вектора $\vec{\tau}$ равны согласно (6.52):

$$\tau^i=\frac{dx^i}{d\sigma}, \quad \text{где} \quad d\sigma=\sqrt{dx^{0^2}-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}}. \tag{6.71}$$

Пусть наша ортонормированная координатная система в информационном пространстве событий изображает некоторую инерциальную систему *S*, так что

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3=z.$$

Тогда относительно инерциальной системы *S* отдельные координаты касательного вектора $\vec{\tau}$ имеют следующий смысл.

Так как

$$d\sigma=\sqrt{c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}=$$

$$=c\,dt\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}-\frac{u_y^2}{c^2}-\frac{u_z^2}{c^2}}=cdt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

то

$$\left.\begin{aligned} \tau^0 &= \frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^1 &= \frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ \tau^2 &= \frac{dx^2}{d\sigma} = \frac{u_y}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^3 &= \frac{dx^3}{d\sigma} = \frac{u_z}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\}$$

Мы воспользовались здесь формулами (6.68), (6.69).

Мнимоединичный касательный к четырехмерной траектории вектор $\vec{\tau}$ никак не отражает индивидуальности рассматриваемой материальной точки. Эта индивидуальность в данной связи характеризуется массой покоя m_0, или, что то же самое, энергией покоя m_0c^2:

$$E_0 = m_oc^2 \qquad (6.73)$$

Ми построим в каждой точке четырехмерной траектории касательный к ней вектор $E_0\vec{\tau}$*, умножив мнимоединичный касательный вектор* $\vec{\tau}$ *на энергию покоя. Этот вектор мы будем называть (четырехмерным) вектором энергии-импульса нашей материальной точки* (рис. 6.4).

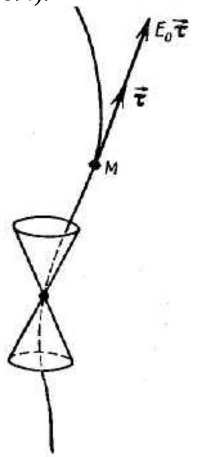


Рис. 6.4.

Выясним смысл этого названия.

Вектор энергии-импульса имеет постоянную длину E_0i, так как вектор $\vec{\tau}$ имеет длину i. Таким образом, вектор энергии импульса, вслед за четырехмерной траекторией, которой он касается, является инвариантным геометрическим построением в информационном пространстве событий, *совершенно не зависящим от выбора* *инерциальной системы* S (энергия покоя E_0 зависит лишь от выбора самой материальной точки).

Ничто не мешает нам рассматривать вектор энергии-импульса и в инерциальной системе S, точнее, в соответствующей ортонормированной координатной системе x^i.

Координаты вектора энергии-импульса получатся умножением координат $\vec{\tau}$ (6.72) на $E_0 = m_0c^2$:

$$E_0\tau^0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad E_0\tau^1 = \frac{m_0u_xc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \text{ и т. д.}$$

Пользуясь (6.62), получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} E_0\tau^0 &= mc^2, & E_0\tau^1 &= mu_xc, \\ E_0\tau^2 &= mu_yc, & E_0\tau^3 &= mu_zc. \end{aligned}\right\} \tag{6.74}$$

Таким образом, нулевая координата вектора энергии-импульса выражает энергию материальной точки, а три другие—умноженные на c — составляющие ее импульса по осям X, Y, Z. Название вектора энергии-импульса этим оправдано: его координаты, вычисленные в *ортонормированной координатной системе* x^i, определяют энергию и три составляющие импульса материальной точки *относительно соответствующей инерциальной системы* S.

Подобно тому, как пространственная и временная протяженность мира изображается в четырехмерном информационном пространстве событий единой псевдоевклидовой метрикой, так энергия и импульс материальной точки изображаются единым четырехмерным вектором. «Распадение» его на энергию и три составляющие импульса происходит лишь по отношению к той или иной инерциальной системе S.

Существование инвариантного вектора энергии-импульса с координатами (6.74) представляет интерес не только с точки зрения четырехмерного геометрического истолкования механики. Напротив, важнейшее значение этого факта в другом: до сих пор мы предполагали, что динамика точки строится одинаково в каждой инерциальной системе S, но не знали, как связаны между собой соответствующие величины для *разных* систем S, S'; *теперь же, зная энергию и импульс материальной точки в одной инерциальной системе S, мы можем вычислять эти величины и в любой другой инерциальной системе S'.*

В самом деле, *поскольку энергия и три составляющие импульса (умноженные на c) образуют в информационном пространстве* *событий координаты инвариантного вектора* $E_0\vec{\tau}$*, то они и преобразуются соответствующим образом.* А именно, переход от одного ортонормированного репера $\mathfrak{R}$, (отвечающего *S)* к другому, $\mathfrak{R}'$, (отвечающему *S')* выражается формулами

$$\mathbf{e}_{i'} = A^{i}_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{OO'} = -A^{i'}\mathbf{e}_{i'} \tag{6.75}$$

и влечет за собой, как мы знаем, преобразование координат точки (т. е. события)

$$x^{i'} = A^{i'}_{i} x^i + A^{i'} \tag{6.76}$$

и преобразование координат вектора

$$x^{i'} = A^{i'}_{\ i}\, x^i. \tag{6.77}$$

При этом матрица $A^{i'}_{\ i}$ (как и обратная ей матрица $A^{i}_{\ i'}$*)* должна быть в нашем случае псевдоортогональной 4-го порядка, индекса 1 с добавочным условием $A^{0'}_{\ 0} > 0$ (см. (6.13)). *Таким образом, чтобы получить закон преобразования координат* x^0, x^1, x^2, x^3 *инвариантного вектора, достаточно отбросить свободные члены в формулах* (6.76), *выражающих преобразование координат события* $x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z$ *при переходе от инерциальной системы S к инерциальной системе S'.* Таков будет, в частности, и закон преобразования координат вектора энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$.

Простейший пример преобразования (6.76) дают формулы Лоренца (6.20), которые можно переписать в виде

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \frac{v}{c} x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x^{1'} = \frac{-\frac{v}{c} x^0 + x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \tag{6.78}$$

Здесь свободных членов нет, так что эти же формулы дают и закон преобразования (6.77) координат вектора. В частности, подставляя сюда $E_0\tau^i$ вместо x^i мы получаем *закон преобразования энергии и трех составляющих импульса материальной точки (умноженных на с) при переходе от S к S'.*

Возвращаясь к общему преобразованию (6.77), заметим, что каждая новая координата вектора зависит, вообще говоря, от всех старых, так что энергия в новой системе *S'* зависит не только от энергии, но и от импульса в системе *S;* равным образом, и импульс в системе *S'* зависит не только от импульса, но и от энергии в системе *S*. В этом и заключается реальный физический смысл объединения энергии и импульса материальной точки в один четырехмерный вектор.

6.7. Плотность масс, плотность заряда, вектор плотности тока

Чтобы не загромождать последующее изложение деталями, мы произведем в этом пункте некоторые нужные нам подсчеты.

Когда мы имеем не отдельную частицу, а поток большого числа частиц, то в идеализированном виде представляем себе его как поток непрерывно распределенных в пространстве масс. Обозначим плотность этих масс относительно какой-нибудь инерциальной системы S через μ. Плотность μ будет различной в разных точках и в разные моменты времени:

$$\mu = \mu(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \quad (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3 = ct,\ x,\ y,\ z). \tag{6.79}$$

Далее, в каждой точке и в каждый момент времени поток масс имеет определенный вектор скорости

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{6.80}$$

Мы должны ожидать, что плотность μ относительно различных инерциальных систем S будет различной, хотя бы мы измеряли ее в том же месте и в тот же момент времени. При этом есть одна инерциальная система, которая будет играть в этом измерении особую роль: это система S_0, движущаяся вместе с потоком, т. е. такая, с точки зрения которой массы покоятся. Конечно, подобрать систему S_0 так, чтобы относительно системы S_0 покоились вообще все рассматриваемые массы, невозможно, если только мы не берем в качестве потока очень частный случай равномерного и прямолинейного движения твердого тела. Но для *данной точки и данного момента времени* всегда можно подобрать систему S_0, заставив ее двигаться относительно системы S со скоростью $\mathbf{u}$, которую имеет поток в этой точке и в этот момент времени. Тогда элемент массы dm, заключенный в элементе объема $d\omega$ и движущийся вместе с потоком со скоростью $\mathbf{u}$, будет в этот момент покоиться относительно системы S_0 (для краткости мы будем говорить об «элементах» массы и объема без детальных уточнений; по существу речь идет о массе и объеме, заключенных в бесконечно малой окрестности данной точки и рассматриваемых с точностью до бесконечно малых высшего порядка; в частности, тогда массу и объем можно считать пропорциональными между собой).

Относительно системы S_0 наш элемент объема имеет уже другую величину, которую мы обозначим $d\omega_0$. Действительно, поскольку с точки зрения системы S_0 элемент объема покоится, а с точки зрения системы S движется со скоростью $\mathbf{u}$, его продольные размеры с точки зрения системы S сократятся в отношении $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, поперечные же размеры не изменяются. В результате объем сократится в отношении $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, и мы получаем:

$$d\omega = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\, d\omega_0. \tag{6.81}$$

Пусть с точки зрения системы S_0 наш элемент массы имеет значение $d\omega_0$. Поскольку в системе S_0 он покоится, а относительно системы S имеет скорость **u**, получаем согласно (6.62)

$$dm = \frac{dm_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.82}$$

Обозначим через μ_0 плотность масс в данной точке и в данный момент времени с точки зрения системы S_0 (плотность покоя). Конечно, μ_0 зависит от выбранной точки и от выбранного момента времени

$$\mu_0 = \mu_0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \tag{6.83}$$

но в отличие от μ является инвариантом — не зависит от выбора инерциальной системы S. По смыслу понятия плотности

$$\mu_0 = \frac{dm_0}{d\omega_0}, \qquad \mu = \frac{dm}{d\omega}.$$

Вставляя в последнюю формулу выражения (6.81) и (6.82), получаем

$$\mu = \frac{\mu_0}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.84}$$

Такова важная формула, связывающая плотности масс в системе S_0, где они покоятся, и в системе S, относительно которой они движутся со скоростью **u**.

Посмотрим теперь, как выглядит картина потока масс с точки зрения информационного пространства событий.

Каждая частица массы, вернее, каждая точка, движущаяся вместе с потоком, обладает четырехмерной траекторией в информационном пространстве событий. Если представлять себе в идеализированном виде, что поток масс заполняет все наше пространство, то *четырехмерные траектории его частиц заполняют все информационное пространство событий, причем через каждую точку информационного пространства событий проходит одна и только одна траектория.*

Действительно, в любой точке и в любой момент времени мы находим частицу массы, движущейся с нашим потоком; вполне определенный процесс ее дальнейшего (и предшествующего) движения изображается вполне определенной четырехмерной траекторией в информационном пространстве событий. Но «любая точка и любой момент времени» означают выбор произвольной точки в информационном пространстве событий, через которую и пройдет эта (единственным образом определенная) траектория.

Построим мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ к каждой четырехмерной траектории потока в каждой ее точке. В результате вектор $\vec{\tau}$ будет построен в каждой точке M информационного пространства событий, и мы получаем *векторное поле в информационном пространстве событий*

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(M), \quad \tau^i = \tau^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{6.85}$$

Очевидно, по этому векторному полю можно, обратно, восстановить совокупность четырехмерных траекторий потока масс. Связь между координатами τ^i вектора $\vec{\tau}$ в информационном пространстве событий и координатами u_x, u_y, u_z вектора **u** (6.80) в обычном пространстве дается формулами (6.72).

Обращает на себя внимание, что в полученной нами картине не нашла себе отражения такая важная характеристика потока, как плотность его масс. Но к этому мы вернемся позже, когда будем заниматься тензором энергии-импульса.

Переходим теперь к другому, хотя и сходному вопросу: рассмотрим поток частиц, несущих электрические заряды; масса частиц интересовать нас не будет. Идеализируя эту картину, можно рассматривать движение непрерывно распределенного в пространстве электрического заряда. Плотность этого заряда, рассматриваемая с точки зрения какой-либо инерциальной системы S, является функцией места и времени:

$$\rho = \rho\,(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{6.86}$$

Аналогично (6.80) обозначим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{6.87}$$

вектор скорости потока электричества с точки зрения системы S. Теперь аналогично предыдущему подберем для данной точки и данного момента времени систему S_0, движущуюся вместе с потоком электричества. Плотность электрического заряда в этой точке и в этот момент времени, измеренную в системе S_0, обозначим ρ_0 (плотность покоя). Плотность покоя также есть функция места и времени:

$$\rho_0 = \rho_0\,(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (6.88)$$

и аналогично μ_0 представляет собой инвариант (не зависит от выбора инерциальной системы *S).* По-прежнему для элемента объема имеет место соотношение (6.81) между его величиной $d\omega$ с точки зрения *S* и его величиной $d\omega_0$ с точки зрения S_0. Обозначим через *de* элемент заряда, заключенный в этом элементе объема. Элемент заряда будет одинаковым и с точки зрения *S* и с точки зрения S_0, так как *теория относительности сохраняет классическую точку зрения на заряд как на инвариант, значение которого не зависит от выбора инерциальной системы.*

Плотность электрического заряда с точек зрения систем *S* и S_0 имеет соответственно значения

$$\rho = \frac{de}{d\omega}, \quad \rho_0 = \frac{de}{d\omega_0},$$

откуда при помощи (6.81) следует:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (6.89)$$

Так меняется плотность электрического заряда при переходе от системы S_0*, относительно которой он покоится, к системе S, относительно которой он движется со скоростью* **u**.

Переходя к геометрическому истолкованию в четырехмерном информационном пространстве событий, воспроизводим прежнюю картину четырехмерных траекторий, но теперь уже для частиц заряда, вернее, для точек, движущихся вместе с потоком электричества. По-прежнему через каждую точку информационного пространства событий проходит одна и только одна четырехмерная траектория, и ее мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ образует поле (6.85) в этом пространстве. Связь с вектором скорости **u** (6.87) по-прежнему дается формулами (6.72). Но теперь мы пойдем дальше. Умножим вектор $\vec{\tau}$ на плотность покоя ρ_0 и обозначим полученный вектор через **s**:

$$\mathbf{s} = \rho_0\,(x^0, x^1, x^2, x^3)\,\vec{\boldsymbol{\tau}}\,(x^0, x^1, x^2, x^3). \qquad (6.90)$$

Подчеркнем, что векторное поле **s** в информационном пространстве событий является инвариантным, т. е. не зависит от выбора инерциальной системы *S,* так как инвариантны оба множителя, при помощи которых оно получено.

Вектор **s** *мы будем называть четырехмерным вектором плотности тока.* Смысл этого названия выяснится, если рассмотреть *координаты вектора в ортонормированном репере* $\mathfrak{R}$, *изображающем какую-нибудь систему S.*

Пользуясь (6.72), получаем:

$$s^0 = \rho_0 \tau^0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad s^1 = \rho_0 \tau^1 = \frac{\rho_0 u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \text{ и т. д.},$$

а пользуясь (6.89), получаем окончательно:

$$s^0 = \rho, \quad s^1 = \rho\frac{u_x}{c}, \qquad s^2 = \rho\frac{u_y}{c}, \qquad s^3 = \rho\frac{u_z}{c}. \tag{6.91}$$

Таким образом, нулевая координата вектора **s** *выражает плотность заряда, а три остальные (после умножения на c) — значения плотности тока в направлениях координатных осей X, Y, Z — все это относительно данной инерциальной системы S.*

Плотностью тока, например, в направлении оси X мы называем количество электричества, протекающее за бесконечно малый промежуток времени ε через бесконечно малую площадку dS, ортогональную к оси X, отнесенное к единице площади и к единице времени и взятое в пределе. Плотность тока мы считаем положительной, если ток течет в положительную сторону оси X. Легко подсчитать, что поскольку плотность электричества ρ, а движется оно в направлении оси X со скоростью u_x, то плотность тока в направлении оси X равна ρu_x и аналогично для других осей. Очевидно, ρu_x зависит от момента времени и от места, где выбрана площадка dS, т. е. от x^0, x^1, x^2, x^3.

Итак, плотность заряда и три значения плотности тока в направлениях осей X, Y, Z (деленные на c) оказались координатами одного инвариантного четырехмерного вектора.

Реальный физический смысл этого утверждения заключается в том, что мы можем указать закон преобразования этих четырех величин при переходе от одной инерциальной системы к другой. Здесь можно повторить все сказанное в конце п. 6.6 относительно координат вектора энергии-импульса.

6.8. Электромагнитное поле

В этом пункте мы покажем, как электромагнитное поле находит изображение в информационном пространстве событий в виде определенного тензорного поля. Начнем с того, что будем наблюдать электромагнитное поле (в вакууме) относительно какой-нибудь инерциальной системы S. Пусть **E** (E_x, E_y, E_z) будет напряженность электрического и **H**(H_x, H_y, H_z) — напряженность магнитного поля.

Для простоты будем считать эти векторы постоянными в рассматриваемой малой области пространства и за малый промежуток времени.

Если у нас имеется частица, несущая заряд e и движущаяся со скоростью $\mathbf{u}$, то в электромагнитном поле на нее действует сила по закону Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{uH}]. \tag{6.92}$$

Согласно общей установке теории относительности мы предполагаем, что этот закон действует в любой инерциальной системе.

Пусть наша частица имеет (переменную) массу m. Тогда, пользуясь вторым законом Ньютона в форме (6.63), можно записать:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uH}]\right\}. \tag{6.93}$$

Проектируя это равенство почленно на координатные оси, получим:

$$\frac{d}{dt}(mu_x) = e\left\{E_x + \frac{1}{c}(u_yH_z - u_zH_y)\right\}$$

и две аналогичные формулы, получаемые из этой круговой подстановкой x, y, z.

Умножая почленно на cdt и учитывая, что

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \; u_z = \frac{dz}{dt},$$

получим:

$$d(mu_xc) = e\{E_xc\,dt + dy\,H_z - dz\,H_y\} \tag{6.94}$$

и две аналогичные формулы.

Переходим теперь в информационное пространство событий, где нашей инерциальной системе S отвечает ортонормированная координатная система $x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z$. При этом движение частицы изображается четырехмерной траекторией с мнимоединичным касательным вектором $\vec{\tau}$, при помощи которого мы составляли вектор энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$, где E_0— энергия покоя. Согласно (6.74)

$$mu_xc = E_0\tau^1 \text{ и т. д.,}$$

так что (6.94) и две аналогичные формулы можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} d(E_0\tau^1) &= e\{E_x dx^0 + H_z dx^2 - H_y dx^3\}, \\ d(E_0\tau^2) &= e\{E_y dx^0 - H_z dx^1 + H_x dx^3\}, \\ d(E_0\tau^3) &= e\{E_z dx^0 + H_y dx^1 - H_x dx^2\}. \end{aligned}\right\} \quad (6.95)$$

К этим формулам следует прибавить еще одну, выражающую дифференциал энергии частицы, — пока мы выразили лишь дифференциалы трех проекций ее импульса (умноженные на c). Но дифференциал энергии mc^2 равен элементу работы, совершенной над частицей силами поля:

$$d(mc^2) - e\{E_x dx + E_y dy + E_z dz\}. \quad (6.96)$$

В правой части записана работа, произведенная лишь силами электрического поля; это потому, что магнитное поле, как видно из (6.92), дает силу, ортогональную к направлению движения частицы (к вектору скорости **u**), и потому работы не производит.

Пользуясь формулами (6.73), запишем окончательно:

$$d(E_0\tau^0) = e\{E_x dx + E_y dy + E_z dz\}. \quad (6.97)$$

Теперь объединим формулы (6.95), (6.97), поставив на первое место (6.97). Мы видим, что эти формулы выражают линейную зависимость координат вектора $d(E_0\vec{\tau})$ от координат dx^i вектора $d\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$— текущий радиус-вектор четырехмерной траектории частицы в информационном пространстве событий. Оба дифференциала $d\mathbf{x}$, $d(E_0\vec{\tau})$ берутся при бесконечно малом смещении по четырехмерной траектории.

Формулы (6.97), (6.95) становятся более прозрачными, если перейти к *ковариантным* координатам вектора $d(E_0\vec{\tau})$.

Согласно (5.69) для любого вектора **x** в ортонормированной координатной системе в информационном пространстве событий мы имеем:

$$x_0 = -x^0, \quad x_\lambda = x^\lambda \quad (\lambda=1,2,3), \quad (6.98)$$

так как в этом случае $\mathbf{e}^2_0 = -1$, $\mathbf{e}^0_\lambda = 1$. Применяя эти формулы к $E_0\vec{\tau}$, мы перепишем (6.97), (6.95) в виде

$$\left.\begin{aligned} d(E_0\tau_0) &= e\{\qquad\quad -E_x dx^1 - E_y dx^2 - E_z dx^3\}, \\ d(E_0\tau_1) &= e\{E_x dx^0 \qquad\qquad + H_z dx^2 - H_y dx^3\}, \\ d(E_0\tau_2) &= e\{E_y dx^0 - H_z dx^1 \qquad\qquad + H_x dx^3\}, \\ d(E_0\tau_3) &= e\{E_z dx^0 + H_y dx^1 - H_x dx^2 \qquad\qquad\}. \end{aligned}\right\} \quad (6.99)$$

Мы замечаем, что матрица линейного преобразования dx^i в $d(E_0\tau_i)$ является *кососимметрической* и, если отбросить множитель e и обозначить ее элементы через F_{ij}, имеет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (6.100)$$

Очевидно, $F_{ij} = - F_{ji}$. Пользуясь индексными обозначениями, формулы (6.99) можно переписать в виде

$$d(E_0\tau_i) = e\, F_{ij}\, dx^j. \qquad (6.101)$$

Разберемся в смысле полученного результата. При бесконечно малом смещении по четырехмерной траектории заряженной частицы (рис. 6.5) мы рассмотрим дифференциал $d\mathbf{x}$ радиуса-вектора $\mathbf{x}$ (его контравариантные координаты dx^i) и дифференциал $d\,(E_0\vec{\tau}\,)$ вектора энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$ (его ковариантные координаты $d(E_0\tau_i)$).

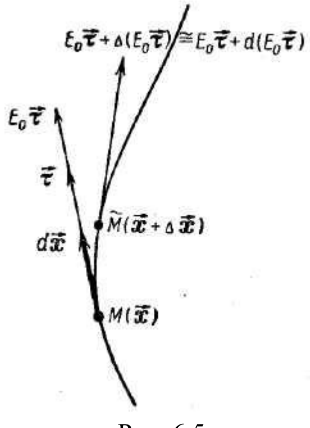


Рис. 6.5.

Причиной того, что $d\,(E_0\vec{\tau}\,)$ вообще существует (т. е. не равен нулю), является электромагнитное поле, действующее на заряженную частицу; если бы частица не подвергалась действию сил, то мы имели бы

$$d\,(E_0\vec{\tau}\,)=0,$$

т. е. вектор энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$ оставался бы постоянным, и четырехмерная траектория, как легко следует из $\vec{\tau}$ = const, была бы прямолинейной. При этом *в одном и том же электромагнитном поле* мы можем заставить заряженную частицу двигаться по разным направлениям с разными скоростями, т. е. можем *варьировать четырехмерную траекторию. Тогда вектор* $d\mathbf{x}$ *будет принимать различные значения, а* $d\,(E_0\vec{\tau})$ *будет меняться в зависимости от* dx. Так как координаты вектора $d\,(E_0x)$ при этом линейно зависят от координат вектора dx, то $d\,(E_0x)$ получается из $d\mathbf{x}$ действием некоторого аффинора, который, отбрасывая множитель e, мы обозначим $\mathfrak{F}$. Итак,

$$d\,(E_0\vec{\tau}) = e\mathfrak{F}\,d\mathbf{x}. \tag{6.102}$$

Формулы (6.101) выражают зависимость *ковариантных координат* вектора-функции от контравариантных координат вектора-аргумента, так что коэффициенты F_{ij} аффинора $\mathfrak{F}$ образуют согласно (5.37) дважды ковариантный (и при этом кососимметрический) тензор. *Тензор* F_{ij} *называется тензором электромагнитного поля. Таким образом, составляющие электрического и магнитного полей, рассматриваемые относительно какой-либо инерциальной системы* S, *образуют по схеме* (6.100) *координаты дважды ковариантного кососимметрического тензора* F_{ij}, *вычисленные в соответствующей ортонормированной системе координат в информационном пространстве событий.*

Реальный физический смысл этого результата заключается в том, что он дает возможность пересчитывать электромагнитное поле, заданное в одной инерциальной системе S, на любую другую инерциальную систему S'. Для этого составляющие электромагнитного поля, записанные по схеме (6.100), нужно подвергнуть преобразованию по тензорному закону

$$F_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}F_{ij}. \tag{6.103}$$

Здесь $A^i_{i'}$ — псевдоортогональная матрица (см. (6.13)), выражающая переход от ортонормированной системы, отвечающей S, к системе, отвечающей S':

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i.$$

Если нам задан переход от S к S' формулами

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}$$

(где $x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z$), то обратную матрицу $A^i_{i'}$ мы получаем согласно (6.13). В простейшем случае, когда переход задается формулами Лоренца (6.78), эта матрица имеет вид

$$\begin{Vmatrix} A^{0}_{0'} & A^{1}_{0'} & A^{2}_{0'} & A^{3}_{0'} \\ A^{0}_{1'} & A^{1}_{1'} & A^{2}_{1'} & A^{3}_{1'} \\ A^{0}_{2'} & A^{1}_{2'} & A^{2}_{2'} & A^{3}_{2'} \\ A^{0}_{3'} & A^{1}_{3'} & A^{2}_{3'} & A^{3}_{3'} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{6.104}$$

Применяя ее в формуле (6.103), получаем, например:

$$E'_y = F_{2'0'} = A_{2'}A^{j}_{0'}F_{ij} = A^{2}_{2'}A^{0}_{0'}F_{20} + A^{2}_{2'}A^{1}_{0'}F_{21} =$$
$$= 1\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}E_y + 1\cdot\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(-H_z) = \frac{E_y-\frac{v}{c}H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.105}$$

В процессе суммирования по i, j мы не выписывали членов, равных нулю. Аналогично можно вычислить любую составляющую электромагнитного поля относительно системы S'.

Мы рассматривали электромагнитное поле для простоты в малом участке пространства и в течение малого промежутка времени, т. е. в малой области четырехмерного информационного пространства событий, и считали его в этой области постоянным. В действительности же напряженности электрического и магнитного полей зависят от места и времени, так что тензор F_{ij} должен быть задан в каждой точке информационного пространства событий, и мы получаем тензорное поле

$$F_{ij} = F_{ij}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{6.106}$$

Этим тензорным полем мы и будем в дальнейшем заниматься.

6.9. Уравнения Максвелла

Краеугольным камнем электродинамики служат *уравнения Максвелла.* Пусть $\mathbf{E}(t, x, y, z)$, $\mathbf{H}(t, x, y, z)$ будут соответственно электрическое и магнитное векторные поля, рассматриваемые относительно «покоящейся» системы отсчета S. Тогда первая группа уравнений Максвелла связывает эти поля друг с другом

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{6.107}$$

а вторая группа связывает их, кроме того, с распределением и движением электричества в пространстве:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{u}. \tag{6.108}$$

Здесь

$$\rho = \rho\,(t, x, y, z)$$

есть плотность электрического заряда, а

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$$

— вектор скорости его движения в данной точке и в данный момент времени. Уравнения Максвелла записаны у нас для вакуума.

Как уже указывалось, законы электродинамики, т. е. в основном уравнения Максвелла, *с классической точки зрения неинвариантны относительно перехода от одной инерциальной системы к другой* и должны нарушаться в «движущейся» системе *S'*. Опыт же показал противное, и теория относительности возникла как разрешение этого противоречия. Сейчас мы покажем, что, действительно, *с точки зрения теории относительности имеет место инвариантность уравнений Максвелла,* т. е. если эти уравнения справедливы в одной инерциальной системе *S*, то они справедливы и в любой другой системе *S'*.

Для этой цели мы должны истолковать уравнения Максвелла с точки зрения четырехмерного информационного пространства событий как ограничения, наложенные на выбор тензорных полей F_{ij} (электромагнитное поле) и s^i (поле вектора четырехмерной плотности тока). Займемся сначала первой группой уравнений Максвелла (6.107). Дадим эти уравнения в развернутой координатной записи (проектируя второе из них на координатные оси *X, Y, Z):*

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t},$$

и еще две формулы, получающиеся из последней круговой подстановкой *x, y, z*. Пользуясь теперь таблицей (6.100), а также обозначениями $x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z$, получаем:

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = 0, \tag{6.109}$$

$$\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} = -\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} \tag{6.110}$$

и еще две формулы, получающиеся из последней круговой подстановкой 1, 2, 3.

Пользуясь косой симметрией $F_{ij} = -F_{ji}$ можно записать (6.110) в более симметричном виде, перенося все члены в левые части:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\\ \frac{\partial F_{10}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{03}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x^0}=0,\\ \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}=0.\end{aligned}\right\}$$

(6.111)

Мы замечаем, что четыре формулы (6.111), (6.109), к которым свелась первая группа уравнений Максвелла, имеют однотипное строение и допускают общую запись с буквенными индексами:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j}=0.$$

(6.112)

Заметим, что левая часть этого уравнения кососимметрична по всем трем своим индексам: если переставить между собой, например, индексы *k, i,* то последний член меняет знак, первый член превращается во второй и наоборот, в обоих случаях с изменением знака (все это в силу косой симметрии тензора F_{ij}). При этом формулы (6.111), (6.109) исчерпывают *все случаи,* когда *i, j, k* представляют собой тройку *различных* индексов из числа индексов 0, 1, 2, 3. В самом деле, задавшись индексами, например, 1, 2, 3 и написав соответствующее уравнение (6.109), сделаем в нем над индексами 1, 2, 3 какую-нибудь подстановку, в силу косой симметрии левая часть или не меняется или меняет лишь знак, и смысл уравнения не изменится. Если же среди индексов *i, j, k* имеются хотя бы два одинаковых, то в силу косой симметрии левой части (6.112) она тождественно обращается в нуль, и (6. 112) вместо уравнения дает тождество.

Таким образом, уравнения (6.111), (6.109) равносильны уравнениям (6. 112), рассматриваемым при всех комбинациях индексов.

Первая группа уравнений Максвелла в четырехмерном информационном пространстве событий записывается в виде дифференциальных уравнений (6. 112), *наложенных на тензорное поле* F_{ij}.

Теперь тензорный характер, а вместе с ним и инвариантность этих уравнений становятся очевидными. Действительно, в п. 3.8 мы выяснили, что в результате частного дифференцирования тензора поля по координатам точки получается поле нового тензора с добавочным ковариантным индексом. В нашем случае частные производные

$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}$ образуют трижды ковариантный тензор

$$F_{ijk} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k},$$

вследствие чего образуют тензор и величины

$$\Lambda_{ijk} = F_{ijk} + F_{jki} + F_{kij}.$$

Действительно, тензор Λ_{ijk} получается сложением трех трижды ковариантных тензоров (отличающихся друг от друга лишь круговыми подстановками индексов). Теперь уравнения (6.112) принимают вид

$$\Lambda_{ijk}=0$$

Но по характеру тензорного закона преобразования обращение тензора Λ_{ijk} (т. е. всех его координат) в нуль в одной координатной системе влечет то же самое и в любой другой координатной системе. Поэтому уравнения (6.112), установленные в одной координатной системе, будут справедливы и в любой другой. При этом можно брать не обязательно ортонормированные, но и любые аффинные координатные системы. Однако для нас важны именно ортонормированные системы, так как инвариантность при их преобразовании означает инвариантность при переходе от одной инерциальной системы S к любой другой S'.

Теперь займемся второй группой уравнений Максвелла (6.108). Перепишем их в развернутой форме:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho u_x$$

и еще два уравнения, получающихся из последнего круговой подстановкой x, y, z.

Пользуясь таблицей (6.100) и формулами (6.91), получаем:

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^3} = 4\pi s^0, \qquad (6.\ 113)$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x^3} = \frac{\partial F_{10}}{\partial x^0} + 4\pi s^1 \qquad (6.\ 114)$$

и еще два уравнения, получающихся в результате круговой подстановки 1, 2, 3. Перенося все производные в левую часть и пользуясь косой симметрией F_{ij}, можно написать вместо (6.114)

$$-\frac{\partial F_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} = 4\pi s^1 \qquad (6.115)$$

и еще два уравнения, получающихся из этого круговой подстановкой 1, 2, 3.

Итак, вторая группа уравнений Максвелла свелась к (6.113) и (6.115). Однако тензорный характер наших уравнений в этой записи еще неясен. Чтобы его обнаружить, нужно перейти к контравариантной записи тензора F_{ij}, подняв оба его индекса при помощи контравариантного метрического тензора g^{ij}:

$$F^{ij} = g^{ip}g^{jq}F_{pq}. \qquad (6.116)$$

Здесь по p и q происходит суммирование. Очевидно, косая симметрия сохранится и после поднятия индексов.

В самом деле, переставив индексы i, j в формуле (6.116), мы можем также поменять и обозначения индексов суммирования p, q, что не играет никакой роли для результата. Получим:

$$F^{ji} = g^{jq}g^{ip}F_{qp}.$$

Сравнивая с (6.116), получаем:

$$F^{ji} = -F^{ij},$$

так как $F_{qp} = -F_{pq}$.

В информационном пространстве событий для ортонормированного репера все координаты метрического тензора $g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ равны нулю кроме

$$g_{00} = -1, \quad g_{\lambda\lambda}=1 \quad (\lambda=1, 2, 3). \qquad (6.117)$$

Координаты контравариантного метрического тензора g^{ij} образуют матрицу, обратную матрице g_{ij}, следовательно, в данном случае просто с ней совпадающую:

$$g^{00} = -1, \quad g^{\lambda\lambda} = 1 \quad (\lambda = 1, 2, 3); \quad g^{ij} = 0 \ (i \neq j). \qquad (6.118)$$

Поэтому при суммировании по p, q в (6.116) следует сохранить лишь слагаемые, где $p = i$, $q=j$, и мы получаем:

$$F^{ij} = g^{ii}g^{jj}F_{ij} \quad \text{(без суммирования)}. \qquad (6.119)$$

Это значит, согласно (6.118), что если оба индекса i, j равны нулю или оба отличны от нуля, то $g^{ii}g^{jj}= 1$ и $F^{ij} = F_{ij}$; если же один из них нуль, а другой отличен от нуля, то $g^{ii}g^{jj} = -1$ и $F^{ij} = -F_{ij}$. Итак,

$$F^{00} = F_{00}, \quad F^{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu}, \quad F^{0\lambda} = -F_{0\lambda} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3). \qquad (6.120)$$

Перепишем теперь уравнение (6.113), заменяя $F_{\lambda 0}$ через $-F_{0\lambda}$, а затем через $F^{0\lambda}$:

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = 4\pi s^0. \qquad (6.121)$$

В уравнении (6.115) заменяем $-F_{10}$ через F^{10}; F_{12}, F_{13} заменяются просто через F^{12}, F^{13}. Получаем, присоединяя еще два уравнения, получающихся круговой подстановкой 1, 2, 3:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial F^{13}}{\partial x^3}=4\pi s^1,\\ \frac{\partial F^{20}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{23}}{\partial x^3}+\frac{\partial F^{21}}{\partial x^1}=4\pi s^2,\\ \frac{\partial F^{30}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial F^{32}}{\partial x^2}=4\pi s^3.\end{aligned}\right\} \tag{6.122}$$

Итак, вторая группа уравнений Максвелла сводится к (6.121), (6.122). Эти четыре уравнения можно объединить в тензорной записи:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}=4\pi s^i. \tag{6.123}$$

В левой части происходит суммирование по *j*. Легко проверить, что, действительно, при *i*=0, 1, 2, 3 мы получаем соответственно формулы (6.121) и (6.122). Для этого достаточно написать в каждом случае суммирование по *j* в развернутом виде, учитывая, что в каждой сумме выпадает один член, равный нулю (именно, при $j=i$, когда $F^{ii}=0$).

Так как частные производные дважды контравариантного тензора $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^k}$ образуют тензор дважды контравариантный и один раз ковариантный, то суммирование по *j* можно рассматривать как свертывание тензора $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^k}$ по второму верхнему и нижнему индексам. Но в результате свертывания тензора получается снова тензор, в нашем случае с одним верхним индексом *i*. Таким образом (6.123) означает равенство двух контравариантных тензоров 1-й валентности. Но такое равенство, справедливое в одной координатной системе, будет справедливо и в любой другой ввиду одинакового закона преобразования левой и правой частей. Тем самым, и вторая пара уравнений Максвелла имеет место в любой инерциальной системе *S*, если она имеет место в одной из них.

Таким образом, мы показали, как теория относительности выполняет свою основную задачу — обеспечить инвариантность уравнений Максвелла (6.112), (6.1123), т. е. *инвариантность законов электродинамики, установленную ранее на опыте.*

Из (6.123) и из кососимметричности F^{ij} легко следует, что

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i}=0,$$

т. е. четырехмерная дивергенция векторного поля s^i равна нулю. Физический смысл этого соотношения — закон сохранения заряда; приращение заряда в какой-либо трехмерной области ω, выделенной в какой-нибудь инерциальной системе *S*, всегда равно заряду, втекшему за то же время через границу П области ω (вывод совершенно такой же, как и в случае (6.160)).

Отметим без доказательства, что из уравнений (6.112) следует существование один раз ковариантного тензорного поля

$$f_i(x^0, \quad x^1, \ x^2, \ x^3),$$

такого, что

$$F_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j}. \tag{6.124}$$

Тензор f_i можно геометрически представить в виде вектора **f** с ковариантными координатами f_i, так что поле тензора f_i истолкуется как векторное поле **f**. *Вектор* **f** *называется четырехмерным потенциалом электромагнитного поля;* напряженность электромагнитного поля F_{ij} получается из него, как мы видим, операцией, сходной с построением ротора данного векторного поля в обычном пространстве. Но теперь дело происходит в четырехмерном пространстве, и мы получаем в результате не вектор, а бивектор (кососимметрический тензор) F_{ij}. Впрочем и в обычном пространстве при построении ротора мы получаем по существу сначала бивектор (кососимметрический аффинор), который уже затем условно переделываем в вектор, для чего используется трехмерный характер пространства.

Обратно, из формул (6.124) вытекают уравнения (6.112), в чем легко убедиться прямой проверкой.

Заметим еще, что четырехмерный потенциал f_i данного электромагнитного поля определяется неоднозначно: из вида формул (6.124) вытекает, что к f_i можно добавлять любой *градиентный тензор*

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

где φ — произвольное скалярное поле. Действительно, формулы (6.124) при этом не нарушаются.

Произвол в выборе четырехмерного потенциала существенно уменьшается, если на него наложить инвариантное добавочное условие

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^i} = 0. \tag{6.125}$$

Здесь по i происходит суммирование, так что нулю приравнивается инвариант, полученный полным свертыванием тензора $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$. Под f^i мы понимаем тензор, полученный поднятием индекса у тензора f_i, или, что то же, контравариантные координаты вектора **f**.

6.10. Тензор энергии-импульса

Допустим, что нас интересует информация распределения и движения энергии и импульса в пространстве и времени. Как мы далее увидим, для ее описания мы должны построить в четырехмерном информационном пространстве событий соответствующим образом подобранный дважды контравариантный симметрический тензор T^{ij} — *тензор энергии-импульса.*

Этот тензор задается в каждой точке информационного пространства событий, так что получается тензорное поле

$$T^{ij} = T^{ij}(M). \qquad (6.176)$$

Этим еще ничего не сказано о том, как тензор энергии-импульса строится и как он связан с распределением и движением энергии и импульса. Но мы начнем с рассмотрения *частного случая* тензора энергии-импульса, общее же его определение дадим потом.

1°. *Тензор энергии-импульса потока масс.* Рассмотрим поток масс так, как мы это делали в п. 6.7, и сохраняя все прежние обозначения.

В каждой точке *M* информационного пространства событий мы имеем мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ (6.85) к четырехмерной траектории потока и плотность покоя μ_0 (6.83):

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(M), \quad \mu_0 = \mu_0(M). \qquad (6.127)$$

Координаты τ^i вектора $\vec{\tau}$ образуют один раз контравариантный тензор. Перемножая этот тензор с самим собой и с инвариантом $c^2\mu_0$, мы получим симметрический дважды контравариантный тензор, который обозначим

$$T^{ij} = \mu_0 c^2 \tau^i \tau^j \qquad (6.128)$$

и будем называть *тензором энергии-импульса потока масс.* Что мы хотим сказать этим названием, станет ясным, если *рассмотреть координаты тензора T^{ij} в какой-либо ортонормированной системе x^0, x^1, x^2, x^3 и раскрыть их физический смысл с точки зрения соответствующей инерциальной системы S.* Подразумевается, что T^{ij} берутся в определенной точке информационного пространства событий, и соответственно их физический смысл истолковывается в определенный момент времени и в определенной точке обычного пространства (с точки зрения системы *S).*

Для этой цели нам будут нужны формулы (6.72), дающие связь между координатами τ^i и скоростью движения масс $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ относительно системы *S:*

$$\left.\begin{aligned} \tau^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad & \tau^1 &= \frac{u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ \tau^2 &= \frac{u_y}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad & \tau^3 &= \frac{u_z}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.129}$$

Кроме того, мы используем формулу (6.84):

$$\mu = \frac{\mu_0}{1-\frac{u^2}{c^2}}, \tag{6.130}$$

дающую связь между плотностью покоя μ_0 и плотностью μ с точки зрения S.

Вычисляем T^{00}:

$$T^{00} = \mu_0 c^2 \tau^0 \tau^0 = \frac{\mu_0 c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \mu c^2. \tag{6.131}$$

Так как μ есть плотность масс, то μc^2 *выражает, следовательно, плотность энергии в нашем потоке.* Здесь и в дальнейшем все физические величины измеряются относительно системы S. Вычисляем теперь $T^{01}= T^{10}$:

$$T^{01} = \mu_0 c^2 \tau^0 \tau^1 = \mu_0 c^2 \frac{u_x}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \mu u_x c.$$

Аналогичные выражения получаем и для T^{02}, T^{03}. В результате

$$T^{01} = \mu u_x c, \quad T^{02} = \mu u_y c, \quad T^{03} = \mu u_z c. \tag{6.132}$$

Физический смысл этого результата двоякий. Во-первых, раз плотность масс μ, а скорость их движения $\mathbf{u}(u_x, \ u_y, \ u_z)$, то *плотность импульса будет равна* $\mu\mathbf{u}$. Этим мы хотим сказать, что, умножая $\mu\mathbf{u}$ на элемент объема $d\omega$, мы получаем (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка) импульс, заключенный в $d\omega$. Действительно, $\mu d\omega$ дает, по определению плотности, массу, заключенную в $d\omega$, а следовательно, $\mu d\omega\mathbf{u}$ дает соответствующий импульс (пренебрегая в обоих случаях бесконечно малыми высшего порядка). Аналогично плотности проекций импульса на оси X, Y, Z будут равны:

$$\mu u_x, \ \mu u_y, \ \mu u_z. \tag{6.133}$$

Этим мы хотим сказать, что, умножая, например, μu_x на $d\omega$, мы получаем проекцию импульса, заключенного в $d\omega$, на ось X. Действительно, $\mu u_x d\omega$ есть проекция вектора $\mu d\omega\mathbf{u}$ на ось X.

Таким образом, координаты $T^{0\lambda}$ (λ=1, 2, 3) *совпадают с умноженными на с плотностями проекций импульса на оси X, Y, Z.*

Во-вторых, координатам $T^{0\lambda}$ можно дать такое истолкование. Пусть в данной точке помещена бесконечно малая площадка dS, направленная ортогонально к оси X. Назовем *плотностью потока энергии* в направлении оси X (в данной точке и в данный момент времени) количество энергии, протекшее через dS за бесконечно малый промежуток времени ε, *отнесенное к единице площади и к единице времени и взятое в пределе.* Этой плотности приписывается знак плюс, если энергия течет в положительную сторону оси, и минус — в противном случае. Так как плотность энергии μc^2, а движется она в направлении оси X со скоростью u_x, то плотность ее потока в этом направлении будет равна $\mu c^2 u_x$, как легко показать элементарным подсчетом. Аналогичным образом определяется и вычисляется плотность потока и любой другой физической величины, распределенной в пространстве и переносимой вместе с нашим потоком масс.

Итак, значения плотности потока энергии в направлениях координатных осей равны:

$$\mu c^2 u_x, \quad \mu c^2 u_y, \quad \mu c^2 u_z, \tag{6.134}$$

и следовательно, они совпадают с

$$cT^{01},\ cT^{02},\ cT^{03}. \tag{6.135}$$

В этом состоит второе истолкование координат $T^{0\lambda}$ (λ =1, 2, 3).

Для дальнейшего важно отметить следующий результат. *Вычисленный в данный момент t поток векторного поля* $\mu c^2 \mathbf{u}$ *через какую-нибудь (двустороннюю) поверхность* П *равен скорости* q^0 *протекания энергии через эту поверхность в этот же момент t:*

$$q^0 = \iint\limits_{\Pi} \mu c^2\, \mathbf{un}\, dS. \tag{6.136}$$

При этом q^0 мы называем скоростью протекания энергии через П в данный момент t, если *за бесконечно малый промежуток времени* ε, *начиная от данного момента t, количество энергии, протекшей через* П *в сторону* +**n**, *равно* εq^0 *(пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка).* Грубый вывод этого результата получается совершенно так же, как и в случае (4.276) с заменой лишь плотности жидкости ρ плотностью энергии μc^2. Правда, а случае (4.276) движение было стационарным, чего в данном случае не предполагается. Но для вывода это не играет роли, так как в нем рассматривается лишь бесконечно малый промежуток времени ε. Скорость протекания энергии через П q^0 будет в нашем случае, вообще говоря, зависеть от времени; в стационарном случае она будет постоянной.

В дальнейшем мы будем говорить о скорости протекания через поверхность П и пользоваться формулой (6.136) и для других физических величин совершенно аналогично тому, как сейчас мы делали это для энергии (предполагая, что эти величины тоже с известной плотностью распределены в пространстве и перемещаются вместе с нашим потоком масс).

Переходим теперь к истолкованию координат $T^{\lambda\mu}$ (λ, μ=1, 2, 3). Рассмотрим для примера T^{12}. Пользуясь (6.128), (6.129), (6.130), получаем:

$$T^{12} = \mu_0 c^2 \tau^1 \tau^2 = \mu_0 c^2 \frac{u_x u_y}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \mu u_x u_y. \tag{6.137}$$

Другие координаты $T^{\lambda\mu}$ имеют аналогичный вид. Рассмотрим те из них, для которых λ=1:

$$T^{11} = \mu u_x u_x, \quad T^{12} = \mu u_x u_y, \quad T^{13} = \mu u_x u_z. \tag{6.138}$$

Мы замечаем, что величины (6.138) получаются из μu_x, т.е. из *плотности проекции импульса на ось X,* последовательным умножением на u_x, u_y , u_z, т. е. совершенно аналогично тому, как величины (6.134) получаются из μc^2, т.е. из *плотности энергии.* Но величины (6.134) выражают плотность потока *энергии* в направлениях *X, Y, Z;* значит, (6.138) играют такую же роль для *проекции импульса на ось X.* Итак, *для проекции импульса на ось X плотность потока в направлении осей X, Y, Z будет* T^{11}, T^{12}, T^{13}. Для плотности потока проекций импульса на оси *Y, Z* такую же роль играют вторая и третья строки матрицы $T^{\lambda\mu}$. Все это можно получить и непосредственно, не ссылаясь на (6.134).

Рассмотрим теперь скорость протекания *проекции импульса на ось X* через какую-либо поверхность П. Аналогично (6.136) получаем, что эта скорость — обозначим ее q^1 — равняется вычисленному в данный момент потоку векторного поля $\mu u_x \mathbf{u}$ через поверхность П:

$$q^1 = \iint_{\Pi} \mu u_x \, \mathbf{un} \, dS. \tag{6.139}$$

Скорости протекания через П проекций импульса на ось *Y* и на ось *Z* выражаются аналогичными формулами:

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= \iint_{\Pi} \mu u_y \, \mathbf{un} \, dS, \\ q^3 &= \iint_{\Pi} \mu u_z \, \mathbf{un} \, dS. \end{aligned}\right\} \tag{6.140}$$

Формулы (6.136), (6.139), (6.140), которые вскоре нам понадобятся, мы объединим в общей записи. А именно, обозначая проекции **n** на оси *X, Y, Z*

$$n_x, n_y, n_z = n_1, n_2, n_3$$

и развертывая скалярное произведение

$$\mathbf{un} = u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3,$$

можно переписать эти формулы в следующем виде:

$$q^0 = \iint_{\Pi} \mu c^2 (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = c \iint_{\Pi} (T^{01} n_1 + T^{02} n_2 + T^{03} n_3)\, dS. \tag{6.141}$$

$$\left.\begin{aligned}
q^1 &= \iint_{\Pi} \mu u_x (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\
&\qquad = \iint_{\Pi} (T^{11} n_1 + T^{12} n_2 + T^{13} n_3)\, dS, \\
q^2 &= \iint_{\Pi} \mu u_y (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\
&\qquad = \iint_{\Pi} (T^{21} n_1 + T^{22} n_2 + T^{23} n_3)\, dS, \\
q^3 &= \iint_{\Pi} \mu u_z (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\
&\qquad = \iint_{\Pi} (T^{31} n_1 + T^{32} n_2 + T^{33} n_3)\, dS.
\end{aligned}\right\} \tag{6.142}$$

Мы воспользовались здесь формулами (6.132), (6.138) и им аналогичными.

Формулы (6.142) можно объединить:

$$q^{\nu} = \iint_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{\nu\lambda} n_{\lambda}\, dS \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{6.143}$$

Выясним теперь нашу общую установку в отношении тензора энергии-импульса. Мы рассмотрели тензор энергии-импульса, отвечающий потоку масс. Однако в дальнейшем мы будем считать, что и *всякому физическому процессу, протекающему в сплошной среде, отвечает в информационном пространстве событий определенный тензор энергии-импульса* $T^{ij}(M)$, *который имеет аналогичный физический смысл.*

А именно, если вычислить координаты T^{ij} в какой-либо ортонормированной координатной системе, то относительно соответствующей инерциальной системы *S* они будут представлять собой:

T^{00}—плотность энергии;

$T^{0\lambda}$ (λ = 1, 2, 3) — умноженную на *c* плотность проекции импульса на λ-ю ось или деленную на *c* плотность потока энергии в направлении λ-й оси;

$T^{\nu\lambda}$ (λ, ν=l, 2, 3) — плотность потока проекции импульса на ν-ю ось в направлении λ -й оси (или наоборот).

В этих формулировках оси *X, Y, Z* в системе *S* именуются 1-й, 2-й, 3-й осями. Из этого физического истолкования вытекает, в частности, что формулы (6.141), (6.142) остаются верными и для любого физического процесса.

Допущение о существовании тензора энергии-импульса у всякого физического процесса очень важно. Конечно, суть его не в том, что определенные физические величины обозначены в виде элементов симметрической матрицы, а в том, что они *предполагаются координатами дважды контравариантного тензора и, следовательно, имеют вполне определенный закон преобразования при переходе от одной инерциальной системы S к другой S':*

$$T^{i'j'} = A^{i'}_i A^{j'}_j T^{ij}.$$

Здесь $A^{i'}_i$ имеет тот же смысл, как и в (6.76). Таким образом, существо нашего допущения в том, что для любого физического процесса оно устанавливает закон преобразования плотности энергии, плотности импульса и плотности потока импульса при переходе от *S* к *S'*.

Какие имеются основания перенести тензорный характер этих величин, установленный для потока масс, на общий случай?

Математический вывод здесь дать затруднительно, но физические основания достаточно веские. Энергия и импульс способны переходить из одной формы в другую, например, из механической в электромагнитную, *количественно не меняясь.* Поэтому после такого перехода плотность энергии и плотность импульса должны преобразовываться от *S* к S' *по прежнему закону.* Правда, в действительности закон преобразования охватывает, кроме того, и плотности потока импульса. Все же естественно принять, что и этот усложненный закон преобразования не должен нарушаться, когда энергия и импульс переходят из одной формы в другую.

Рассмотрим теперь другой важный частный случай тензора энергии-импульса.

2°. *Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.* Пусть электромагнитное поле задано тензорным полем F_{ij} в информационном пространстве событий. Составим из тензора F_{ij} и метрического тензора g_{ij} новый тензор по следующей формуле:

$$T^{ij} = -\frac{g^{ij}}{16\pi} F^{pq} F_{pq} + \frac{1}{4\pi} F^{ip} F^{jq} g_{pq}. \tag{6.144}$$

По p и q происходит свертывание. Очевидно, тензор T^{ij} будет симметрическим и дважды контравариантным. Этот тензор и принимается за *тензор энергии-импульса электромагнитного поля.*

На первый взгляд кажется, что такой выбор тензора энергии-импульса является совершенно произвольным и ничем не обоснованным. Однако вскоре мы убедимся, что это не так; выбор именно этого выражения почти полностью продиктован законами сохранения энергии и импульса. Мы только не сможем излагать здесь все наводящие соображения и пойдем путем простой проверки.

Как было сказано, мы приписываем координатам тензора энергии-импульса определенный физический смысл. Это значит, что, выбрав для электромагнитного поля определенный тензор энергии-импульса, мы приписали тем самым электромагнитному полю определенное распределение и перемещение энергии и импульса. А это, разумеется, нужно сделать в соответствии с действительностью и прежде всего так, чтобы соблюдался закон сохранения энергии и импульса. При этом нужно учитывать, что энергия и импульс электромагнитного поля могут не только перемещаться, но и переходить в другую (механическую) форму. Мы увидим позже (п. 6.12), что выражение (6.144) подобрано действительно так, что оно удовлетворяет поставленным условиям. Чтобы увидеть конкретный смысл формул (6.144), запишем их в развернутом виде в ортонормированной координатной системе. При этом мы будем пользоваться таблицей (6.100) и соотношениями (6.120).

Вычислим сначала инвариант $F^{pq}F_{pq}$, т. е. сумму произведений соответствующих элементов матриц F^{pq} и F_{pq}. Эти элементы согласно (6.120) или равны или отличаются лишь знаком; последнее имеет место в случае $F^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$). Заменяя соответственно F^{pq} через $\pm F_{pq}$ и учитывая косую симметрию матрицы F_{pq}, получаем:

$$F^{pq}F_{pq} = 2\left(-F_{01}^2 - F_{02}^2 - F_{03}^2 + F_{12}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2\right) = \\ = 2\left(-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2\right) = 2\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right). \tag{6.145}$$

Далее, учитывая, что

$$g_{00} = -1, \quad g_{\lambda\lambda} = 1, \quad g_{pq} = 0 \quad (p \neq q),$$

получим

$$F^{ip}F^{jq}g_{pq} = -F^{i0}F^{j0} + \sum_{\lambda=1}^{3} F^{i\lambda}F^{j\lambda}. \tag{6.146}$$

В частности,

$$F^{0p}F^{0q}g_{pq} = \sum_{\lambda=1}^{3} (F^{0\lambda})^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = \mathbf{E}^2, \tag{6.147}$$

$$F^{0p}F^{1q}g_{pq} = \sum_{\lambda=1}^{3} F^{0\lambda}F^{1\lambda} = E_yH_z - E_zH_y. \tag{6.148}$$

Вычисляем теперь T^{00} из (6.144), пользуясь (6.145) и (6.147), а также учитывая, что g^{00} =—1:

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}^2 = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2). \tag{6.149}$$

Такой вид имеет, следовательно, *плотность энергии электромагнитного поля.* Далее, находим T^{01}, T^{02}, T^{03}, пользуясь (6.144) и (6.148) и учитывая, что $g^{ij}=0$ $(i\neq j)$, в частности, $g^{01} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} T^{01} &= \frac{1}{4\pi}(E_yH_z - E_zH_y), \\ T^{02} &= \frac{1}{4\pi}(E_zH_x - E_xH_z), \\ T^{03} &= \frac{1}{4\pi}(E_xH_y - E_yH_x). \end{aligned}\right\} \tag{6.150}$$

Таким образом, проекции вектора $\frac{1}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ на координатные оси *X*, *Y*, Z совпадают с T^{01}, T^{02}, T^{03}. Согласно физическому смыслу этих величин вектор $\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]$ дает *плотность импульса электромагнитного поля,* а вектор $\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ —*плотность потока энергии электромагнитного поля.* Проекции последнего вектора на оси *X*, *Y*, *Z* дают плотности потока энергии в направлениях этих осей.

Аналогичным образом можно было бы вычислить и плотности потока импульса.

3°. Рассмотрим еще пример, хотя и не столь общего значения, как первые два. Пусть в инерциальной системе *S покоится* тело, находящееся в напряженком состоянии, возникшем, например, в результате упругой деформации. Ввиду того, что тело покоится, плотность импульса равна нулю:

$$T^{0\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1,\ 2,\ 3).$$

Матрица T^{ij} состоит по существу из элемента T^{00} (плотности энергии) и из матрицы третьего порядка $T^{\nu\lambda}$ $(\nu,\ \lambda = 1, 2,\ 3)$.

Оказывается, что в нашем примере эта *часть тензора энергии-импульса лишь знаком отличается от трехмерного тензора напряжений* $f_{\nu\lambda}$. В самом деле, в произвольной точке рассматриваемого тела установим бесконечно малую площадку *dS,* ортогональную к оси *X.* Тогда на единицу площади этой площадки согласно (4.253) действует сила

$$\mathbf{P}(f_{11}, f_{12}, f_{13}), \tag{6.151}$$

а на всю площадку — сила $\mathbf{P}dS(f_{11}dS, f_{12}dS, f_{13}dS)$. Точнее, эта сила действует через площадку на часть тела, расположенную за площадкой (т. е. в сторону — *X).* За время ε этой части тела будет сообщен тем самым импульс

$$\mathbf{P}dS(f_{11}dS\,\varepsilon, f_{12}dS\,\varepsilon, f_{13}dS\,\varepsilon),$$

который, таким образом, протек через площадку в сторону — *X.* Чтобы установить *плотность потока импульса* в направлении —*X,* достаточно отнести протекший импульс к единице площади и к единице времени, т.е. поделить на *dS* и ε. Получаем снова (6.151). Таким образом, напряжения f_{11}, f_{12}, f_{13} равны плотностям потока трех проекций импульса в направлении —*X,* а следовательно, лишь знаком отличаются от T^{11}, T^{12}, T^{13}, которые выражают то же самое, но в направлении +*X.* Это же справедливо и для других координатных осей, так что окончательно

$$T^{\nu\lambda} = -f_{\nu\lambda}\ (\nu,\ \lambda = 1, 2, 3). \tag{6.152}$$

Мы предполагали в этом рассуждении, что, кроме напряжений в теле, нет других причин для появления потока импульса.

Если перейти в другую инерциальную систему *S',* то тензор энергии-импульса пересчитывается по закону (6.145). Как отсюда можно заключить, на плотность энергии и импульса, наблюдаемых в системе *S',* имеет влияние не только плотность энергии, наблюдавшаяся в системе *S* (плотность импульса была равна нулю), *но и напряжения, наблюдавшиеся в системе S.* Если в системе *S* покоятся два тела с одинаковой плотностью энергии (и нулевой плотностью импульса), но одно находящееся в напряженном состоянии, а другое нет, то в системе *S'* они будут обладать различными (вообще говоря) плотностями энергии и импульса.

Таким образом, объединение плотностей энергии, импульса и потока импульса в один четырехмерный тензор не является лишь формальностью; совокупность этих величин образует единую физическую сущность, и это проявляется в том, что одни из них способны «переходить» в другие, когда мы меняем инерциальную систему.

6.11. Закон сохранения энергии и импульса

В этом пункте мы рассмотрим вопрос, каким образом обеспечиваются законы сохранения энергии и импульса, когда распределение и перемещение энергии и импульса задается тензором T^{ij}. Будем вести рассмотрение относительно какой-либо инерциальной системы S, пользуясь соответствующими ей ортонормированными координатами x^i в информационном пространстве событий. Выделим покоящуюся относительно системы S трехмерную область ω, ограниченную поверхностью П. Будем наблюдать втекание и вытекание энергии через поверхность П, причем говорить будем только о вытекании (втекание оцениваем как отрицательное вытекание). Согласно (6.141) скорость этого вытекания будет равна:

$$q^0 = c \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{0\lambda} n_\lambda \, dS. \tag{6.153}$$

Преобразуем это выражение по теореме Остроградского (4.282):

$$q^0 = c \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^\lambda} d\omega. \tag{6.154}$$

За бесконечно малый промежуток времени ε количество вытекшей через П энергии будет равно:

$$q^0 \varepsilon = \varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^\lambda} d\omega. \tag{6.155}$$

Здесь и в дальнейшем бесконечно малыми высшего порядка мы пренебрегаем. С другой стороны, увеличение количества энергии в области ω за время ε можно подсчитать следующим образом. Общее количество энергии в пределах области ω выражается в каждый момент времени t интегралом

$$\iiint\limits_{\omega} T^{00} \, d\omega, \tag{6.156}$$

так как T^{00} есть плотность энергии. При этом не нужно забывать, что тензор энергии импульса T^{ij} образует поле в информационном пространстве событий, так что, в частности, T^{00} есть функция от x^i, т. е. от x, y, z и времени t. Но по x, y, z в (6.156) произведено интегрирование, так что интеграл есть функция только от времени t. Увеличение количества энергии за время ε можно подсчитать как дифференциал этой функции:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \iiint_{\omega} T^{00}\, d\omega = \varepsilon \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{00}}{\partial t}\, d\omega. \tag{6.157}$$

Таким образом, за время ε внутри области ω появилось дополнительное количество энергии (6.157), и еще некоторое количество энергии (6.155) вытекло за пределы области. Складывая эти два выражения, мы получаем *то количество энергии, которое возникло за время* ε *внутри области* ω:

$$\varepsilon c \iiint_{\omega} \left(\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial T^{00}}{c\, \partial t} \right) d\omega. \tag{6.158}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = \frac{\partial T^{00}}{\partial x^{0}},$$

так как $ct = x^0$, получаем окончательно:

$$\varepsilon c \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^{j}}\, d\omega, \tag{6.159}$$

где под знаком интеграла происходит суммирование по j=0, 1, 2, 3. Спрашивается, каким образом возникла энергия (6.159)?

Если рассматриваемый нами тензор энергии-импульса является *частичным,* т. е. связан с одним лишь видом явлений (например, электромагнитным полем), то такое возникновение энергии *данного вида* возможно за счет исчезновения энергии *другого вида* (например, механической) и означает лишь переход одного вида энергии в другой. Если же T^{ij} есть *полный* тензор энергии-импульса, т. е. исчерпывает всю картину *распределения и перемещения энергии-импульса,* то посторонние источники энергии отсутствуют и *количество возникшей энергии* (6.159) *должно всегда равняться нулю (закон сохранения энергии).*

Итак, в случае *полного тензора энергии-импульса*

$$\varepsilon c \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^{j}}\, d\omega = 0$$

при любом выборе области ω и в любой момент времени. Это возможно только в случае тождественного обращения в нуль подынтегрального выражения

$$\frac{\partial T^{0j}}{\partial x^{j}} = 0. \tag{6.160}$$

Так записывается закон сохранения энергии с точки зрения данной инерциальной системы S.

То, что сделано сейчас для *энергии,* мы дословно повторим для импульса. Согласно (6.143) скорость вытекания v-й проекции импульса через поверхность П, ограничивающую область ω, выражается формулой

$$q^{\nu} = \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{\nu\lambda} n_{\lambda}\, dS = \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\, d\omega.$$

Последнее выражение получено по теореме Остроградского. Следовательно, скорость вытекания самого импульса равна:

$$\sum_{\nu=1}^{3} q^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\, d\omega.$$

За бесконечно малое время ε через П вытечет импульс

$$\varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} q^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\, d\omega. \tag{6.161}$$

С другой стороны, импульс, заключенный в ω в данный момент времени *t,* равен:

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} T^{\nu 0}\, d\omega,$$

так как v-я проекция плотности импульса (v= 1, 2, 3) равна $\frac{1}{c}T^{\nu 0}$,

а значит, сама плотность импульса имеет вид $\frac{1}{c}\sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} T^{\nu 0}$.

Увеличение импульса в области ω за время ε можно подсчитать аналогично (6.157). Получаем:

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} T^{\nu 0}\, d\omega\right) = \frac{\varepsilon}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu 0}}{\partial t}\, d\omega = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu 0}}{\partial x^{0}}\, d\omega. \tag{6.162}$$

Объединяя (6.161) и (6.162), т. е. импульс, вытекший через П, и импульс, дополнительно обнаруженный в ω, получаем *общее количество импульса, возникшего в области* ω *за время* ε*:*

$$\varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^{j}}\, d\omega. \tag{6.163}$$

Здесь по j=0, 1, 2, 3 происходит суммирование. Как и в случае энергии, возникший в области ω импульс (6.163) может быть отличен от нуля, только если T^{ij} — частичный тензор энергии-импульса и речь идет об импульсе частного вида. Если же T^{ij} — полный тензор энергии-импульса, то импульс, возникший в области ω, должен равняться нулю (закон сохранения импульса). Мы получаем, следовательно:

$$\sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j}\, d\omega = 0.$$

Отсюда коэффициенты при $\mathbf{e}_\nu$ по отдельности равны нулю:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j} = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3).$$

А так как это равенство верно для любой области ω и любого момента времени t, то подынтегральное выражение тождественно равно нулю:

$$\frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j} = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{6.164}$$

Так выглядит *закон сохранения импульса* с точки зрения инерциальной системы S. Объединяя его с законом сохранения энергии (6.160), пишем:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{6.165}$$

В этой форме закон *сохранения энергии-импульса имеет вид инвариантного тензорного соотношения в информационном пространстве событий.*

В самом деле, совокупность частных производных $\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}$ для любого дважды контравариантного тензорного поля T^{ij} образует, как мы знаем, поле тензора, дважды контравариантного и один раз ковариантного. Тогда $\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}$, где по j происходит свертывание, дает снова тензор (один раз контравариантный), который мы обозначим T^i:

$$T^i = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}. \tag{6.166}$$

Этот тензор естественно назвать *дивергенцией тензора* T^{ij} *в четырехмерном информационном пространстве событий.* Теперь (6.165) принимает вид

$$T^{i} = 0. \quad (6.167)$$

Таким образом, закон сохранения энергии-импульса записывается в виде обращения в нуль дивергенции полного тензора энергии-импульса. Ясно, что если координаты тензора T^{i} равны нулю в одной координатной системе, то то же имеет место и в любой другой. Поэтому и закон сохранения энергии-импульса имеет инвариантный характер и, будучи установлен в одной инерциальной системе S, соблюдается и в любой другой S'. Закон сохранения энергии-импульса (6.165), как мы видим, накладывает существенное ограничение на допустимый выбор полного тензора энергии-импульса. Если тензор энергии-импульса является частичным, то его дивергенция T^{i} не обязана обращаться в нуль.

6.12. Дивергенция тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Пусть теперь T^{ij} является *частичным* тензором энергии-импульса, а именно, отвечает электромагнитному полю согласно (6.144):

$$T^{ij} = -\frac{g^{ij}}{16\pi} F^{pq} F_{pq} + \frac{1}{4\pi} F^{ip} F^{jq} g_{pq}. \quad (6.168)$$

Тогда в области ω за время, ε возникают (за счет перехода из других форм) некоторые количества энергии и импульса электромагнитного поля, которые выражаются согласно (6.159) и (6.163). Пользуясь дивергенцией тензора энергии-импульса (6.166), эти выражения энергии и импульса можно переписать в виде

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} T^{0}\, d\omega, \quad \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} T^{\nu}\, d\omega. \quad (6.169)$$

Подсчитаем теперь дивергенцию тензора (6.168). Заметим предварительно, что при дифференцировании выражения $F^{pq}F_{pq}$ можно дифференцировать лишь второй множитель и затем результат удваивать. В самом деле, дифференцирование первого множителя дает тот же результат, что и дифференцирование второго

$$\frac{\partial F^{pq}}{\partial x^{k}} F_{pq} = F^{pq} \frac{\partial F_{pq}}{\partial x^{k}}. \quad (6.170)$$

Чтобы убедиться в этом, выражаем F^{pq} как результат поднятия индексов у F_{if}:

$$F^{pq} = g^{pi} g^{qj} F_{ij}$$

и вставляем в обе части проверяемого равенства (6.170). Получим (учитывая, что g_{ij} и g^{ij} — константы):

$$g^{pi}g^{qj}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}F_{pq}=g^{pi}g^{qj}F_{ij}\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^k},$$

а это — тождество, в чем легко убедиться, переставляя в одной из частей равенства обозначения индексов суммирования *p, i* и *q*, *j*. Теперь вычисляем дивергенцию:

$$T^i=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}=$$
$$=-\frac{g^{ij}}{16\pi}\cdot 2F^{pq}\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ip}}{\partial x^j}F^{jq}g_{pq}+\frac{1}{4\pi}F^{ip}\frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j}g_{pq}. \tag{6.171}$$

Полученное выражение можно значительно упростить. В первом члене мы заменяем множитель $\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}$, пользуясь уравнениями Максвелла (6.112):

$$\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}=-\frac{\partial F_{qj}}{\partial x^p}-\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}. \tag{6.172}$$

Получаем:

$$-\frac{g^{ij}}{16\pi}\cdot 2F^{pq}\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}=\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{qj}}{\partial x^p}+\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}. \tag{6.173}$$

Оба слагаемых здесь равны, в чем легко убедиться, заменяя в первом из них обозначения индексов суммирования *p* на *q*, и наоборот. Тогда первое слагаемое примет вид

$$\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{qp}\frac{\partial F_{pj}}{\partial x^q}$$

и совпадет со вторым (так как перестановка индексов у F^{pq}, F_{jp} дважды меняет знак выражения). Поэтому в (6.173) мы сохраняем лишь удвоенное второе слагаемое и, подставляя в (6.171), получаем:

$$T^i=\frac{g^{ij}}{4\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ip}}{\partial x^j}F^{jq}g_{pq}+\frac{1}{4\pi}F^{ip}\frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j}g_{pq}. \tag{6.174}$$

Первые два члена в правой части взаимно уничтожаются. Действительно, в первом члене происходит поднятие первого индекса у F_{jp}, так что его можно переписать в виде

$$\frac{1}{4\pi}F^{pq}\frac{\partial F^{i\cdot}_{\cdot p}}{\partial x^q}.$$

Во втором члене происходит опусканле второго индекса у F^{ip}, так что этот член принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{i\cdot}_{\cdot q}}{\partial x^j}F^{jq}.$$

Заменяя здесь обозначения индексов суммирования *q, j* на *p, q*, убеждаемся, что это выражение отличается от предыдущего лишь знаком (так как $F^{qp} = - F^{pq}$).

Итак, (6.174) принимает вид

$$T^i = \frac{1}{4\pi}F^{ip}\frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j}g_{pq}. \tag{6.175}$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла (6.123):

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 4\pi s^i \quad \left(\text{а следовательно, } \frac{\partial F^{ji}}{\partial x^j} = -4\pi s^i\right).$$

Теперь (6.175) дает окончательно

$$T^i = -F^{ip}s^q g_{pq}. \tag{6.176}$$

Выясним физический смысл тензора T^i с точки зрения какой-либо инерциальной системы *S*, рассматривая координаты T^i в соответствующей ортонормированной координатной системе x^i (заметим, что все тензоры и тензорные соотношения, которые у нас встречаются, можно рассматривать в любой аффинной координатной системе, но физическое истолкование они получают лишь в ортонормированных системах). Тогда $g_{00} = -1$, $g_{\lambda\lambda}=1$ (λ=1, 2, 3), остальные $g_{pq} = 0$, так что (6.176) приобретает вид

$$T^i = F^{i0}s^0 - F^{i1}s^1 - F^{i2}s^2 - F^{i3}s^3. \tag{6.177}$$

Пользуясь таблицей (6.100) и соотношениями (6.120), получаем:

$$\left.\begin{aligned} &F^{10} = -E_x, \quad F^{20} = -E_y, \quad F^{30} = -E_z, \\ &F^{12} = H_z, \qquad E^{23} = H_x, \qquad F^{31} = H_y. \end{aligned}\right\} \tag{6.178}$$

При этом $F^{ii} = 0$ и $F^{ji} = -F^{ij}$. Кроме того, согласно (6.91)

$$s^0 = \rho, \quad s^1 = \rho\frac{u_x}{c}, \quad s^2 = \rho\frac{u_y}{c}, \quad s^3 = \rho\frac{u_z}{c}. \tag{6.179}$$

Теперь окончательно подсчитываем T^i при i = 0, 1, 2, 3:

$$\left.\begin{aligned} &T^0 = -\frac{\rho}{c}(E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z) = -\frac{\rho}{c}\mathbf{uE}, \\ &T^1 = -\frac{\rho}{c}(cE_x + H_z u_y - H_y u_z) \end{aligned}\right\} \tag{6.180}$$

к далее круговой подстановкой *x, y, z*. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\nu=1}^{3} T^\nu \mathbf{e}_\nu = -\rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uH}]\right). \tag{6.181}$$

Здесь ρ есть плотность заряда, а **u** —скорость его движения.

Подсчитаем теперь первое из выражений (6.169):

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} T^0\, d\omega = - \iiint\limits_{\omega} \varepsilon \mathbf{u}\mathbf{E}\rho\, d\omega. \tag{6.182}$$

Так как ρ *d*ω — заряд, заключенный в элемент объема *d*ω*,* то **E**ρ *d*ω — сила электрического поля, действующая на этот заряд; ε**u** — вектор бесконечно малого смещения за время ε; следовательно, стоящее под знаком интеграла скалярное произведение дает работу, совершаемую электромагнитным полем над элементом заряда за время ε (магнитное поле работы не производит). Сам же интеграл в правой части означает *работу, произведенную электромагнитным полем в пределах области* ω *за время* ε *над частицами, несущими электрические заряды.* Эта работа идет на приращение механической энергии частиц. Но так как правая часть (6.182) содержит интеграл с обратным знаком, то она выражает *убыль* механической энергии частиц.

Окончательно, равенство (6.182) означает, что *возникновение энергии в электромагнитном поле (левая часть) происходит за счет убыли такого же количества механической энергии заряженных частиц (правая часть).*

Таким образом, во взаимоотношениях электромагнитного поля и движущихся в нем заряженных частиц *соблюдается закон сохранения энергии.*

Теперь подсчитаем второе выражение (6.169), пользуясь соотношением (6.181):

$$\varepsilon \iiint\limits_{\omega} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu T^\nu\, d\omega = - \iiint\limits_{\omega} \varepsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}] \right) \rho\, d\omega. \tag{6.183}$$

В круглых скобках стоит сила, действующая в электромагнитном поле на единицу заряда, движущегося со скоростью **u**; после умножения на элемент заряда ρ *d*ω получаем действующую на него силу, а после умножения на ε — импульс, который сообщается электромагнитным полем элементу заряда за время ε. Сам же интеграл в правой части означает, следовательно, *механический импульс, сообщенный электромагнитным полем в пределах области* ω *за время* ω *частицам, несущим электрические заряды.* Так как правая часть (6.183) содержит интеграл с обратным знаком, то она выражает *убыль* механического импульса частиц.

Окончательно смысл равенства (6.183) состоит в том, что *возникновение импульса электромагнитного поля (левая часть) происходит* *за счет убыли такого же количества механического импульса заряженных частиц.* Таким образом, в балансе электромагнитного и механического импульса соблюдается закон сохранения импульса.

Напомним, что мы говорили до сих пор об энергии, импульсе и потоке энергии и импульса в электромагнитном поле, *предполагая,* что его тензор энергии-импульса имеет вид (6.168). Лишь теперь это предположение оправдано в том смысле, что оно правильно описывает переход энергии и импульса из электромагнитной формы в механическую и обратно: закон сохранения энергии-импульса при этом соблюдается.

7. Информационное многообразие

До сих пор мы рассматривали n-мерные аффинные и евклидовы информационные пространства лишь в аффинных координатах, т. е. таких, которые наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами этих пространств.

В этом разделе будем продолжать заниматься теми же пространствами, но уже с более широкой точки зрения — относя их к произвольным криволинейным координатам. Это играет роль и для изучения самих этих пространств (например, для изучения криволинейных информационных образов в них), однако главное назначение этого раздела — служить переходным этапом к *информационным пространствам аффинной связности* (обобщение аффинного информационного пространства) и к *римановым информационным пространствам* (обобщение евклидова информационного пространства).

7.1. Криволинейные координаты в аффинном информационном пространстве

Имея аффинный репер (O, $\mathbf{e}_1$, ...,$\mathbf{e}_n$) в n-мерном аффинном информационном пространстве, мы относили каждой точке M координаты x^i, разлагая ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам репера

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{7.1}$$

От одной аффинной координатной системы к другой мы переходили линейным преобразованием

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}, \tag{7.2}$$

где коэффициенты выбираются произвольно с единственным условием

$$\mathrm{Det}\,|A_i^{i'}| \neq 0.$$

При этом новые векторы репера разлагались по старым векторам

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_i, \tag{7.3}$$

где $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$ — взаимно обратные матрицы, а координаты *инвариантного* вектора **x** испытывали преобразование

$$x^{i'} = A_i^{i'}x^i. \tag{7.4}$$

Мы введем криволинейные координаты, обобщая преобразование координат (7.2), а именно, заменяя в правой части линейные функции координат x^i их «произвольными» функциями с известными ограничениями.

Но сначала дадим некоторые определения.

Арифметическим информационным пространством n измерений называется множество всевозможных последовательностей вида $(x^1, x^2, ..., x^n)$, где $x^1, x^2, ..., x^n$ — произвольные вещественные числа; отдельные последовательности $(x^1, x^2, ..., x^n)$ называются *точками* арифметического информационного пространства, а числа $x^1, x^2, ..., x^n$ — *координатами* точек.

Областью (открытым множеством) в арифметическом информационном пространстве называется такое множество его точек, что вместе с каждой своей точкой $x=(x^1, x^2, ..., x^n)$ оно содержит и любую точку $y = (y^1, ..., y^n)$, для которой

$$|y^i - x^i| < \delta \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где δ — некоторое положительное число (выбор которого зависит от точки x).

Иными словами, область характеризуется тем, что вместе с каждой своей точкой она обязательно содержит и охватывающий эту точку многомерный куб, если только этот куб имеет достаточно малые размеры. Вместо куба можно брать (многомерный) шар и т. п.

Пусть $x^1, ..., x^n$ — независимые переменные, и пусть системы значений, которые они способны принимать, образуют область в арифметическом информационном пространстве; тогда эту область мы будем называть областью изменения переменных $x^1, ..., x^n$.

Множество Ω точек *n*-мерного аффинного информационного пространства мы назовем областью, если последовательность $(x^1, ..., x^n)$ аффинных координат точки $M \in \Omega$ описывает область в арифметическом информационном пространстве.

Нетрудно показать, что смысл этого определения не меняется при переходе к другой аффинной системе координат, хотя область в арифметическом информационном пространстве становится иной.

Мы будем обычно предполагать, что рассматриваемые области являются связными, т. е. что любые две точки области: *$a = (a^1,\dots,a^n)$, $b = (b^1,\dots,b^n)$* —могут быть соединены непрерывным путем, проходящим по области: $x^i = f^i(t)$ $(0 \le t \le 1)$; $f^i(0) = a^i$, $f^i(1) = — b^i$, где $f^i(t)$ — непрерывные функции.

Пусть в некоторой п-мерной связной области Ω *аффинного информационного пространства заданы п непрерывно дифференцируемых однозначных функций аффинных координат $f_k(x^1,\dots,x^n)$ $(k = 1,\dots,n)$. Введем новые переменные $x^{1'}, x^{2'},\dots,x^{n'}$ посредством уравнений*

$$x^{i'} = f_i(x^1,\dots,x^n); \tag{7.5}$$

пусть они пробегают область изменения Ω'. *Мы наложим, далее, на функции f_i требование, чтобы преобразование* (7.5) *было обратимым, точнее, чтобы, из уравнений* (7.5) *можно было бы, обратно, однозначно выразить x^i как непрерывно дифференцируемые функции от $x^{i'}$:*

$$x^i = g_i(x^{1'}, x^{2'},\dots,x^{n'}) \tag{7.6}$$

во всей области Ω' изменения переменных $x^{i'}$.

В этом случае переменные $x^{i'}$ мы будем называть *криволинейными координатами в области* Ω *аффинного информационного пространства. Коротко говоря, переменные $x^{i'}$ с областью изменения* Ω' *называются криволинейными координатами в области* Ω, *если они связаны с аффинными координатами в области* Ω *обратимым и в обе стороны однозначным и непрерывно дифференцируемым преобразованием.*

Тем самым, в частности, системы значений $x^{1'},\dots,x^{n'}$ из области Ω' взаимно однозначно отвечают точкам области Ω, что и оправдывает название *координат* для переменных $x^{i'}$. Область Ω может, в частности, совпадать и со всем пространством, но это для нас мало существенно и вот почему. Дальнейшие исследования будут носить большей частью дифференциально информационный характер, т. е. относиться к бесконечно малой окрестности точки, а для этого достаточно иметь координатную систему $x^{i'}$ в некоторой области Ω, содержащей эту точку.

Мы предположили, что функции f_i, g_i непрерывно дифференцируемы, т. е. имеют непрерывные частные производные до некоторого порядка N включительно. При этом в п.7.1, 7.2 ограничимся N=1, а начиная с п. 7.3 и до конца раздела, мы будем предполагать N=2. Позже понадобится N=3 и больше. Мы не будем в каждом случае оговаривать это особо, а просто факт записи производных данного порядка будет означать предположение о существовании и непрерывности этих производных. Значение $N=\infty$ также допустимо (когда рассматриваемые функции имеют непрерывные производные любого порядка).

Важно отметить, что якобианы обоих преобразований — прямого и обратного — отличны от нуля:

$$\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right|\neq 0,\quad \operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\right|\neq 0, \tag{7.7}$$

причем соответствующие матрицы взаимно обратные. Это легко получить, рассматривая x^i как сложную функцию от x^1, ..., x^n: x^i зависит от $x^{1'}$, ..., $x^{n'}$ согласно (7.6), а эти переменные зависят от $x^1, \ldots, x^n$ в силу (7.5). Тогда частная производная от x^i по одному из аргументов x^1, ..., x^n вычисляется по известному правилу:

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j}}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{j}}\quad (\text{по } k' \text{— суммирование}).$$

Но, с другой стороны, производная от одного аргумента по другому равна нулю, если аргументы различные, и равна единице, если они совпадают:

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j}}=\delta^{i}_{j}.$$

Итак,

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{j}}=\delta^{i}_{j}, \tag{7.8}$$

т. е. произведение матриц

$$\left\|\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\right\| \text{ и } \left\|\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{j}}\right\|$$

дает единичную матрицу.

Таким образом, эти матрицы, взаимно обратные и тем самым неособенные.

Заметим, что если бы мы откинули условие обратимости (7.6), а потребовали бы вместо него необращение в нуль якобиана

$$\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right|\neq 0, \tag{7.9}$$

то мы не достигли бы нашей цели. Если даже условие (7.9) соблюдается во всей области Ω, то это гарантирует однозначную обратимость лишь в некоторой окрестности каждой точки области, но не во всей области Ω в целом. Так, например, пусть область Ω (в трехмерном случае) имеет вид распухшей буквы *С*, причем отображение на область Ω' состоит в том, что Ω сдавливается в вертикальном направлении, так что просвет справа исчезает, и отросток, спускающийся сверху, входит в отросток, поднимающийся снизу. Такое отображение Ω на Ω' уже не будет *взаимно* однозначным, хотя при этом всегда можно обеспечить условие (7.9) и взаимную однозначность в *малом.*

Переход от одной криволинейной системы координат $x^{i'}$ к другой $x^{i''}$ в той же области Ω удовлетворяет тем же условиям, что и переход от аффинных координат x^i Ω' криволинейным $x^{i'}$.

В самом деле, согласно нашим требованиям $x^{i''}$ суть непрерывно дифференцируемые функции от x^i, а x^i — от $x^{i'}$, так что $x^{i''}$ оказываются непрерывно дифференцируемыми функциями от $x^{i'}$, и обратно; Ω', область изменения $x^{i'}$, и Ω'', область изменения $x^{i''}$, будут находиться во взаимно однозначном соответствии.

Ясно также, что если от криволинейных координат $x^{i'}$ (с областью изменения Ω'*)* перейти к новым переменным $x^{i''}$ (с областью изменения Ω'') при помощи обратимого и в обе стороны непрерывно дифференцируемого преобразования, то $x^{i''}$ будут тоже служить криволинейными координатами в той же области Ω. Действительно, переменные $x^{i''}$ посредством координат $x^{i'}$ будут связаны с аффинными координатами x^i обратимым и в обе стороны непрерывно дифференцируемым преобразованием, а именно в этом случае мы и называем $x^{i''}$ криволинейными координатами в данной области. Во всех этих формулировках имеется в виду непрерывная дифференцируемость того же порядка, что и в определении криволинейных координат.

В случае обычного евклидова информационного пространства простейшими примерами криволинейных координат могут служить цилиндрические и полярные координаты. Заметим, что, желая обеспечить *взаимно* однозначный характер их соответствия с точками, мы должны рассматривать их не во всем пространстве, а в области Ω, полученной удалением из пространства одной полуплоскости, краем которой служит ось Z (при обычном расположении чертежа), причем ось Z удаляется тоже.

Выражая в формуле (7.1) x^i через $x^{i'}$, мы получаем зависимость радиуса-вектора точки *M* от ее криволинейных координат:

$$\overrightarrow{OM} = g_1(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_1 + \ldots + g_n(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_n. \qquad (7.10)$$

Обозначая кратко $\overrightarrow{OM}$ через **x**, мы будем писать:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^{1'}, \ldots, x^{n'}). \qquad (7.11)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций g_i эта векторная функция будет такое же число раз непрерывно дифференцируемой согласно п. 6.4. Правда, там мы дифференцировали вектор по единственному аргументу и один раз, но для частных производных и притом любого порядка все рассуждения повторяются дословно. Отметим еще — это для нас будет важно,— что частные производные

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{1'}}, \ \ldots, \ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{n'}}$$

будут в каждой точке *линейно независимыми векторами.* Действительно, дифференцируя (7.10) по $x^{i'}$, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_n \quad (i' = 1', \ 2', \ \ldots, \ n'). \tag{75.12}$$

Матрица коэффициентов

$$\left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right\|$$

неособенная, следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial x^{i'}}$$

линейно независимы.

7.2. Тензоры в криволинейных координатах

Мы будем рассматривать область Ω аффинного информационного пространства, отнесенную к криволинейным координатам x^i (сейчас мы обозначаем их без штрихов). Радиус-вектор **x** произвольной точки *M* области Ω, отсчитываемый от фиксированной точки *O*, будет выражаться согласно (7.11) функцией

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, \ \ldots, x^n), \tag{7.12}$$

достаточное число раз непрерывно дифференцируемой (для этого пункта довольно одного раза). В дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые точки принадлежат области Ω.

Для ориентации в строении данной координатной системы весьма полезны *координатные линии.* Так мы будем называть кривые, вдоль которых меняется лишь одна из координат x^i, а остальные остаются постоянными. Рассмотрим, например, координатную линию x^1. Это значит, что $x^2, \ldots, x^n$ закреплены на постоянных значениях, так что радиус-вектор **x** (7.12) остается функцией одного лишь x^1; мы получаем кривую, отнесенную к параметру x^1.

Через каждую точку *M* пройдет одна и только одна координатная линия x^1, именно, если $x^2, \ldots, x^n$ закрепить на значениях, которые они имеют в точке *M.* Частная производная $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^1}$ дает касательный вектор к координатной линии x^1 (п. 6.4). Все сказанное справедливо и для любых координатных линий, так что через каждую точку M проходят n координатных линий с касательными векторами $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}$. Эти векторы мы будем обозначать кратко

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}. \tag{76.13}$$

Они, как мы знаем, всегда линейно независимы, и потому *в каждой точке M могут быть приняты за векторы аффинного репера* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Таким образом, *задание криволинейных координат в области* Ω *влечет появление в каждой ее точке M вполне определенного аффинного репера* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Этот *аффинный репер* мы будем называть *локальным репером в точке M.*

Когда в качестве частного случая криволинейных координат мы берем аффинные координаты, функция (7.12) принимает прежний вид (7.1):

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \text{так что} \quad \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i, \tag{7.14}$$

и локальный репер в каждой точке M имеет те же векторы, что и основной репер, на котором построена данная аффинная координатная система.

Для рассмотрения локальных реперов имеются веские основания. Именно вспомним те простые свойства, которыми обладали аффинные координаты точек: приращения этих координат при переходе из точки $M(x^i)$ в точку $L(y^i)$ выражали координаты вектора смещения $\overrightarrow{ML}$:

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM} = (y^i - x^i)\,\mathbf{e}_i,$$

поскольку

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i,$$
$$\overrightarrow{OL} = y^i \mathbf{e}_i$$

(говоря о координатах вектора, мы всегда будем иметь в виду его *аффинные* координаты; **криволинейные координаты для <u>векторов</u> не имеют смысла**). В этом, можно сказать, и состояла **сущность аффинных координат точек.**

Для криволинейных координат x^i эти простые свойства теряются. Однако мы находим их снова, *если рассматривать криволинейные координаты в бесконечно малой окрестности данной точки M.*

Смещаясь из точки $M(x^i)$ в бесконечно близкую точку $L(x^i + \Delta x^i)$, мы находим вектор смещения $\overrightarrow{ML}$, как приращение радиуса вектора **x** точки *M:*

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM} = \mathbf{x}\,(x^i + \Delta x^i) - \mathbf{x}\,(x^i).$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, заменяем приращение полным дифференциалом и получаем:

$$\overrightarrow{ML} \approx \mathbf{x}_1 \Delta x^1 + \ldots + \mathbf{x}_n \Delta x^n. \qquad (7.15)$$

Это значит, что вектор смещения $\overrightarrow{ML}$ в локальном репере $\{M,\ \mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n\}$ имеет координаты, равные приблизительно приращениям Δx^i.

Итак, для бесконечно малых смещений из точки М приращения криволинейных координат Δx^i *снова выражают координаты вектора смещения* $\overrightarrow{ML}$, *если эти последние вычислять в локальном репере в точке М, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка.*

Таким образом, при помощи локального репера криволинейным координатам возвращаются свойства аффинных координат, правда, теперь уже лишь в бесконечно малой окрестности данной точки. Можно сказать также, что *приращения* Δx^i *криволинейных координат в бесконечно малой окрестности точки М совпадают* с *точностью* 1-го *порядка с аффинными координатами относительно локального репера, построенного в точке М.*

Естественно, что, занимаясь геометрией аффинного пространства в криволинейных координатах, мы постоянно будем сталкиваться с локальными реперами.

Выясним теперь, что происходит с локальными реперами, когда криволинейные координаты подвергаются преобразованию

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1,\ \ldots,\ x^n), \qquad (7.16)$$

которое предполагается однозначно обратимым и непрерывно дифференцируемым в обе стороны (п. 7.1). Выражая, обратно,

$$x^i = x^i(x^{1'},\ \ldots,\ x^{n'}), \qquad (7.17)$$

мы можем считать в уравнении (7.12) радиус-вектор **x** сложной функцией от $x^{i'}$. Частная производная по $x^{i'}$ выразится тогда по известной формуле:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

В правой части по i происходит суммирование. Заметим, что мы будем прилагать обычные формулы дифференцирования к выражениям, содержащим векторы, так как справедливость этих формул устанавливается тривиальным образом: достаточно свести дифференцирование векторов к дифференцированию их координат (п. 6.4).

Окончательно получаем:

$$\mathbf{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{x}_i. \tag{7.18}$$

Итак, преобразование криволинейных координат влечет за собой преобразование локального репера в каждой точке М, причем векторы нового локального репера разлагаются по векторам старого с коэффициентами

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}; \quad \mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0.$$

Сравнивая с нашей прежней записью преобразования аффинного репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i,$$

мы видим, что (7.18) представляет собой ее частный случай, когда

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{7.19}$$

а роль векторов $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{j}$ играют $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i'}$.

Рассмотрим теперь произвольное тензорное поле, например, $V^i_{jk}(M)$. Точка M может при этом пробегать всю область Ω или только некоторую поверхность в ней, или даже линию в зависимости от того, где тензорное поле задано.

Координаты тензора V^i_{jk} можно вычислять относительно любого аффинного репера. Однако в дальнейшем мы всегда будем считать, что аффинное информационное пространство (по крайней мере в пределах области Ω) отнесено к каким-либо криволинейным координатам x^i. Тогда в каждой точке М возникает локальный репер, и координаты тензора $V^i_{jk}(M)$ мы будем брать относительно именно этого репера. Эти координаты мы будем кратко называть координатами тензора $V^i_{jk}(M)$ в данной системе криволинейных координат x^i.

Когда в дальнейшем мы будем говорить о тензорном поле

$$V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \ \ldots, x^n), \tag{7.20}$$

то всегда будем подразумевать сказанное выше.

Если тензорное поле задано не во всей области Ω, а лишь на некоторой поверхности (линии), то в уравнениях (7.20) V^i_{jk} нужно задавать как функции параметров этой поверхности (линии). Тензорное поле может выродиться и в задание тензора V^i_{jk} в одной только точке *M*.

Вслед за преобразованием криволинейных координат происходит преобразование локального репера в каждой точке *M*, а значит, и преобразование координат тензора V^i_{jk} *(M)* по обычному тензорному закону:

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = A^{i'}_i A_{j'}^j A^k_{k'} V^i_{jk}(M). \qquad (7.21)$$

При этом, как мы видели, матрица $A^i_{i'}$ совпадает с матрицей $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$,

а следовательно, обратная матрица $A^{i'}_i$ — с матрицей $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$:

$$A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \qquad (7.22)$$

Следовательно, закон преобразования (7.21) принимает вид

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)\,V^i_{jk}(M). \qquad (7.23)$$

Таким образом, переход от одних криволинейных координат к другим, влечет за собой преобразование координат тензорного поля V^i_{jk} *(M)* по закону (7.23). При этом частные производные $x^{i'}$ по x^i и обратно берутся в той же точке *M*, как и координаты тензора, что и отмечено в записи.

Все тензорные операции алгебраического характера автоматически переносятся и на тензорные поля, как это было показано ранее. Правда, там мы относили все тензорное поле к *одному* реперу $\{O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, теперь же у нас в *каждой точке имеется свой локальный репер* $\{M, \mathbf{x}_1; ..., \mathbf{x}_n\}$. Но это не меняет наших рассуждений, так как алгебраические операции над тензорами совершаются *по отдельности в каждой точке M.*

Зато с абсолютным дифференцированием тензорных полей в криволинейных координатах дело будет обстоять совсем не так просто. Здесь мы не будем им заниматься, так как позже мы рассмотрим получение соответствующих результатов в более общем виде.

Отметим, в частности, что любой вектор ξ, заданный в точке *M,* мы будем всегда относить к локальному реперу в точке *M* и под его координатами ξ^i понимать координаты относительно локального репера. Таким образом, ξ^i определяются из разложения

$$\xi = \xi^i \mathbf{x}_i. \qquad (7.24)$$

Координаты инвариантного вектора образуют, как мы знаем, контравариантный тензор относительно любого аффинного репера, в частности, и относительно локального репера, так что закон преобразования ξ^i будет иметь вид

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i. \tag{7.25}$$

Обратно, если нам задан в точке *M* один раз контравариантный тензор с координатами ξ^i, то разложение (7.24) определяет инвариантный вектор ξ, как тоже известно из общей теории. Задание векторного поля *ξ(M)* равносильно вследствие этого заданию тензорного поля ξ^i *(M)*.

7.3. Параллельное перенесение

Одним из важнейших свойств аффинного информационного пространства является возможность откладывать данный вектор из любой точки. Возникает вопрос, как это реализовать, когда рассматриваемая область Ω отнесена к криволинейным координатам x^i. Вектор ξ_0 мы будем предполагать заданным его координатами ξ^i_0 в некоторой точке M_0; отложить его мы хотим из другой точки M_1. Разумеется, если отложить в M_1 вектор с теми же координатами ξ^i_0, то это не достигнет цели, так как локальные реперы в M_0 и M_1 различны. Нам нужно установить, как следует изменить ξ^i_0, чтобы в локальном репере в точке M_1 они определяли прежний вектор ξ_0.

Решение этой задачи не приводит к чему-либо интересному, если переносить вектор ξ_0 из M_0 в M_1 одним скачком. Интерес представляет непрерывное перенесение вектора ξ_0 по какой-либо кривой $\overset{\frown}{M_0M_1}$, причем мы рассматриваем ход непрерывного изменения его координат ξ^i *на каждом бесконечно малом участке пути.* Именно это упрощение задачи и приводит к содержательным результатам.

Пусть путь $\overset{\frown}{M_0M_1}$ задан параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{7.26}$$

где x^i *(t)* — непрерывно дифференцируемые функции. Заметим, что $\overset{\frown}{M_0M_1}$ есть кривая в смысле п. 6.4: если $x^i(t)$ подставить в (7.12), то радиус-вектор **x** оказывается функцией от *t*. В каждой точке *M(t)* этого пути мы откладываем постоянный вектор ξ_0, координаты которого ξ^i, однако, меняются от точки к точке ввиду изменения от точки к точке локального репера. Таким образом, координаты ξ^i зависят от *t:*

$$\xi^i = \xi^i (t), \tag{7.27}$$

и мы хотим выяснить, по какому закону будут меняться эти функции хотя бы на бесконечно малом участке пути.

Так как функции $x^i(t)$ — непрерывно дифференцируемые, мы получаем, что вдоль пути векторы локального репера $\mathbf{x}_i(x^1, ..., x^n)$, а значит, и ξ^i являются непрерывно дифференцируемыми функциями t (предполагая $N=2$; смысл N см. п 7.1).

Относя вектор ξ_0 к локальному реперу в точке $M(t)$, запишем:

$$\xi_0 = \xi^i (t)\, \mathbf{x}_i (x^1, \ \ldots, \ x^n). \tag{7.28}$$

Здесь имеется в виду, что аргументы $x^1, \ldots, x^n$ сами зависят от t согласно параметрическим уравнениям пути. Дифференцируя по t почленно и учитывая, что $\xi_0 = \text{const}$, получим:

$$0 = d\xi^i \mathbf{x}_i + \xi^i d\mathbf{x}_i. \tag{7.29}$$

Чтобы разобраться в этом результате, нам нужно векторы $d\mathbf{x}_i$ разложить по векторам локального репера. По формуле полного дифференциала

$$d\mathbf{x}_i (x^1, \ \ldots, \ x^n) = \mathbf{x}_{ij} dx^j, \tag{7.30}$$

где

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}\, (x^1, \ \ldots, \ x^n)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Векторы $\mathbf{x}_{ij}$, вполне определенные *для каждой точки области* Ω (а не только вдоль рассматриваемого пути), можно разложить по векторам локального репера $\mathbf{x}_i$ в этой точке:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij} \mathbf{x}_k. \tag{7.31}$$

Через Γ^k_{ij} мы обозначили коэффициенты разложения; по k происходит суммирование. Очевидное равенство

$$\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ji}$$

влечет за собой

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \tag{7.32}$$

ввиду однозначности разложения по векторам репера. Конечно, Γ^k_{ij} зависят от точки, где производится разложение (7.31), так что

$$\Gamma^k_{ij} (M) = \Gamma^k_{ij} (x^1, \ \ldots, \ x^n). \tag{7.33}$$

Величины Γ^k_{ij}, *определенные таким образом в данной системе криволинейных координат* x^i *для каждой точки M области* Ω, *мы будем называть коэффициентами связности.*

Смысл этого названия вскоре выяснится. Коэффициенты связности впоследствии (в обобщенном виде) будут играть у нас исключительно важную роль.

Возвращаемся к нашей задаче. Вставляя разложение (7.31) в (7.30), получаем:

$$d\mathbf{x}_i = \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k dx^j,$$

после чего равенство (7.29) принимает вид

$$0 = d\xi^k\mathbf{x}_k + \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k\xi^i dx^j.$$

В первом члене правой части мы изменили лишь обозначение индекса суммирования на *k*. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{x}_k$ обращение в нуль их линейной комбинации означает обращение в нуль и всех ее коэффициентов; следовательно,

$$d\xi^k + \Gamma^k_{ij}\xi^i dx^j = 0,$$

или, что то же,

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{7.34}$$

(Ввиду симметрии Γ^k_{ij} по нижним индексам безразлично, свертывается ли ξ^i с первым, а dx^i— со вторым его индексом или наоборот). Это и есть *формула параллельного перенесения вектора* в бесконечно малом. Она решает следующую задачу: *если в данной точке* $M(x^i)$ *вектор имеет координаты* ξ^k, *то какие координаты будет иметь тот же вектор в бесконечно близкой точке* $M'(x^i + dx^i)$?

Конечно, эту задачу мы решаем не точно, а пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка. Вернее, мы выражаем не приращения, а дифференциалы координат ξ^k при переходе из *M* в *M'*.

Как мы видим, $d\xi^k$ линейно зависят и от данных координат ξ^i и от дифференциалов dx^i координат точки. Коэффициентами служат Γ^k_{ij}; мы видим, что при их помощи связываются векторы в *M* и векторы в *M'*, откуда и происходит название «коэффициенты связности».

Мы как будто забыли о том пути $\overset{\frown}{M_0M_1}$, по которому двигались, или, точнее, ограничились его произвольным бесконечно малым кусочком.

Если же мы захотели бы применить полученную формулу (7.34) к перенесению вектора по конечному пути $\overset{\frown}{M_0M_1}$, то нам пришлось бы интегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений. Здесь мы на этом не останавливаемся, так как позже будем заниматься этим вопросом в обобщенном виде. В частном случае, когда координаты x^i аффинные,

$$\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n) = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_{ij} = 0,$$

и из (7.31) следует:

$$\Gamma^k_{ij} = 0. \qquad (7.35)$$

Обратно, если в какой-нибудь системе криволинейных координат Γ^k_{ij} $(x^1, ..., x^n)$ тождественно обращаются в нуль, то из (7.31) следует:

$$\mathbf{x}_{ij} = 0, \qquad \mathbf{x}_i = \text{const}.$$

Обозначая $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$, получим наконец

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i + \mathbf{x}_0.$$

Такое выражение для радиуса-вектора (где $\mathbf{x}_0$ = const) показывает, что x^i — аффинные координаты (с началом в точке $\mathbf{x}_0$).

Итак, для того чтобы криволинейные координаты в рассматриваемой области Ω, *оказались, как частный случай, просто аффинными, необходимо и достаточно, чтобы в этих координатах тождественно обращались в нуль* Γ^k_{ij}.

7.4. Информационный объект связности

Мы ввели коэффициенты связности Γ^k_{ij} в некоторой системе криволинейных координат x^i в каждой точке M области Ω.

Допустим, что мы перешли в другую систему криволинейных координат $x^{i'}$ и там вычислили Γ^k_{ij}; по какому закону будут преобразовываться Γ^k_{ij} в $\Gamma^{k'}_{i'j'}$?

Как оказывается, этот закон не будет тензорным, хотя индексные обозначения коэффициентов связности как будто наталкивают на эту мысль. Исходя из разложения (7.31), определяющего Γ^k_{ij}, нетрудно этот закон найти. В старых и соответственно в новых координатах мы имеем:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k, \qquad \mathbf{x}_{i'j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}\mathbf{x}_{k'}. \qquad (7.36)$$

Мы хотим, пользуясь первым разложением, подсчитать коэффициенты второго разложения, что и даст искомый закон.

Дифференцирование $\mathbf{x}(x^1, ..., x^n)$ как сложной функции от $x^{i'}$ приводит нас к (7.18):

$$\mathbf{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{x}_i. \qquad (7.37)$$

Еще раз дифференцируем, теперь по $x^{j'}$, снова рассматривая $\mathbf{x}_i(x^1, ... x^n)$ как сложную функцию от $x^{j'}$. Так как

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = \mathbf{x}_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}},$$

то мы получаем, дифференцируя (7.37) по $x^{j'}$,

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\mathbf{x}_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\mathbf{x}_{ij}. \qquad (7.38)$$

В первом члене правой части меняем обозначение индекса суммирования i на k и, пользуясь первым разложением (7.36), переписываем:

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\right)\mathbf{x}_k. \qquad (7.39)$$

Пользуясь, далее, формулой (7.37), записанной с переменой ролей старых и новых координат:

$$\mathbf{x}_k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\mathbf{x}_{k'}, \qquad (7.40)$$

получаем окончательно:

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\mathbf{x}_{k'}.$$

Сравнивая со вторым разложением (7.36), мы видим, что

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}. \qquad (7.41)$$

Это и есть искомый закон преобразования коэффициентов связности. Этот закон совпал бы с тензорным, если в правой части оставить лишь последний член. Но наличие дополнительного члена, содержащего вторые производные старых координат по новым, принципиально меняет дело.

Если в данной точке М для каждой системы криволинейных координат x^i *нам указана система чисел* Γ^k_{ij} *, преобразующихся по закону* (7.41) *при переходе от одной системы к другой системе криволинейных координат, то мы говорим, что в точке М задан информационный объект связности.*

При этом подразумевается, что частные производные в (7.41) вычислены в точке *М.* Обычно информационный объект связности рассматривается не в одной точке *М,* а в каждой точке области Ω:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(M) = \Gamma^k_{ij}(x^1, \ \ldots, \ x^n), \qquad (7.42)$$

так что мы имеем поле информационного объекта связности Γ^k_{ij} *(М).* Для краткости мы в дальнейшем под «информационным объектом связности» будем понимать именно *поле информационного объекта связности.*

Мы видим, что коэффициенты связности Γ^k_{ij} (*M*) в нашем аффинном информационном пространстве образуют определенный информационный объект связности, который мы назовем *информационным объектом связности нашего аффинного информационного пространства.* Но *произвольно взятый* информационный объект связности, вообще говоря, не является информационным объектом связности нашего пространства. Более того, он не является информационным объектом связности и вообще какого-либо аффинного информационного пространства. Точный смысл этого замечания выяснится позже.

Информационный объект связности есть частный случай *дифференциально-геометрического информационного объекта класса* 2. *Мы говорим, что в точке M дан дифференциально-геометрический информационный объект класса 2, если в каждой системе криволинейных координат* x^i *нам дано s чисел* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s$, *причем при переходе от координат* x^i *к новым координатам* $x^{i'}$ *новые значения* $\varphi_{1'}, \varphi_{2'}, ..., \varphi_{s'}$ *выражаются как определенные (непрерывно дифференцируемые) функции старых значений* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s$ *и частных производных новых координат* $x^{i'}$ *по старым* x^i *до 2-го порядка включительно; эти производные предполагаются вычисленными в точке M* (обычно предполагают, кроме того, что это преобразование обладает групповым характером, т. е. последовательное его выполнение для переходов от x^i к $x^{i'}$ и от $x^{i'}$ к $x^{i''}$ дает это же преобразование для перехода от x^i к $x^{i''}$. Однако групповой характер можно вывести из нашего определения (хотя и без изменения объекта по существу, но, может быть, с изменением формальной записи закона его преобразования)).

В закон преобразования могут входить производные и старых координат по новым, но мы об этом не упоминаем, так как их всегда можно выразить при желании через производные новых координат по старым.

Совершенно аналогично определяется дифференциально-геометрический информационный объект любого класса *v;* в частности, тензоры являются примером дифференциально-геометрических объектов класса 1, так как в закон их преобразования входят лишь первые частные производные новых координат по старым.

Важнейшее значение информационного объекта связности аффинного информационного пространства состоит в том, что *он определяет всю геометрию аффинного информационного пространства,* точнее, той его области Ω, в которой информационный объект связности задается.

Это можно формулировать в виде следующей теоремы.

Пусть нам известно, что переменные $x^1, \ldots, x^n$, *пробегающие данную связную область изменения* Ω^*, *служат криволинейными координатами в какой-то (неизвестной) области* Ω *аффинного информационного пространства, причем коэффициенты связности в этих криволинейных координатах нам заданы функциями*

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1, \ \ldots, \ x^n). \tag{7.43}$$

Тогда мы можем восстановить всю геометрию области Ω.

Подчеркнем, что в условии теоремы нам *не дано как именно и в какой области* Ω введены криволинейные координаты x^i, а известно лишь, что *как-то* это сделано. Таким образом, заранее мы не знаем, как именно сопоставлены наши координаты точкам аффинного информационного пространства, и должны это обнаружить на основе знания коэффициентов связности.

Чтобы доказать теорему, достаточно суметь перейти в области Ω от криволинейных координат x^i к каким-нибудь аффинным координатам, которые мы обозначим $x^{i'}$.

Действительно, *в аффинной координатной системе* мы без труда можем определить все соотношения между точками и векторами и осуществить все конструкции, которые перечислены в аксиоматике аффинного пространства. Тем самым и вся геометрия аффинного пространства будет восстановлена (в нашем случае в пределах области Ω).

Для того чтобы $x^{i'}$ служили аффинными координатами в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$. Поэтому мы будем искать такие формулы преобразования

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ \ldots, x^n),$$

чтобы этого добиться в преобразованных координатах $x^{i'}$.

Используем закон преобразования (7.41), написав его для обратного перехода от $x^{i'}$ к x^i:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^{k'}_{i'j'} . \tag{7.44}$$

Очевидно, требование $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$ влечет за собой

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} . \tag{7.45}$$

Обратно, отсюда следует $\Gamma^{i'}_{j'k'}=0$. Правда, непосредственно при подстановке (7.45) в (7.44) получаем обращение в нуль $\Gamma^{i'}_{j'k'}$, *подвергнутых преобразованию по тензорному закону,* но это влечет обращение в нуль и самих $\Gamma^{i'}_{j'k'}$.

Перепишем теперь (7.45) в более удобном виде. Умножая почленно на $\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}$ и суммируя по k, получим:

$$\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}\,\delta^{l'}_{k'}=\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (7.46)$$

Итак,

$$\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}\,\delta^{l'}_{k'}=\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (7.47)$$

Таким образом, для того чтобы преобразование криволинейных координат x^i

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1, \ ..., x^n)$$

давало бы нам аффинные координаты $x^{i'}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $x^{i'}(x^1, ..., x^n)$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений второго порядка (7.47).

А так как функции $\Gamma^k_{ij}(x^1, ..., x^n)$ нам заданы, то мы можем фактически написать уравнения (7.47) и среди систем криволинейных координат $x^{i'}$ выделить те, которые этим уравнениям удовлетворяют. Это будут аффинные координатные системы; по любой из них мы можем восстановить и всю геометрию области Ω. Теорема доказана. Заметим, что существование решений у системы дифференциальных уравнений (7.47) в нашем случае сомнений не вызывает, так как в области Ω наверняка существуют аффинные координаты $x^{i'}$; вопрос состоял лишь в том, как $x^{i'}$ выразить через x^i.

Доказанная теорема наводит на следующий вопрос, исключительно важный для дальнейшего.

*Пусть в области изменения переменных x^1, ..., x^n, которую мы обозначим Ω *, заданы какие-то функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, ..., x^n)$, и притом во всей области Ω* $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$; всегда ли можно истолковать переменные x^1, ..., x^n как криволинейные координаты в некоторой области Ω аффинного пространства так, чтобы наперед заданные функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, ..., x^n)$ выражали коэффициенты связности в области Ω?*

Ответ на этот вопрос будет, как мы позже увидим, *отрицательным,* даже если вместо всей области Ω * брать сколь угодно малые ее куски. Требуемое истолкование возможно лишь в весьма частном случае, когда Γ^i_{jk} удовлетворяют определенной системе дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, что этот отрицательный результат не противоречит доказанной теореме: действительно, возможность истолковать функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, ..., x^n)$ как коэффициенты связности в криволинейных координатах x^i *входила в условие теоремы.*

Теперь возникает следующий вопрос: мы знаем, что в некоторых частных случаях функции Γ^i_{jk} *(x^1, ..., x^n)* , заданные в области изменения переменных x^i, *определяют в этой области аффинную геометрию* (именно, если истолкование Γ^i_{jk} как коэффициентов связности в криволинейных координатах x^i удается). *Нельзя ли считать, что и в общем случае функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ все-таки определяют в рассматриваемой области некоторую геометрию, которая, является обобщением аффинной?* Ответом на этот вопрос служит понятие *о пространстве аффинной связности,* которым мы будем заниматься в дальнейшем.

7.5. Криволинейные координаты в евклидовом информационном пространстве

Так как евклидово информационное пространство получается из аффинного лишь дополнительным введением метрики (в форме скалярного произведения векторов), то все сказанное о криволинейных координатах в п.п. 7.1—7.4 остается верным. В частности, за *информационный объект связности евклидова информационного пространства* мы принимаем информационный объект связности Γ^k_{ij} аффинного информационного пространства, на базе которого оно построено. Но наличие метрики означает появление дополнительных вопросов, которые мы также хотим рассмотреть в криволинейных координатах.

Как мы знаем, задание метрики сводится к заданию метрического тензора g_{ij}, который можно относить к любому аффинному реперу. При этом имеет место формула

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \tag{7.48}$$

В соответствии с общим соглашением (п. 7.2) мы, рассматривая тензор g_{ij} *в криволинейных координатах* x^i, относим его в каждой точке M к соответствующему локальному реперу $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Его координаты будут при этом выражаться скалярными произведениями

$$g_{ij}(M) = \mathbf{x}_i(M)\mathbf{x}_j(M) \tag{7.49}$$

согласно (7.48).

В этой трактовке метрический тензор нужно рассматривать уже как тензорное поле; его координаты будут являться функциями точки

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{7.50}$$

хотя по существу в каждой точке задается все-таки один и тот же тензор. При переходе к новым криволинейным координатам g_{ij} преобразуются по закону

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

Мы вскоре увидим, что задание в криволинейных координатах x^i метрического тензора $g_{ij}(x^1,...,x^n)$ играет для евклидова информационного пространства такую же роль, как задание информационного объекта связности $\Gamma_{ij}(x^1,...,x^n)$ для аффинного информационного пространства, т. е. полностью определяет его геометрическую информационнию. Но пока мы просто выведем некоторые свойства евклидова информационного пространства на основе задания метрического тензора g_{ij} в криволинейных координатах. При этом ясно, что для локального репера в произвольной точке M и соответствующего метрического тензора $g_{ij}(M)$ можно повторить все сказанное в п.п. 5.1 — 5.3.

Рассмотрим прежде всего параметрически заданную кривую (см. 7.26)):

$$x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{7.51}$$

Радиус-вектор любой точки выражается функцией ее криволинейных координат

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^i, ..., x^n),$$

причем вдоль кривой сами $x^1, ..., x^n$ зависят от t. Отсюда касательный вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ в произвольной точке M нашей кривой имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{x}_i, \tag{7.52}$$

а значит, обладает в локальном репере координатами $\frac{dx^i}{dt}$. Эти координаты образуют один раз контравариантный тензор, что легко проверяется и непосредственно: при переходе к новым криволинейным координатам $x^{i'}$ получаем:

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}$$

по правилу дифференцирования сложной функции. Но это выражает в то же время тензорный закон преобразования для $\frac{dx^i}{dt}$.

Аналогично, рассматривая вместо производной дифференциал радиуса-вектора при бесконечно малом смещении по нашей кривой, получаем по формуле полного дифференциала:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_i dx^i. \tag{7.53}$$

Мы видим, что координатами $d\mathbf{x}$ служат dx^i. Следовательно, dx^i образуют один раз контравариантный тензор, и это легко проверяется непосредственно:

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i.$$

Все дифференциалы берутся при бесконечно малом смещении. Здесь и в дальнейшем *мы будем понимать под этим, что они берутся как дифференциалы функций от параметра t при его бесконечно малом приращении dt.*

Скалярный квадрат вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ можно вычислить по общей формуле (5.9), пользуясь ею в локальном репере:

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}. \tag{7.54}$$

Отсюда

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2} = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}. \tag{7.55}$$

Мы знаем, что длина кривой определяется формулой (6.35):

$$\overset{\frown}{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} |d\mathbf{x}| = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| dt$$

и, следовательно,

$$\overset{\frown}{M_1M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt. \tag{7.56}$$

Следует помнить, что в подынтегральном выражении g_{ij} — функции от $x^1, ..., x^n$ согласно (7.50), а $x^1, ..., x^n$ — функции от t согласно (7.51), так что подынтегральное выражение зависит в конечном счете от t.

Итак, если в криволинейных координатах x^i в области Ω нам задан метрический тензор $g_{ij}(x^1, ..., x^n)$, то длину любой кривой (7.51) *можно вычислить по формуле* (7.58).

Вместо того чтобы задавать длину дуги интегралом, можно выразить ее дифференциал, совпадающий с подынтегральным выражением:

$$ds = |d\mathbf{x}| = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j},$$

или, что то же,

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j. \tag{7.57}$$

Квадрат дифференциала дуги при любом бесконечно малом смещении по любой кривой выражается дифференциальной квадратичной формой (7.57) *от криволинейных координат* (вообще дифференциальной квадратичной формой от переменных x^1, ..., x^n называется квадратичная форма от их дифференциалов dx^1, ..., dx^n с коэффициентами — функциями от x^1, ..., x^n).

Эту квадратичную форму мы будем называть *метрической.* Она инвариантна относительно преобразования криволинейных координат x^i; это видно как по ее геометрическому смыслу, так и по алгебраической структуре: она представляет результат двойного свертывания метрического тензора g_{ij} с контравариантным тензором dx^i.

Покажем теперь, что *информационный объект связности* Γ^i_{jk} *(M) евклидова информационного пространства можно вычислить, зная метрический тензор* $g_{ij}(M)$ *в какой-нибудь криволинейной системе координат.*

Согласно (7.31) коэффициенты связности подсчитываются из разложения

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k. \tag{7.58}$$

Теперь, имея в информационном пространстве евклидову метрику, мы можем по-новому подойти к этому подсчету. Умножая (7.58) на $\mathbf{x}_l$ скалярно, получим:

$$\mathbf{x}_l\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\, g_{lk}, \tag{7.59}$$

так как

$$\mathbf{x}_l\mathbf{x}_k = g_{lk}. \tag{7.60}$$

Мы видим, что правая часть (7.59) получается из Γ^k_{ij} опусканием верхнего индекса (правда, опускание индексов мы рассматривали лишь для тензоров, в то время как Γ^k_{ij} — не тензор; однако формальная сторона дела от этого не меняется). Соответственно этому обозначим:

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk}\Gamma^k_{ij}. \tag{7.61}$$

Обратно, Γ^k_{ij} получаются из $\Gamma_{i,ij}$ поднятием первого нижнего индекса:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,ij}. \tag{7.62}$$

Ясно, что для вычисления Γ^k_{ij} достаточно вычислить $\Gamma_{i,ij}$. Согласно (7.59)

$$\Gamma_{l,ij} = \mathbf{x}_l \mathbf{x}_{ij}. \tag{7.63}$$

При этом, очевидно,

$$\Gamma_{l,ij} = \Gamma_{l,ji}.$$

Эти величины и есть те неизвестные, которые требуется выразить посредством метрического тензора g_{ij}. Для этой цели дифференцируем равенство (7.60) по x^m почленно. Получим:

$$\mathbf{x}_{lm}\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_l\mathbf{x}_{km} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m},$$

т.е.

$$\Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,km} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}. \tag{7.64}$$

Мы имеем здесь (при фиксированных k, l, m) одно уравнение с двумя неизвестными. Однако, если переписать это уравнение, сделав над k, l, m круговую подстановку, сначала один раз, а потом еще раз, то уравнений будет уже три, а неизвестное добавится лишь одно. Получаем:

$$\Gamma_{l,mk} + \Gamma_{m,lk} = \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{m,kl} + \Gamma_{k,ml} = \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}.$$

Учитывая симметрию $\Gamma_{i,ij}$ по индексам i, j, мы замечаем, что в левых частях у нас имеется фактически лишь три неизвестные величины, попарные суммы которые заданы:

$$\Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,mk} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m},$$

$$\Gamma_{l,mk} + \Gamma_{m,kl} = \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{m,kl} + \Gamma_{k,lm} = \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}.$$

Такую систему можно решить элементарным приемом, складывая почленно первые два уравнения и вычитая третье. Получим:

$$2\Gamma_{l,mk} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}$$

и окончательно

$$\Gamma_{l,mk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right). \tag{7.65}$$

Вставляя этот результат в (7.62), мы приходим к решению нашей задачи:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \tag{7.66}$$

Полученные выражения для $\Gamma_{i,mk}$ и Γ^k_{ij} называются *Христоффелями (символами Христоффеля) соответственно 1-го и 2-го рода.* Если, в частности, x^i — аффинные координаты, то

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i = \text{const}, \quad g_{kl} = \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = \text{const},$$

все частные производные $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}$ обращаются в нуль. Этим еще раз подтверждается, что в аффинных координатах $\Gamma^i_{kj} = 0$.

Докажем теперь теорему, показывающую фундаментальную роль метрического тензора g_{ij} для евклидовой геометрии.

Пусть нам известно, что переменные $x^1, ..., x^n$, пробегающие данную связную область изменения Ω^*, служат криволинейными координатами в какой-то (неизвестной) области Ω евклидова пространства, причем координаты метрического тензора в этой системе криволинейных координат нам заданы:

$$g_{ij}=g_{ij}(x^1, ..., x^n). \tag{7.67}$$

Тогда мы можем восстановить всю геометрию области Ω.

В самом деле, пользуясь (7.66), мы находим коэффициенты связности Γ^k_{ij} тоже как функции $x^1, \ldots, x^n$ и, исходя отсюда, совершаем переход в какую-нибудь аффинную координатную систему $x^{i'}$ так же, как в п. 7.4. В этой координатной системе находим координаты метрического тензора по формуле преобразования

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

Так как $x^{i'}$— аффинные координаты, то $g_{i'j'}$ = const, т. е. от выбора точки не зависят. В результате мы нашли в области Ω аффинную координатную систему $x^{i'}$ (что позволяет восстановить всю аффинную геометрию области Ω) и метрический тензор $g_{i'j'}$ в ней, что позволяет выразить скалярное произведение любых двух векторов, а тем самым полностью восстановить евклидову метрику области Ω. Теорема доказана.

Снова возникает вопрос: *пусть в области изменения переменных x^i каким-либо образом заданы функции $g_{ij}(x^1, ..., x^n)$, $g_{ij} = g_{ji}$*, Det | g_{ij}| $\neq 0$. *Всегда ли можно истолковать x^i как криволинейные координаты в некоторой области Ω евклидова пространства так, чтобы $g_{ij}(x^1, ..., x^n)$ выражали координаты метрического тензора в этой области в криволинейных координатах x^i?*

Ответ снова будет отрицательным: такое истолкование возможно лишь в очень частном случае, именно, когда функции

$g_{ij}(x^1, ..., x^n)$ удовлетворяют определенной системе дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка (которой мы будем заниматься позже). Лишь тогда задание $g_{ij}(x^1, ..., x^n)$ позволяет установить евклидову геометрию в области изменения x^i. Но здесь естественно спросить: нельзя ли и в общем случае задания функций $g_{ij}(x^1, ..., x^n)$ связать с ними определенную геометрию в области изменения переменных x^i наподобие этой евклидовой геометрии? Ответом на этот вопрос служит понятие *римановой геометрии,* которой мы будем заниматься дальше.

7.6. Информационные многообразия

Мы переходим к основным понятиям *информационного пространства аффинной связности и риманова информационного пространства.* Как уже указывалось в п. 7.5, мы приходим к ним путем обобщения соответственно понятий об аффинном и евклидовом информационных пространствах. В грубых чертах указывался и путь этого обобщения: мы рассматриваем некоторую область изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ и информатизируем ее в первом случае путем введения функций $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, которые используются аналогично коэффициентам связности аффинного информационного пространства, во втором случае путем введения функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, которые должны служить чем-то вроде координат метрического тензора g_{ij} евклидова информационного пространства.

Однако информатизацию области изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ нужно начинать с более раннего этапа, именно, с превращения ее *в информационное многообразие,* еще независимо от задания функций Γ^k_{ij} или g_{ij}. Этим мы и займемся.

Начнем с наводящих соображений. Связную область в аффинном информационном пространстве мы можем относить к различным системам криволинейных координат, любые две из которых связаны между собой преобразованием взаимно однозначным и в обе стороны N раз непрерывно дифференцируемым:

$$x^{i'}=f_i(x^1.....x^n) \text{ и, обратно, } x^i=g_i(x^{1'}, ..., x^{n'}). \quad (7.68)$$

При этом x^i пробегают область изменения Ω, $x^{i'}$ — область изменения Ω' (определение области см. п. 7.1). При соблюдении всех этих условий преобразование (7.68) переменных x^i в переменные $x^{i'}$ мы будем называть кратко преобразованием класса N.

То, что мы имеем область именно в аффинном информационном пространстве, сказывается в том, что среди координатных систем выделены особые, аффинные координатные системы с точностью уже до *линейных* преобразований. Перейдя в какую-нибудь из аффинных координатных систем, мы очевидным образом можем установить все аффинные свойства области Ω. Представим себе теперь, что *мы отказались от выделения среди координатных систем некоторых особенных* (аффинных), а считаем все эти системы равноправными. Тогда мы теряем аффинные свойства рассматриваемой области, она перестает быть куском аффинного информационного пространства и становится некоторым множеством, элементы которого мы называем точками в сущности лишь по инерции. Однако это множество, как мы сейчас увидим, все же сохраняет некоторые информационные свойства. Этим самым мы и приходим к понятию *информационного многообразия* в простейшем частном случае (элементарное информационное многообразие).

Мы можем теперь дать следующее определение.

Элементарным информационным многообразием (п измерений и класса N) мы будем называть любое множество $\mathfrak{M}$, *для которого задано взаимно однозначное отображение на связную область изменения п переменных* $x^1, \ldots, x^n$, *но задано лишь с точностью до произвольного преобразования этих переменных в новые переменные по схеме* (7.68) *(включая условие непрерывной дифференцируемости порядка N).*

Обозначая область изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ через Ω, а элементы множества через *M,* можно записать отображение в виде

$$M \leftrightarrow (x^1, \ \ldots, \ x^n) \in \Omega. \tag{7.69}$$

Область Ω предполагается *связной.* Самым важным в определении информационного многообразия является то, что отображение (7.69) задается с точностью до всевозможных преобразований класса *N* над переменными $x^1, \ldots, x^n$, т. е. с точностью до перехода к любому другому отображению

$$M \leftrightarrow (x^{1'}, \ \ldots, \ x^{n'}) \in \Omega' \qquad (70.70)$$

при единственном условии, что $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ получаются из $x^1, \ldots, x^n$ (и обратно) непрерывно дифференцируемым преобразованием класса *N* (7.68). Другими словами, задается не одно отображение (7.69), а бесчисленное множество таких отображений, причем любые два из них, например, (7.69), (7.70), связаны преобразованием класса *N* (7.68), и, обратно, любое преобразование класса *N* (7.68), примененное к одному из заданных отображений, снова приводит к одному из заданных отображений.

Поскольку отображение (7.69) задано, таким образом, с огромной степенью неопределенности, то можно подумать, что оно ничего не может и дать для инфориационности многообразия. Но это не совсем так. Будем называть элементы инфориационноого многообразия *M* *точками,* заданные нам отображения (7.69) *координатными системами* в многообразии $\mathfrak{M}$ и, наконец, значения $x^1, \ldots, x^n$, отвечающие точке *M* в отображении (7.69),— *ее координатами* в соответствующей координатной системе. Информациооные свойства многообразия нам приходится извлекать только из отображений (7.69), так как элементам множества $\mathfrak{M}$ самим по себе никаких свойств не приписывается. Если при этом отображении (7.69) были бы заданы с точностью до *произвольных* взаимно однозначных преобразований области Ω в область Ω ', то отсюда было бы нельзя ничего извлечь. Но потому, что эти отображения заданы с точностью до непрерывно дифференцируемых преобразований класса *N,* информационное многообразие приобретает некоторые, хотя и скудные, информационные свойства. Прежде всего в информационном многообразии можно определить понятие предельной точки. Мы будем говорить, что переменная точка *M* стремится (например, по счетной последовательности положений) к предельной точке M_0, если координаты точки *M* стремятся к соответствующим координатам точки M_0 хотя бы в одной координатной системе x^i (т. е. хотя бы при одном из заданных отображений (7.69)). Но так как переход к другой координатной системе $x^{i'}$ совершается при помощи функций, во всяком случае непрерывных (даже при $N=0$), то наше определение *имеет смысл, независимый от выбора координатной системы.* Аналогично обстоит дело и с понятием области (открытого множества) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, которое определяется посредством координатной системы так же, как и область в арифметическом информационном пространстве в п. 7.1. Далее, пользуясь снова какой-нибудь координатной системой в информационном многообразии, нетрудно определить в нем кривые, их касание между собой того или иного порядка, поверхности и еще ряд геометрических конструкций; мы не останавливаемся на всем этом более подробно, так как дальше будем заниматься этим систематически. Оказывается, что такого рода определения формулируются так, что их смысл не зависит от той координатной системы, которой мы в данный момент пользуемся, и тем самым наши конструкции определены действительно для самого *информационного многообразия.*

Резюмируя, можно сказать, что элементарное информационное многообразие (класса *N)* воплощает в себе те свойства области изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$, которые инвариантны при любом взаимно однозначном и непрерывно дифференцируемом преобразовании (класса *N*) этих переменных в новые переменные

$x^{1'}$, ... , $x^{n'}$(абсолютно недопустимо и лишено смысла «подсовывать» многообразию то, что ему по определению не принадлежит, например, строить вектор, соединяющий две данные точки, и т п., только потому, что так делается в аффинном (или евклидовом) пространстве).

Чем больше N, тем меньшее количество преобразований мы допускаем, тем большим количеством свойств обладает информационное многообразие.

Все, что имеет место для информационного многообразия данного класса, имеет место для информационного многообразия высшего класса. Информационное многообразие наиболее бедное свойствами мы получаем при $N=0$, т. е. когда от взаимно однозначных преобразований x^i в $x^{i'}$ требуется лишь непрерывность. В этом случае мы имеем информационное многообразие в топологическом смысле. В этом и следующих разделах достаточно потребовать, чтобы информационное многообразие было, по крайней мере, 2-го класса. Допускается и значение $N=\infty$

Все, что до сих пор было сказано, относилось к информационным многообразиям простейшего вида, которые мы назвали *элементарными.* Не давая пока точных определений (см. п.7.10), мы постараемся составить хотя бы грубо наглядное представление об информационном многообразии вообще.

Начнем с двумерного случая $N=2$. Моделями различных двумерных информационных многообразий могут служить поверхности в обычном евклидовом информационном пространстве, например, эллиптический параболоид, сфера, тор, полусфера и т. д. Если рассматриваемая поверхность имеет край, то он в поверхность не включается. Например, полусфера берется без ограничивающей ее окружности большого круга.

Когда мы рассматриваем поверхность, как модель информационного многообразия, мы, конечно, игнорируем ее обычные геометрические свойства и вообще интересуемся этой поверхностью лишь с точностью до ее непрерывно дифференцируемого преобразования определенного класса N; действительно такое преобразование переносит координатные системы (класса N) с одной поверхности на другую. Таким образом, целая плоскость, внутренность круга, полусфера, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид и т. п. *как информационные многообразия* между собой эквивалентны. Действительно, все эти поверхности допускают взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение друг на друга. В частности, они отображаются на целую плоскость XOY, т. е. на область изменения переменных x, y, $-\infty<x$, $y<+\infty$. Тем самым перечисленные информационные многообразия являются *элементарными* двумерными информационными многообразиями; существуют и не эквивалентные им (например, кольцо между двумя концентрическими окружностями на плоскости представляет собой существенно иное, хотя тоже элементарное информационное многообразие).

Но информационное многообразие, моделью которого служит сфера, будет уже неэлементарное информационное многообразие, так как сфера не допускает взаимно однозначного и непрерывного отображения ни на какой кусок плоскости, т. е. ни на какую область изменения двух переменных x, y. Это равносильно тому, что сферу в целом нельзя отнести к какой-либо координатной системе x^1, x^2 при обычных предположениях взаимной однозначности и непрерывности соответствия.

Однако сферу можно склеить из двух полусфер, которые представляют собой элементарные информационные многообразия и допускают каждая координатную систему x^1, x^2. При этом, чтобы не выпала окружность большого круга, по которой полусферы должны склеиваться, но которая им не принадлежит, мы одну из полусфер возьмем несколько продолженной за ее границу посредством пояска, наставленного по ее краю, причем этот поясок будет наклеиваться на соответствующую часть второй полусферы. Аналогичным образом и информационное многообразие, представленное тором (и, конечно, тоже неэлементарное), можно склеить, например, из заходящих один на другой четырех кусков в виде искривленных и деформированных прямоугольников, которые по отдельности представляют собой элементарные информационные многообразия.

Из этих наглядных примеров можно почерпнуть общую идею: произвольное двумерное информационное многообразие можно определить как результат последовательного склеивания заходящих одно на другое элементарных двумерных информационных многообразий. Двумерное информационное многообразие, полученное в результате такого склеивания, ведет себя в малом, в окрестности каждой точки, совершенно так же, как и элементарное информационное многообразие. Это видно хотя бы из того, что достаточно малая окрестность точки принадлежит одному из составляющих элементарных информационных многообразий. Но в целом неэлементарное информационное многообразие своими топологическими свойствами существенно отличается от элементарного.

Совершенно аналогичная идея лежит в основе понятия n-мерного информационного многообразия. Оно составляется по существу путем склеивания (т. е. частичного отождествления) заходящих одно в другое элементарных n-мерных информационных многообразий. Для неэлементарного информационного многообразия в целом нельзя ввести координатную систему $x^1, \ldots, x^n$ с обычными требованиями взаимной однозначности и непрерывности соответствия; но это можно делать по отдельности для тех элементарных кусков, из которых оно составлено.

Конечно, грубые описания, которые нами даны, не содержат точного определения информационного многообразия. Однако мы не очень пострадаем, если ограничимся ими, по следующей причине.

Ми будем в дальнейшем заниматься *дифференциальным* анализом информационного многообразия, а для этого достаточно каждый раз иметь в своем распоряжении лишь некоторую окрестность рассматриваемой точки. В пределах же такой окрестности информационное многообразие всегда можно считать элементарным. *Поэтому дальнейшие построения мы обычно будем вести так, как если бы информационное многообразие было элементарным, в частности, пользоваться координатными системами* $x^1, \ldots, x^n$, *где* $x^1, \ldots, x^n$ *пробегают некоторую область изменения* Ω. При этом нужно помнить, однако, что мы имеем в виду координаты, введенные в отдельных составляющих элементарных информационных многообразиях. В тех частях, где эти информационные многообразия накладываются одно на другое, соответствующие координаты связаны зависимостью (7.68) класса N. Точное определение (неэлементарного) многообразия мы дадим позже (п. 7.10).

7.7. Тензоры в информационном многообразии

Переходя к геометрии информационного многообразия, необходимо хорошо понять, что по сравнению с аффинным (и, тем более, евклидовым) информационным пространством мы очень много потеряли. В нашем распоряжении нет больше векторов, которые можно было строго определенным образом переносить из точки в точку, что придавало информационному пространству строго оформленный, жесткий характер. Теперь у нас нечто аморфное и пластичное, так как вся геометрия информационного многообразия должна быть извлечена лишь из задания в нем множества координатных систем (7.69):

$$M \leftrightarrow (x^1, \ \ldots, \ x^n) \in \Omega,$$

связанных между собой произвольными взаимно однозначными и N раз непрерывно дифференцируемыми преобразованиями.

Тем не менее, понятие *тензора в данной точке информационного многообразия* без труда копируется с соответствующего понятия для аффинного информационного пространства в криволинейных координатах.

Мы говорим, что в данной точке М задан тензор, например, один раз контравариантный и два раза ковариантный, если в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ *нам задана система чисел* V^i_{jk} *(М), преобразующихся при переходе к другим координатам* $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ *по закону*

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)\,V^i_{jk}(M), \qquad (7.71)$$

где частные производные вычислены в точке М (именно в этом и проявляется то обстоятельство, что тензор задан в точке *М)*. Большей частью нам придется рассматривать не отдельный тензор, а *тензорное поле,* когда тензор данного строения, например, V^i_{jk}, задан в каждой точке *М* информационного многообразия (или, по крайней мере, в каждой точке некоторой поверхности или линии в нем). Тогда координаты тензора в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ являются определенными функциями точки

$$V^i_{jk} = V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n), \qquad (7.72)$$

причем здесь и везде далее эти функции мы считаем N—1 раз непрерывно дифференцируемыми. При переходе в новую координатную систему действует закон преобразования (7.71). Мы знаем, что $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$, равно как и $x^i(x^{1'} \ldots x^{n'})$, суть N раз непрерывно дифференцируемые функции; отсюда следует, что условие N—1-кратной непрерывной дифференцируемости для V^i_{jk} сохраняется и при переходе к $V^{i'}_{j'k'}$ (так как оно имеет место для множителей $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, появляющихся при преобразовании (7.71)).

Мы видим, что задание тензорного поля в информационном многообразии с формальной стороны вполне совпадает с заданием тензорного поля в криволинейных координатах аффинного информационного пространства (п 7.2). И в том и в другом случае в данной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ координаты тензора задаются как функции точки, и в том и в другом случае они преобразуются по закону (7.71) (который представляет собой повторение закона (7.23)).
Разница лишь в том, что в аффинном информационном пространстве мы могли трактовать V^i_{jk} *(М)* как координаты тензора, *вычисленные*

относительно локального аффинного репера в точке М. В информационном многообразии это невозможно, так как в нем не существует векторов, а тем самым и аффинных реперов, в том числе и локальных. Поэтому, давая наши определения тензора в точке и тензорного поля *для информационного многообразия,* мы были вынуждены скопировать именно формальную сторону дела. Роль локальных реперов в точке *М* играют у нас сами координатные системы $x^1, \ldots, x^n$, *рассматриваемые в бесконечно малой окрестности точки М.* В следующем пункте мы геометризируем понятие о координатной системе $x^1, \ldots, x^n$, рассматриваемой в бесконечно малом вблизи *М,* в виде *локального репера в касательном информационном пространстве.*

Для того чтобы задать тензор данного строения в определенной точке *М,* достаточно произвольно задаться его координатами V^i_{jk} в одной какой-либо координатной системе x^i. Тогда в любой другой координатной системе $x^{i'}$ координаты тензора $V^{i'}_{j'k'}$ определятся по закону (7.71), причем этот же закон преобразования уже автоматически будет действовать и при переходе от любой координатной системы $x^{i'}$ к любой координатной системе $x^{i''}$. Последнее выводится совершенно так же, как и в п. 4.13; разница лишь в обозначениях, а именно, роль взаимно обратных матриц $\| A_i^{i'} \|$ и $\| A_{i'}^{i} \|$ играют у нас

$$\left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right\|.$$

При этом соотношения $A^i_{i''} = A^i_{i'} A^{i'}_{i''}$, $A^{i''}_i = A^{i''}_{i'} A^{i'}_i$, используемые при выводе, имеют место и у нас:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}, \qquad \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{7.73}$$

Действительно, это не что иное, как формулы дифференцирования сложных функций x^i от $x^{i''}$ (и наоборот) при промежуточных аргументах $x^{i'}$. Если нам нужно задать тензор не в одной лишь точке, а целое тензорное поле, то в соответствии со сказанным можно задаться произвольными *N*—1 раз непрерывно дифференцируемыми функциями

$$V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1 \ \ldots, \ x^n) \tag{7.74}$$

в данной координатной системе x^i. Тем самым в каждой точке *М* будет определен тензор поля, координаты которого в любой другой координатной системе $x^{i'}$ определяются теми же формулами (7.71). Аналогичным образом можно поступать и в тех случаях, когда тензорное поле задается в информационном многообразии лишь на некоторой поверхности или линии.

Все операции тензорной алгебры со всеми их свойствами, установленные нами ранее, переносятся дословно и на тензоры, заданные *в одной и той же точке* нашего информационного многообразия. Действительно, расхождение будет здесь лишь в обозначениях: роль $A^i_{i'}, A^{i'}_i$ в тензорном законе преобразования будут играть

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(M) \text{ и } \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M).$$

Зато тензоры, заданные *в разных* точках информационного многообразия, отделены друг от друга, так сказать, пропастью: их нельзя даже сравнивать между собой, не говоря уже о том, чтобы производить над ними совместно какие-либо операции.

В самом деле, желая сравнить два тензора, заданных в разных точках M_1 и M_2, мы должны были бы каким-то образом в окрестности M_1 и в окрестности M_2 согласовать координатные системы, в которых вычисляются координаты этих тензоров. Но для такого согласования в *информационном многообразии* нельзя указать никакого приема. Ввиду широкого произвола в допустимых преобразованиях координат $x^1,\dots, x^n$ из задания координатной системы в окрестности M_1 нельзя извлечь никаких указаний на построение координатной системы в окрестности M_2.

Эту же мысль можно выразить и так: допустим, что два тензора в точках M_1 и M_2 имеют одинаковые координаты в данной координатной системе x^i:

$$V^i_{jk}(M_1) = V^i_{jk}(M_2).$$

Тем не менее эти тензоры не могут считаться равными, так как при переходе к новым координатам $x^{i'}$ указанное равенство, вообще говоря, нарушится. Это произойдет потому, что в законе преобразования (7.71) в первом случае будут фигурировать $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M_1)$, а во втором случае $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M_2)$, вообще говоря, не равные между собой.

Операции тензорной алгебры переносятся также и на тензорные поля в информационном многообразии, а именно, операции над полями определяются как операции над тензорами этих полей, *производимые в каждой точке М по отдельности.* Так, сложение тензорных полей (одинакового строения), например, $V^{ij}_k(M)$ и $U^{ij}_k(M)$, определяется как составление нового тензорного поля

$$W^{ij}_k(M) = V^{ij}_k(M) + U^{ij}_k(M);$$

умножение тензорных полей, например, $V^i_p(M)$, $U^{jk}_q(M)$, определяется как составление нового тензорного поля

$$W^{ijk}_{pq}(M) = V^i_p(M)\, U^{jk}_q(M);$$

свертывание тензорного поля, например, $W^{ijk}_{pq}(M)$, по второму верхнему и первому нижнему индексам означает построение нового тензорного поля

$$W^{ik}_q(M) = W^{isk}_{sq}(M);$$

наконец, подстановка индексов означает переход от тензорного поля, например, $W^{ijk}_{pq}(M)$, к тензорному полю того же строения $Z^{ijk}_{pq}(M)$, например, следующим образом:

$$Z^{ijk}_{pq}(M) = W^{jki}_{qp}(M).$$

Именно потому, что операции над тензорными полями сводятся таким образом к операциям над тензорами, *взятыми каждый раз в одной и той же точке М, эти операции сохраняют все свои обычные свойства.* Для краткости мы в дальнейшем часто будем говорить просто «тензор», имея в виду тензорное поле.

В противоположность алгебраическим операциям операция абсолютного дифференцирования тензорного поля в информационном многообразии не существует. В процессе дифференцирования нужно прежде всего брать приращение тензора при переходе из данной точки в бесконечно близкую, т. е. вычитать тензор в одной точке из тензора в другой точке, а это в информационном многообразии не имеет никакого смысла. Если же попробовать обойти это формальным дифференцированием координат тензора поля, например, $V^i_{kj}(x^1, \ldots, x^n)$, по координатам точки, то полученные величины $\dfrac{\partial V^i_{kj}}{\partial x^p}$ *не образуют тензора.* В самом деле, продифференцируем закон преобразования (7.71) почленно по $x^{p'}$ и получим тем самым величины $\dfrac{\partial V^{i'}_{k'j'}}{\partial x^{p'}}$ в новых координатах; тогда в правых частях придется дифференцировать, кроме множителя V^i_{kj}, множители $\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}$ и т. д., что приводит к дополнительным членам, портящим тензорный закон преобразования для $\dfrac{\partial V^i_{kj}}{\partial x^p}$. Более того, $\dfrac{\partial V^{i'}_{k'j'}}{\partial x^{p'}}$ зависят не только от $\dfrac{\partial V^i_{kj}}{\partial x^p}$ но и от самих V^i_{kj}.

7.8. Касательное аффинное информационное пространство

Опираясь на то, что в каждой точке *M* информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$ можно построить тензоры с обычными свойствами, мы постараемся геометризировать понятие информационное многообразия, насколько это возможно. Особое значение в этом смысле будут иметь один раз контравариантные тензоры ξ^i. В аффинном информационном пространстве такой тензор определил бы нам вектор; но в информационном многообразии у нас пока векторов нет, да в настоящем смысле слова никогда и не будет. Но мы все же постараемся связать *с каждым тензором* ξ^i *в данной точке M нашего информационного многообразия вектор* ξ, *в некотором условном смысле.* А именно, возьмем экземпляр n-мерного аффинного информационного пространства A_n с отмеченной в нем точкой *O*. *Отобразим каждый тензор* ξ^i *в данной точке M в некоторый вектор* ξ *информационного пространства* A_n *так, чтобы умножению тензора* ξ^i *на число и сложению двух тензоров* ξ^i *и* η^i *отвечали такие же операции над соответствующими векторами:*

$$\text{если } \eta^i = \alpha\xi^i, \qquad \text{то } \eta = \alpha\xi, \tag{7.75}$$

$$\text{если } \zeta^i = \xi^i + \eta^i, \qquad \text{то } \zeta = \xi + \eta. \tag{7.76}$$

Кроме того, мы требуем, чтобы *в этом отображении получались все векторы* ξ *пространства* A_n, а не происходило бы, например, отображение всех тензоров ξ^i в вектор-нуль.

Искомое отображение нетрудно построить следующим образом. Выберем среди тензоров ξ^i в точке *M* *n* линейно независимых

$$\xi^i_{(1)},\quad \xi^i_{(2)},\quad \ldots,\quad \xi^i_{(n)},$$

т. е. удовлетворяющих условию

$$\mathrm{Det}\left|\xi^i_{(j)}\right| \neq 0.$$

Тогда любой тензор ξ^i можно разложить по этим с некоторыми коэффициентами

$$\xi^i = \alpha^{(1)}\xi^i_{(1)} + \ldots + \alpha^{(n)}\xi^i_{(n)} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7.77}$$

где коэффициенты $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ без труда определяются из выписанной системы *n* уравнений с *n* неизвестными.

Теперь в A_n выберем произвольно *n* линейно независимых векторов

$$\xi_{(1)},\quad \xi_{(2)},\quad \ldots,\quad \xi_{(n)}$$

и каждому тензору ξ^i (7.77) сопоставим вектор ξ, в A_n определяемый формулой

$$\xi = \alpha^{(1)}\xi_{(1)} + \ldots + \alpha^{n}\xi_{(n)}.$$
(7.78)

Ясно, что отображение будет взаимно однозначным с соблюдением условий (7.75), (7.76). Следует подчеркнуть, что наше отображение относится именно *к тензорам* независимо от того, в какой координатной системе x^i они рассматриваются, и носит, таким образом, инвариантный характер.

Мы условимся, кроме того, отображать данную точку M информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$ в точку O пространства A_n; можно даже для наглядности представлять себе их отождествленными, так что пространство A_n «пришпилено» к информационному многообразию $\mathfrak{M}_n$ в данной его точке M.

Итак, для каждой точки M информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$ мы строим аффинное информационное пространство A_n, имеющее с информационным многообразием одну общую точку M, причем тензоры ξ^i в точке M с сохранением линейных зависимостей между ними изображаются векторами ξ в A_n. Такое информационное пространство A_n называется *касательным аффинным информационным пространством, а его векторы ξ —касательными векторами в данной точе M информационного многообразия* $\mathfrak{M}_n$. Будем кратко называть векторы ξ просто *векторами в данной точке M,* подразумевая, что они принадлежат касательному информационному пространству в этой точке. На первый взгляд кажется, что касательное информационное пространство привязано к информационному многообразию внешне и искусственно и с информационной стороны ничем не может его оживить. В действительности, однако, связь здесь более глубокая.

Рассмотрим кривую, проходящую через данную точку M информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$. Под кривой в информационном многообразии мы будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t), \tag{7.79}$$

причем будем предполагать, что $\frac{dx^i}{dt}$ не обращаются в нуль одновременно; функции $x^i\ (t)$ N раз непрерывно дифференцируемы.

Пусть при данном значении t мы находимся в точке M, а при $t+dt$ попадаем в бесконечно близкую точку M'. Дифференциалы координат $dx^i = dx^i(t)$ образуют в точке M один раз контравариантный тензор. Действительно, при переходе в информационном многообразии к новым координатам

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1.....x^n) \quad (7.80)$$

мы для того же бесконечно малого смещения по нашей кривой получаем по формуле полного дифференциала

$$dx^{i'}(t) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\, dx^i(t), \quad (7.81)$$

а это означает тензорный закон преобразования для dx^i. Но в таком случае в касательном аффинном информационном пространстве тензору $\xi^i = dx^i(t)$ должен отвечать (бесконечно малый) вектор, который мы обозначим $d\mathbf{x}$.

Итак, бесконечно малому смещению из точки М по кривой в информационном многообразии $\mathfrak{M}_n$ *отвечает бесконечно малый вектор* $d\mathbf{x}$ *в касательном информационном пространстве* A_n *в точке М.* Этот вектор играет примерно ту же роль, что и дифференциал $d\mathbf{x}$ радиуса-вектора $\mathbf{x}$ в аффинном информационном пространстве (п. 6.4). Но разница в том, что кривая теперь лежит в информационном многообразии, радиуса-вектора $\mathbf{x}$ (как и вообще векторов) в информационном многообразии не существует, и аналог вектора $d\mathbf{x}$ удается построить лишь в касательном в данной точке аффинном информационном пространстве A_n.

Как и в п. 6.4, вектор $d\mathbf{x}$ определяет отмечающее ему бесконечно малое смещение лишь с точностью 1-го порядка, так как задание $d\mathbf{x}$ равносильно заданию $dx^i(t)$, для самого же смещения нужно было бы знать $\Delta x^i(t)$.

Тем не менее полученная информационная картина имеет большое значение. Представим себе, что *из точки М по всевозможным направлениям берутся бесконечно малые смещения в информационном многообразии. Все эти смещения находят себе изображение в виде вполне определенных бесконечно малых смещений (векторов* $d\mathbf{x}$*) из той же точки М в касательном информационном пространстве, правда, если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка.* Тем самым касательное информационное пространство не только «пришпилено» к информационному многообразию в точке *М,* но и как бы «сливается с ним» в бесконечно малой окрестности точки *М,* однако лишь с точностью 1-го порядка. Теперь ясна аналогия между касательным информационным пространством и касательной плоскостью, например, к обыкновенной поверхности. Смещаясь из данной точки *М* на поверхности в бесконечно близкую точку *M'* по какой-либо кривой, мы можем, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, выразить это смещение бесконечно малым вектором в касательной плоскости. Таким же свойством обладает касательное информационное пространство по отношению к информационному многообразию (однако при этом не обязательно мыслить их вложенными в некоторое объемлющее пространство).

В дальнейшем мы будем говорить кратко «вектор ξ^i в точке *М»,* имея в виду соответствующий вектор ξ в касательном информационном пространстве A_n в точке *М.* В частности, под «вектором dx^i» мы будем понимать вектор $d\mathbf{x}$. Следует подчеркнуть, что *касательные информационные пространства A_n, взятые в разных точках информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$, не имеют между собой ничего общего.* У нас нет никаких данных для того, чтобы вектор, взятый в точке M_1 каким-либо мотивированным образом, отложить в точке M_2. Мы увидим далее, что устранение этого пробела будет означать превращение информационного многообразия в информационное пространство аффинной связности.

Вернемся к кривой (7.79). Рассмотрим вместо дифференциалов dx^i производные $\frac{dx^i}{dt}$ в данной точке *М.* Они, очевидно, тоже образуют тензор. Действительно, считая, что з (7.80) x^i зависят от t согласно (7.79), и дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}, \tag{7.82}$$

т.е. $\frac{dx^i}{dt}$ подчиняются тензорному закону преобразования. Следовательно, тензору $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ должен в касательном информационном пространстве отвечать определенный вектор ξ, который мы *будем называть касательным вектором к нашей кривой в точке М* (или просто «вектором $\frac{dx^i}{dt}$»*).* Конечно, касательный вектор определяется неоднозначно; при непрерывно дифференцируемом и обратимом преобразовании параметра

$$\tau = \tau(t), \quad t = t(\tau)$$

этот вектор умножается на $\frac{dt}{d\tau}$:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}.$$

Таким образом, он будет определен в данной точке для данной кривой с точностью до численного множителя $\frac{dt}{d\tau}$. Другими словами, все касательные векторы в данной точке *М* данной кривой коллинеарны, а потому они указывают в касательном информационном пространстве вполне определенную проходящую через точку *М* прямую; ее мы будем называть *касательной* к нашей кривой. Итак, касательная к кривой, заданной в информационном многообразии, лежит не в информационном многообразии, а в касательном информационном пространстве в соответствующей точке *M.*

Отметим, наконец, что утраченный нами в информационном многообразии *локальный аффинный репер* возрождается снова в касательном информационном пространстве. А именно, задавшись в информационном многообразии координатной системой x^i, рассмотрим в какой-нибудь точке *M* тензоры $\xi^i_{(1)}, \xi^i_{(2)}, \dots, \xi^i_{(n)}$, имеющие в *данной координатной системе* x^i следующие координаты:

$$\left.\begin{array}{l} \xi^1_{(1)},\ \xi^2_{(1)},\ \dots,\ \xi^n_{(1)} = 1,\ 0,\ \dots,\ 0, \\ \xi^1_{(2)},\ \xi^2_{(2)},\ \dots,\ \xi^n_{(2)} = 0,\ 1,\ \dots,\ 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi^1_{(n)},\ \xi^2_{(n)},\ \dots,\ \xi^n_{(n)} = 0,\ 0,\ \dots,\ 1. \end{array}\right\} \tag{7.83}$$

В краткой записи

$$\xi^i_{(j)} = \delta^i_j.$$

Отвечающие этим тензорам векторы *в касательном информационном пространстве* A_n обозначим соответственно $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и будем называть репер $\{M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в A_n локальным репером в данной точке *M* и в *данной координатной системе* x^i.

Значение локального репера основано на следующем факте: *если тензору* ξ^i *в точке M отвечает в касательном информационном пространстве вектор* ξ, *то его координаты относительно локального репера совпадают* с ξ^i. При этом предполагается, что координаты тензора ξ^i берутся в той же координатной системе x^i, в которой построен локальный репер. В самом деле, как видно из таблицы (7.83), всякий тензор ξ^i может быть разложен по тензорам $\xi^i_{(1)}, \dots, \xi^i_{(n)}$ с коэффициентами $\xi^1, \dots, \xi^n$. Соответственно этому при переходе к векторам касательного информационного пространства получаем:

$$\xi = \xi^1\mathbf{e}_1 + \dots + \xi^n\mathbf{e}_n, \tag{7.84}$$

откуда и вытекает, что координаты вектора ξ относительно локального репера равны $\xi^1, \dots, \xi^n$.

Из определения локального репера видно, что он зависит от той координатной системы x^i, к которой отнесено информационное многообразие. Можно даже уточнить это: вектор $\mathbf{e}_k$ есть касательный вектор к координатной линии x^k, отнесенной к параметру $t = x^k$. Действительно, вычисляем касательный вектор при k=1

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x^1} = \delta^i_1,$$

а значит, этот касательный вектор совпадает с $\mathbf{e_1}$.

При переходе к новой координатной системе $x^{i'}$ векторы локального репера в каждой точке M преобразуются по закону

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(M)\,\mathbf{e}_i \tag{7.85}$$

(т. е. так же, как и в криволинейных координатах в аффинном информационном пространстве). В самом деле, поскольку координаты ξ^i любого вектора ξ относительно локального репера совпадают с координатами соответствующего тензора ξ^i, то они преобразуются по закону

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\xi^i, \tag{7.86}$$

а следовательно, векторы репера $\mathbf{e}_i$ должны преобразоваться при помощи транспонированной обратной матрицы, т. е. согласно (7.85). Эту формулу нетрудно проверить и непосредственно, если учесть, что $\mathbf{e}_{i'}$ имеют координаты $\delta^{k'}{}_{i'}$ в новом локальном репере. Тем самым в старом локальном репере они имеют координаты

$$\xi^k_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\delta^{k'}_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}},$$

а именно это и выражает разложение (7.85).

Из формул (7.85), (7.86) следует общий результат, окончательно выясняющий роль локальных реперов в точке *M*. Координаты тензора, например $V^i{}_{jk}$, заданного в точке *M* информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$ ведут себя в то же время как координаты тензора в касательном информационном пространстве, взятые относительно локального репера. Действительно, преобразование координат x^i влечет за собой преобразование локального репера (7.85). Рассмотрим тензор, например $V^i{}_{jk}$, *в касательном информационном пространстве, отнесенный к локальному реперу;* закон преобразования его координат будет:

$$V^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)\,V^i_{jk},$$

так как (7.85) дает образец преобразования для ковариантных индексов, а (7.86) — для контравариантных. Но этот же вид имеет закон преобразования (7.71) для координат тензора в данной точке *M* информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$. *Поэтому безразлично, сказать ли, что* $V^i{}_{jk}$ *суть координаты тензора в информационном многообразии* $\mathfrak{M}_n$ *в данной его точке M относительно координатной системы* x^i *или в касательном аффинном информационном* *пространстве A_n в точке М относительно соответствующего локального репера.* Закон преобразования в обоих случаях будет один и тот же.

7.9. Поверхности в информационном многообразии

Под элементарной *m-мерной поверхностью* $\mathfrak{M}_m$ в *n*-мерном элементарном информационном многообразии $\mathfrak{M}_n$ мы будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.87}$$

где u^1, ..., u^m—независимые переменные (параметры), пробегающие некоторую связную *m*-мерную область изменения Ω_u. При этом мы будем предполагать функции $x^i(u^1, \ldots, u^m)$ непрерывно дифференцируемыми *N* раз (*N* — класс информационного многообразия) и удовлетворяющими условию *регулярности поверхности:*

$$\text{ранг матрицы} \begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \frac{\partial x^2}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^m} \end{Vmatrix} \text{ равен } m, \tag{7.88}$$

т. е. строки этой матрицы линейно независимы. Элементарная выкладка показывает, что это условие инвариантно относительно любого преобразования координат x^i в $\mathfrak{M}_n$.

Число измерений *m* нашей поверхности может принимать значения 1, 2, ..., *n*—1. При *m*=1 мы возвращаемся к *кривой* (7.79), причем условие (7.88) в этом случае означает, что состоящая из одной строки матрица

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t} & \frac{\partial x^2}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial t} \end{Vmatrix} \tag{7.89}$$

имеет ранг 1, т. е. выписанные производные не обращаются в нуль одновременно (это мы предполагали и для кривой (7.79)). В случае *m*=*n*—1 поверхность называется *гиперповерхностью;* условие (7.88) принимает вид

$$\text{ранг матрицы} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{matrix} \right\| \text{ равен } n-1. \tag{7.90}$$

Смысл условия (7.88) состоит в том, чтобы предотвратить появление особых точек на поверхности и, особенно, ее вырождение в образ меньшего числа измерений. Так, если функции, стоящие в правых частях (7.87), являются константами, то условия дифференцируемости соблюдаются прекрасно; но поверхность вырождается в точку. Условие (7.88) делает, однако, невозможным как этот, так и другие не столь грубые случаи вырождения (например, когда при $m = 5$ поверхность оказывается фактически двумерной и т. п.).

Более точно, условие (7.88) означает следующее. Допустим для простоты, что в данной точке ранговый минор образован первыми m столбцами:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial u^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда функциональная зависимость первых m текущих координат x^1 от $u^1, ..., u^m$

$$x^1 = x^1(u^1, ..., u^m)..... \quad x^m = x^m(u^1, ..., u^m)$$

обладает якобианом, отличным от нуля, и поэтому ее в окрестности данной точки можно обратить:

$$u^1 = u^1(x^1, ..., x^m), ..., \quad u^m = u^n(x^1, ..., x^m).$$

Вставляя эти (тоже N раз непрерывно дифференцируемые) функции вместо $u^1, ..., u^m$ в остальные уравнения (7.71) ($i = m+1, m+2, ..., n$), мы получим уравнения поверхности в виде

$$\left. \begin{aligned} x^{m+1} &= f_{m+1}(x^1, \ldots, x^m), \\ x^{m+2} &= f_{m+2}(x^1, \ldots, x^m), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^n &= f_n(x^1, \ldots, x^m). \end{aligned} \right\} \tag{7.91}$$

Итак, в окрестности каждой данной точки уравнения поверхности (с точностью до нумерации координат x^i) можно записать в виде (7.91). Здесь роль независимых параметров $u^1, ..., u^m$ играют координаты

$x^1, \ldots, x^m$, а потому все m параметров являются здесь существенными в том смысле, что любое их изменение влечет за собой смещение точки поверхности. Вырождение m-мерной поверхности в образ низшего числа измерений, т. е. возможность задать ее при помощи меньшего числа параметров, здесь, очевидно, отпадает; особые точки также становятся невозможными.

Элементарную поверхность всегда можно рассматривать как m-мерное элементарное информационное многообразие. Действительно, не меняя поверхности, можно подвергать параметры u^α на ней взаимно однозначному и в обе стороны N раз непрерывно дифференцируемому преобразованию

$$u^{\alpha'} = f_\alpha(u^1, \ldots, u^m), \quad u^\alpha = g_\alpha(u^{1'}, \ldots, u^{m'}). \tag{7.92}$$

Здесь $u^1,\ldots, u^m$ пробегают область изменения Ω_u, а $u^{1'}, \ldots ,u^{m'}$ — некоторую область изменения Ω'_u. Ясно, что после такого преобразования параметров уравнения поверхности можно снова записать в виде

$$x^i = x^i\,(u^{1'}, \ldots, u^{m'}),$$

где новые функции $x^i(u^{1'}, \ldots, u^{m'})$ удовлетворяют прежним условиям, в том числе и (7.88), как можно показать после простой выкладки. Рассматривая параметры u^α как координаты на поверхности, заданные с точностью до указанного преобразования, мы вправе считать нашу поверхность m-мерным элементарным информационным многообразием $\mathfrak{M}_m$ согласно определению последнего (п. 7.6). В связи с этим все построения, сделанные нами для информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$ в координатах $x^1, \ldots, x^n$, повторяются и для нашей поверхности в координатах $u^1, \ldots, u^m$. Все сказанное относится к элементарной поверхности. В общем же случае m-мерную поверхность в n-мерном информационном многообразии $\mathfrak{M}_n$ можно определить как множество точек в $\mathfrak{M}_n$, взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны отображенное на некоторое информационное многообразие $\mathfrak{M}_m$, и притом так, что отдельные элементарные информационные многообразия $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, из которых $\mathfrak{M}_m$ «склеено», отображаются в элементарные поверхности (7.87). Тем самым любую поверхность в некоторой окрестности любой ее точки можно считать элементарной поверхностью. Так как нас дальше будут интересовать только локальные свойства, то фактически мы можем ограничиться лишь элементарными поверхностями. Так мы и будем поступать.

На поверхности можно рассматривать тензоры как в отдельных точках *M,* так и тензорные поля. При этом координаты тензора, например $V^{\alpha}_{\beta\gamma}$, подчинены закону преобразования

$$V^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(M)=\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^{\alpha}}(M)\,\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}(M)\,\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial u^{\gamma'}}(M)\,V^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{7.93}$$

Кривую на поверхности мы будем задавать уравнениями

$$u^1=u^1(t),\ \ \ldots,\ \ u^m=u^m(t), \tag{7.94}$$

где функции $u^{\alpha}(t)$ N раз непрерывно дифференцируемые, и $\frac{du^{\alpha}}{dt}$ не обращаются в нуль одновременно. Вставляя функции (7.94) в (7.87), мы получаем функциональную зависимость x^i от t, что действительно определяет кривую в нашем информационном многообразии. Правда, еще нужно проверить условие (7.89). Найдем касательный вектор $\frac{dx^i}{dt}$ к этой кривой, дифференцируя x^i как сложные функции:

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}}\frac{du^{\alpha}}{dt}. \tag{7.95}$$

Здесь имеется в виду суммирование по α=1, 2, ..., *m.* Вообше мы условимся считать, что греческие индексы относятся к параметрам на поверхности и пробегают значения 1, 2, ..., *m,* в то время как латинские пробегают значения 1, 2, . .., *n* и относятся к многообразию $\mathfrak{M}_n$. Заметим, что согласно (7.95) строка, составленная из производных

$$\frac{dx^1}{dt},\ \frac{dx^2}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx^n}{dt},$$

представляет собой линейную комбинацию строк матрицы (7.88) с коэффициентами $\frac{du^{\alpha}}{dt}$. Эти коэффициенты, как было оговорено, не все равны нулю, а следовательно, в силу линейной независимости строк матрицы (7.88) элементы строки (7.89) не могут обращаться в нуль одновременно. Условие (7.89) проверено.

Важный информационный смысл (7.95) состоит в том, что это соотношение «переводит» тензор $\frac{du^{\alpha}}{dt}$ на поверхности $\mathfrak{M}_m$ в тензор $\frac{dx^i}{dt}$ в информационное многообрази $\mathfrak{M}_n$. Связь между этими двумя тензорами является инвариантной и заключается в том, что они получены дифференцированием текущих координат соответственно u^{α} и x^i *по одному и тому же параметру вдоль одной и той же кривой в* *одной и той же точке.* Тем самым каждый тензор $\frac{du^\alpha}{dt}$ через посредство тензора $\frac{dx^i}{dt}$ изображается некоторым вектором в $\mathfrak{M}_n$ (т. е. в касательном пространстве A_n).

Будем проводить теперь по поверхности через данную ее точку M всевозможные кривые (7.94). Для всех этих кривых строим в точке M касательные векторы (7.95). Тогда под видом $\frac{du^\alpha}{dt}$ мы будем получать всевозможные тензоры ξ^α в $\mathfrak{M}_m$ (в данной его точке M). Им соответствуют векторы $\xi^i=\frac{dx^i}{dt}$ в $\mathfrak{M}_n$ согласно (7.95):

$$\xi^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha. \qquad (7.96)$$

Они представляют собой, следовательно, *всевозможные* линейные комбинации для векторов

$$\xi^i_{(1)}=\frac{\partial x^i}{\partial u^1},\ \ldots,\ \xi^i_{(m)}=\frac{\partial x^i}{\partial u^m}, \qquad (7.97)$$

линейно независимых в силу (7.88).

В результате векторы ξ^i, отвечающие всевозможным тензорам ξ^α в данной точке информационного многообразия $\mathfrak{M}_m$, заполняют в касательном пространстве A_n m-мерную плоскость A_m, проходящую через M (предполагается, что векторы ξ^i откладываются от M).

Плоскость A_m можно рассматривать как *касательное информационное пространство к информационному многообразию* $\mathfrak{M}_m$ в точке M, так как векторы ξ^i плоскости A_m служат изображением всевозможных тензоров ξ^α *в данной точке M* информационного многообразия $\mathfrak{M}_m$ (с сохранением линейных зависимостей между ними).

С другой стороны, векторы $\xi^i=\frac{dx^i}{dt}$ суть всевозможные касательные векторы к поверхности $\mathfrak{M}_m$ в данной точке M, т. е. касательные к всевозможным кривым на $\mathfrak{M}_m$ в этой точке. Поэтому порожденную ими плоскость A_m можно рассматривать *как касательную плоскость к поверхности* $\mathfrak{M}_m$.

Первая точка зрения на A_m является, так сказать, внутренней, вторая — внешней. (Пользуясь рис. 7.1, нужно помнить, что изображенные на нем векторы и плоскость A_m на самом деле не принадлежат информационному многообразию $\mathfrak{M}_n$, в котором расположена поверхность $\mathfrak{M}_m$, и, строго говоря, должны были бы изображаться отдельно в касательном информационном пространстве A_n.)

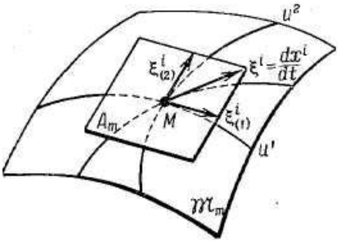


Рис. 7.1.

Векторы (7.97), на которых строится A_m, являются касательными векторами к координатным линиям u^1, ..., u^m (под координатной линией u^α мы понимаем кривую на поверхности, вдоль которой меняется лишь данный параметр постоянных значениях остальных параметров). В самом деле, если в (7.94) положить, в частности,

$$u^1 = t, \quad u^2 = \text{const}, \quad ..., \quad u^m = \text{const},$$

т. е. рассмотреть координатную линию u^1, то (7.95) дает

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1},$$

что и показывает, что $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$ есть вектор, касательный к линии u^1.

С точки зрения многообразия $\mathfrak{M}_m$ векторы (7.97) образуют локальный репер, что легко обнаружить подсчетом их координат в $\mathfrak{M}_m$: например, координаты первого из них будут $\xi^\alpha = \delta^\alpha_1$, и т. д.

7.10. *n*-мерное информационное многообразие

В этом пункте мы дадим точное определение понятия информационного многообразия, пользуясь уже установленным нами понятием элементарного информационного многообразия.

Мы будем называть *n-мерным информационным многообразием класса N множество* $\mathfrak{M}$*, в котором задана конечная или счетная система подмножеств* $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, удовлетворяющая следующим условиям (элементы множества $\mathfrak{M}$ будем называть точками).

1°. Каждое подмножество $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ есть элементарное *n*-мерное информационное многообразие класса *N*.

2°. Каждая точка *M* множества $\mathfrak{M}$ входит, по крайней мере, в одно $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$

3°. Если два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ пересекаются по некоторому непустому множеству $\mathfrak{R}$, то оно образует (вообще говоря, несвязную) *область* как в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, так и в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$*;* при этом, когда точка *M* пробегает $\mathfrak{R}$, ее координаты y^i в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ являются *N* раз непрерывно дифференцируемыми однозначными функциями от ее координат x^i в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, равно как и обратно.

4°. Если M_1 и M_2 — две *различные* точки $\mathfrak{M}$, причем $M_1 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_1)}$, $M_2 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_2)}$ (допускается, в частности, и совпадение $\alpha_1 = \alpha_2$), то в $\mathfrak{M}_{(\alpha_1)}$ найдется область $\mathfrak{R}_1 \ni M_1$ и в $\mathfrak{M}_{(\alpha_2)}$ — область $\mathfrak{R}_2 \ni M_2$, не пересекающиеся между собой.

5°. Любые два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ можно связать конечной цепочкой последовательно пересекающихся между собой подмножеств $\mathfrak{M}_{(\gamma)}$; точнее, существует конечная последовательность $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)}$ (i=1, 2, ..., s), причем $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)}$ и $\mathfrak{M}_{(\gamma_{i+1})}$ всегда между собой пересекаются и, кроме того, $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ пересекается с $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)}$, а $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ — с $\mathfrak{M}_{(\gamma_s)}$.

Смысл этих условий следующий. Условия 1° и 2° означают, что $\mathfrak{M}$ «склеено» из конечного или счетного запаса элементарных информационных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, частью, возможно, не имеющих общих точек, частью налегающих друг на друга или даже заключающих одно другое. В последнем случае $\mathfrak{M}_{(\beta)}$, входящее в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, является по существу лишним и может быть изъято без ущерба для дела.

Условие 3° требует, чтобы (непустое) пересечение $\mathfrak{R}$ элементарных информационных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ было областью (открытым множеством) и в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$. Это значит, что если точка $M \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}$ склеена с какой-то точкой $L \in \mathfrak{M}_{(\beta)}$, то и некоторая окрестность точки *M* в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ тоже подклеивается к $\mathfrak{M}_{(\beta)}$, т. е. не может быть так, чтобы $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ до какого-то места были подклеены друг к другу, а дальше отходили бы одно от другого. Другими словами, склеенное из $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ информационное многообразие $\mathfrak{M}$ не должно «ветвиться» вследствие неаккуратной, неполной подклейки информационных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ друг к другу.

Далее, условие 3° требует, чтобы в склеенных местах информационных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ их дифференцируемая структура была одинаковой, т. е. координаты в одном и в другом информационном многообразии были связаны N раз непрерывно дифференцируемыми преобразованиями. Действительно, если бы этого не было, то мы не знали бы, какую дифференцируемую структуру приписать информационному многообразию $\mathfrak{M}$ в области $\mathfrak{R}$: заимствованную из $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ или из $\mathfrak{M}_{(\beta)}$? При наличии же нашего условия это становится безразличным. Координатной системой в $\mathfrak{M}$ мы будем называть любую координатную систему в любом $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.

Если нас интересуют лишь чисто локальные свойства информационноого многообразия $\mathfrak{M}$, т. е. его поведение в некоторой окрестности произвольной точки M, то для этого перечисленных требований 1° — 3° достаточно. Однако если ограничиться этим, то мы допустим существование информационных многообразий, весьма неприятных в некоторых отношениях. Прежде всего, несмотря на условие 3°, все еще возможно «ветвление» информационного многообразия $\mathfrak{M}$. Рассмотрим простой пример: пусть $n = 1$ и $\mathfrak{M}$ склеивается из двух одномерных элементарных информационных многообразий $\mathfrak{M}_{(1)}$, $\mathfrak{M}_{(2)}$, представляющих собой интервалы (—1, 1) на осях x^1, x^2 соответственно: $\mathfrak{M}_{(1)}\{-1 < x^1 < 1\}$, $\mathfrak{M}_{(2)}\{-1 < x^2 < 1\}$. Образуем $\mathfrak{M}$, склеивая $\mathfrak{M}_{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{(2)}$, следующим образом: точки x^1 при $-1 < x^1 < 0$ отождествляются с точками x^2 при $-1 < x^2 < 0$ по принципу равенства координат $x^1 = x^2$; точки x^1 при $0 \le x^1 < 1$ и точки x^2 при $0 \le x^2 < 1$ не склеиваются ни с чем.
В результате $\mathfrak{M}$ будет состоять из интервала $-1 < x < 0$ (это будет область пересечения $\mathfrak{R}$) и примыкающего к нему *раздвоенного* полуинтервала $0 \le x < 1$, т. е. $\mathfrak{M}$ будет ветвиться.

Между тем условие 3°, как легко проверить, полностью соблюдается: ветвление этого типа оно неспособно устранить, хотя и устраняет ветвление более грубого характера, например, если бы мы составили $\mathfrak{M}$ из полуинтервала $-1 < x \le 0$ и из примыкающего к нему *раздвоенного* интервала $0 < x < 1$ (действительно, в этом случае $\mathfrak{R}$ $\{-1 < x \le 0\}$ не будет областью).

Чтобы устранить не только такие, но и более тонкие случаи ветвления $\mathfrak{M}$, подобные приведенному выше примеру, мы вводим условие 4° *(аксиому Хаусдорфа).* Теперь и первый наш пример становится невозможным, так как условие 4° в нем нарушено для точек $x^1 = 0$ и $x^2 = 0$ (в $\mathfrak{M}$ — это различные точки). Действительно, какими бы интервалами ни окружать эти точки в $\mathfrak{M}_{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{(2)}$ соответственно, эти интервалы всегда будут иметь общие точки в склеенной части $-1 < x < 0$.

Наконец, мы не хотим, чтобы информационное многообразие $\mathfrak{M}$ состояло из отдельных, ничем не связанных между собой кусков. Условие 5° (условие связности информационного многообразия) устраняет эту возможность и превращает информационное многообразие в единое целое, не распадающееся на не пересекающиеся между собой информационные многообразия.

Отметим, что в информационно многообразии $\mathfrak{M}$ определяется понятие области (открытого множества): это множество точек, содержащее вместе с каждой своей точкой M_0 (x^i_0) и все точки $M(x^i)$, для которых разности x^i — x^i_0 по модулю меньше некоторого $\delta>0$ (δ зависит от M_0); под x^i понимается какая-либо координатная система в каком-нибудь элементарном информационном многообразии $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ содержащем M_0. Нетрудно показать, что смысл определения не зависит от того или иного выбора этой координатной системы.

Определенный таким образом класс открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического информационного пространства, специальным случаем которого и является информационное многообразие.

Далее, мы говорим, что переменная точка M стремится к точке M_0 (стремится или по последовательности положений M_k (k=1, 2, ...), или как функция $M(t)$ непрерывно растущего (убывающего) параметра $t \to t_0$), если точка M с некоторого момента находится в области действия координатной системы, включающей точку M_0, и координаты x^i точки M стремятся к координатам x^i_0 точки M_0 (если сказанное имеет место для одной координатной системы, включающей M_0, то и для любой другой — тоже).

В силу условия 4° *переменная точка M не может стремиться одновременно к двум различным точкам M_0, M_0'.*

Мы называем *кривой* «параметризованное» множество точек $M(t)$, где $t_1 \leq t \leq t_2$, если при достаточно малых изменениях любого данного значения t точка $M(t)$ остается в пределах одной координатной системы, причем ее текущие координаты $x^i(t)$ — N раз непрерывно дифференцируемые функции.

Далее мы говорим, что в $\mathfrak{M}$ задано тензорное поле, например V^i_{jk}, если в $\mathfrak{M}$ в каждой точке M и в каждой координатной системе x^i (действующей в области, содержащей точку M) задана система чисел V^i_{jk} (M), которые N—1 раз непрерывно дифференцируемым образом зависят от координат $x^1, \ldots, x^n$ точки M и преобразуются (при преобразовании координатной системы) согласно (7.71).

Аналогично определяется тензорное поле, заданное лишь в некоторой области $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ или на поверхности $\mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$.

Наше определение информационного многообразия дает нам все нужное, но имеет тот недостатком, что дает и кое-что лишнее; а именно, в нашем определении способ склеивания информационного многообразия из элементарных информационных многообразий рассматривается наряду с его окончательным результатом — готовым информационным многообразием. Между тем нас интересует лишь последнее, и мы не будем считать два экземпляра одного и того же информационного многообразия различными, если они по-разному разбиты на элементарные информационные многообразия. Например, сферу можно составить, как уже указывалось, склеиванием двух (слегка продолженных за края) полусфер, а можно составить и склеиванием внутренностей нескольких сферических треугольников, заходящих один на другой. Тем не менее сфера в обоих случаях представляет одно и то же информационное многообразие. Поэтому наше определение нужно несколько дополнить. С этой целью дадим определение диффеоморфизма двух информационных многообразий.

Два информационные многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ одного числа измерений n и одного класса N называются диффеоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, обладающее следующим свойством: пусть $M \in \mathfrak{M}$ и $M' \in \mathfrak{M}'$ — любые две отвечающие друг другу точки и пусть M принадлежит некоторому элементарному информационному многообразию $\mathfrak{M}_{(\alpha)} \subset \mathfrak{M}$ с координатной системой x^i, а M' — элементарному информационному многообразию $\mathfrak{M}_{(\alpha')} \subset \mathfrak{M}'$ с координатной системой $x^{i'}$; тогда соответствие между точками информационных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ можно записать в виде

$$x^n = f_i(x^1 \ \ldots, x^n), \quad x^i = g_i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}),$$

по крайней мере, в пределах некоторой области изменения x^i, заключающей точку M, и соответствующей ей области изменения $x^{i'}$ заключающей точку M', причем функции f_i, g_i N раз непрерывно дифференцируемые.

Под областью изменения x^i здесь подразумевается не обязательно область изменения, которую пробегают x^i, когда M пробегает $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, а, вообще говоря, некоторая ее подобласть; аналогично и для $x^{i'}$.

Коротко говоря, диффеоморфизм информационных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ есть взаимно однозначное соответствие, N раз непрерывно дифференцируемое в обе стороны в тех пределах, в каких его удается записать в виде функциональной зависимости между координатами x^i в информационном многообразии $\mathfrak{M}$ и $x^{i'}$ в информационном многообразии $\mathfrak{M}'$, причем это должно удаваться, по крайней мере, вблизи любой пары соответствующих точек *M* и *M'*.

Теперь к нашему определению информационного многообразия следует добавить только, что *всякое информационное многообразие будет интересовать нас лишь с точностью до замены, диффеоморфным информационным многообразием.* Этим мы отвлекаемся от ненужных по сути дела подробностей, именно от способа составления данного информационного многообразия из элементарных кусков.

7.11. Аналитические информационные многообразия

В этом разделе *k* — поле, полное относительно нетривиального абсолютного значения.

7.11.1. Информационные карты и информационные атласы

Пусть *X* — топологическое информационное пространство. *Информационной картой* *c* информационного пространства *X* называется тройка $c = (U, \varphi, n)$, где

(1) *U* — открытое подмножество в *X*,

(2) *n* — целое неотрицательное число,

(3) φ - отображение *U* в k^n, причем множество $\varphi(U)$ открыто в k^n и отображение $\varphi: U \to \varphi(U)$ — гомеоморфизм.

Обозначения:

$U = O(c)$ — открытое множество информационной карты *c*;

$\varphi = M(c)$ — отображение информационной карты *c*;

$n = \dim_k(c)$ — размерность информационной карты *c*.

Пусть заданы две информационные карты $c = (U, \varphi, n)$ и $c'=(U', \varphi', n')$ информационного пространства *X*. Мы скажем, что *c* и *c' согласованны*, если отображение $\varphi' \circ \varphi^{-1} |\varphi(V)$ и $\varphi \circ \varphi'^{-1} |\varphi'(V)$ аналитичны, где

$V=U \bigcap U'$ (см. диаграмму).

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi(V)\subset k^{n} \arrow[d, shift right, "\varphi'\circ\varphi^{-1}"'] \\
V \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\
 & \varphi'(V)\subset k^{n'} \arrow[u, shift right, "\varphi\circ\varphi'^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Если c и c' согласованны и $V \neq 0$, то $n = n'$.

Семейство информационных карт $\{c_i\}_{i\in I}$ называется *информационным покрытием* информационного пространства X, если
$$\bigcup_{i\in I} O(c_i) = X.$$

Информационным атласом А информационного пространства X называется такое семейство информационных карт, которое образовывает информационное покрытие информационного пространства X, в котором любые две информационные карты согласованы.

Мы будем говорить, что два информационных атласа A і A' *согласованы,* если выполненно одно из следующих двух эквивалентных условий:

(1) $A \bigcup A'$ - информационный атлас;

(2) если $c\in A$ і $c'\in A$, то информационные карты c и c' информационно согласованы.

Замечание. Информационная согласованность двух информационных атласов есть отношения эквивалентности. Действительно, рефлексивность и симметричность очевидны; докажем транзитивность. Пусть дано три информационных атласа A_1, A_2 и A_3, причем информационный атлас A_1 информационно согласован с A_2 и информационный атлас A_2 информационно согласован с A_3. Пусть $c_1\in A_1$ и $c_3\in A_3$. Мы должны показать, что c_1 и c_3 согласованны. Обозначим через V пересечение $O(c_1)\bigcap O(c_3)$. Случай $V=\varnothing$, тривиален. Пусть $V\neq\varnothing$, и пусть $\varphi_1=M(c_1)$ и $\varphi_3=M(c_3)$. В силу симметрии достаточно установить, что отображение $\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}$ аналитично на $\varphi_1(V)$. Для этого мы покажем, что это отображение аналитично в каждой точке вида $\varphi_1(x)$ $(x\in V)$. Выберем информационную карту $c_2 = (U, \varphi, n) \in A_2$, такую, что $x \in U$. Отображение
$$\varphi\circ\varphi_1^{-1}\colon\ \varphi_1(U\bigcap V)\to\varphi(U\bigcap V)$$
аналитично в точке $\varphi_1(x)$, отображение

$$\varphi_3 \circ \varphi^{-1}: \ \varphi(U \cap V) \to \varphi_3(U \cap V)$$

аналитично в точке $\varphi(x)$. Итак, отображение

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_3 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$$

аналитично в точке $\varphi_1(x)$, что и нужно было доказать.

7.11.2. Определение аналитического информационного многообразия

Пусть *X* — топологическое информационное пространство.

Структурой *аналитического информационного многообразия* в информационном пространстве *X* называется класс эквивалентности согласованных информационных атласов этого информационного пространства.

Можно дать и другое определение. Будем говорить, что информационный атлас *А полон,* если любая информационная карта *с* информационного пространства *X,* которая согласована со всеми информационными картами этого информационного атласа, тоже принадлежит этому информационному атласу. Понятно, что класс эквивалентности всех согласованных информационных атласов данного информационного пространства содержит только один полный информационный атлас. Таким образом, мы приходим ко второму определению: структурой *аналитического информационного многообразия* называется полный информационный атлас информационного пространства *X*.

Всюду в дальнейшем символ *X* обозначает топологическое информационное пространство, которое имеет фиксированную структуру аналитического информационного многообразия; его полный информационный атлас мы будем обозначать через *A(X).* Говоря об информационных картах этого информационного пространства, мы будем иметь в виду только информационные карты информационного атласа *A(X).*

Пусть $x \in X$. *Размерностью* $\dim_x X$ *информационного многообразия X в точке x* называется размерность любой информационной карты *с,* такой, что $x \in O(c)$. Функция $x \mapsto \dim_x X$ локально постоянна на *X*. Если эта функция - глобальная константа, которая равная *n*, то мы говорим, что информационное многообразие *X* имеет всюду одинаковую размерность, и называем его *n-мерным информационным многообразием.*

В отдельных случаях, которые представляют наибольший интерес, принятая следующая терминология:

если k=**R**, говорят, что *X* — *вещественное аналитическое* информационное многообразие;

если k=**C**, говорят, что X — *комплексное аналитическое* информационное многообразие;

если k = $\mathbf{Q}_p$, где p — некоторое простое число, говорят, что X есть *p-адическое аналитическое* информационное многообразие.

7.11.3. Топологические свойства информационных многообразий

Пусть $x \in k^n$, $n\in$ Z, $n\geq 0$, и пусть $r\in$ **R**, $r > 0$. Обозначим через $B(r)(x)$ шар радиуса r с центром в точке x, т.е. полицилиндр $P(s)(x)$, где

$$s = (r, ..., r).$$

Подмножество $B \subset X$ мы будем называть *шаром* в том случае, когда имеется информационная карта $c=(U, \varphi, n)$, такая, что $B \subset U$ и φ (B) — обычный шар в информационном пространстве k^n. Следующие свойства почти очевидны.

(1) Каждая точка $x\in X$ обладает окрестностью, которая является шаром. В частности, X – локально полное метрическое пространство (а следовательно, пространство Бэра).

(2) Если k — локально компактное поле, то шар информационного пространства X компактен. В частности, если A - хаусдорфово информационное пространство, то оно локально компактно.

(3) Предположим, что X — регулярное информационное пространство, а k — неархимедово поле. Тогда каждая точка $x\in X$ обладает базисом окрестностей, одновременно открытых и замкнутых.

Из всех перечисленных свойств только последнее, пожалуй, не совсем очевидно; докажем его. Пусть B — шар информационного многообразия X, содержащий точку x, и пусть $c=(U, \varphi, n)$ - информационная карта этого информационного многообразия, такая, что $B\subset U$ и $\varphi(B)$ - шар в k^n. В силу известных свойств неархимедовых полей шар $\varphi(B)$ является открытым множеством информационного пространства k^n. Таким образом, само множество B тоже открыто в X. Поскольку информационное пространство X регулярно, найдется окрестность V точки x, такая, что $V\subset B$ и V замкнута в X. Рассмотрим совокупность всех шаров с центром в точке $\varphi(x)$, содержащихся в множестве $\varphi(V)$, и возьмем их прообразы (при отображении φ). Нетрудно видеть, что множество этих прообразов образует фундаментальную систему окрестностей точки x, каждая из которых одновременно открыта и замкнута.

7.11.4. Простейшие примеры информационных многообразий

1. X — дискретное информационное пространство $(n = 0)$.

2. $X=V$, где V — конечномерное векторное информационное пространство над k, $\dim_k V=n$. Обозначим через A набор информационных карт вида $c=(V, \varphi, n)$, где $\varphi: V \to k^n$ - линейный изоморфизм. Легко проверяется, что все эти информационные карты согласованы, т.е. множество A образует информационный атлас информационного пространства V, которое таким образом наделяется структурой аналитического информационного многообразия.

3. Пусть X — информационное многообразие и U — его открытое подмножество. Возьмем полный информационный атлас $A(X)$ нашего информационного многообразия и рассмотрим множество

$$A_U = \{c \in A(X) \mid O(c) \subset U\}.$$

Очевидно, A_U является полным информационным атласом множества U. Подпространство U вместе с этим информационным атласом называется *открытым информационным подмногообразием* информационного многообразия X.

4. Пусть X — топологическое информационное пространство, и пусть

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Предположим, что

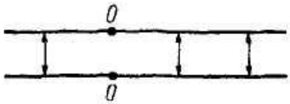
а) все множества U_i открыты в X;

б) каждое информационное подпространство U_i наделено структурой аналитического информационного многообразия;

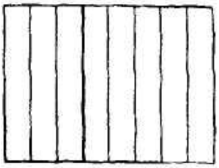
в) для любых i и j структуры аналитического информационного многообразия, индуцированные на $U_i \bigcap U_j$ информационными многообразиями U_i и U_j, совпадают.

Тогда в информационном просторанстве X существует единственная структура аналитического информационного многообразия, индуцирующая на множествах U_i заданную структуру.

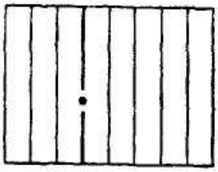
5. Прямая с „двойной точкой". Пусть $k = \mathbf{R}$. Возьмем два экземпляра поля $\mathbf{R}$ и отождествим их во всех точках, кроме нуля:



Полученное информационное многообразие X можно интерпретировать как факторпространство. Для этого рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2$, расслоенную на прямые:



Если отождествить между собой все точки каждого слоя, то факторпространством будет обыкновенная прямая **R**. Выколем теперь из $\mathbf{R}^2$ начало координат и отождествим только те точки, которые лежат в связной компоненте каждого пласта:



Факторпространством будет в точности прямая с двойным нулем.

Заметим, что построенное информационное многообразие не является хаусдорфовым.

7.11.5. Морфизмы

Пусть X и Y - два аналитических информационных многообразия. Отображение f: $X \to Y$ называется *аналитическим* отображением, или *морфизмом,* если

(1) отображение f непрерывно;

(2) отображение f „локально аналитично", т.е. существуют информационный атлас A информационного просторанства X и информационный атлас B информационного просторанства Y, такие, что для любых двух информационных карт $c= (U, \varphi, m) \in A$ и $d = (V, \psi, n) \in B$ композиция

$$\varphi(W) \xrightarrow{\varphi^{-1}} W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

аналитична (здесь $W = U \bigcap f^1 (V)$).

Замечание. 1. Условие 2 мы назвали „локальной аналитичностью", поскольку в координатной записи композиция $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ задается набором n аналитических функций от m переменных.

2. Свойство беспрерывного отображения f быть морфизмом не зависит от выбора информационных атласов A и B. Это можно показать примерно теми же рассуждениями, которые использовались при доказательстве того факта, что согласованность информационных атласов есть отношения эквивалентности.

Следующие формальные свойства морфизмов почти непосредственно слудуют из определения.

1) Композиция морфизмов тоже является морфизмом.

2) Тождественное отображение 1_X: $X \to X$ является морфизмом.

3) Пусть заданы отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to X$, такие, что $g \circ f = 1_X$ и $f \circ g = 1_Y$. Отображение f является *аналитическим изоморфизмом* в том и только в том случае, когда отображение f и g — морфизмы.

Сформулируем без доказательства следующий более глубокий результат.

Теорема. *Пусть k - алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и f:$X \to Y$ — морфизм аналитических информационных многообразий. Для того чтобы отображение f было аналитическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфизмом.*

Замечание. Утверждение теоремы неверно для k=**R**. Действительно, противоречащим примером может служить отображение f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которое задается формулой $f(x) = x^3$.

7.11.6. Произведения и суммы

1. Произведения. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — конечное семейство аналитических информационных многообразий. Обозначим через A_i информационный атлас информационного пространства X_i ($i \in I$). Пусть $c_i = (u_i, \varphi_i, n_i) \in A_i$. Положим

$$\coprod_{i \in I} c_i = \left(\prod_{i \in I} U_i, \prod_{i \in I} \varphi_i, \sum_{i \in I} n_i \right),$$

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$A = \left\{ \prod_{i \in I} c_i \mid c_i \in A_i, i \in I \right\}.$$

Очевидно, X — информационное топологическое пространство и A - его информационный атлас. Информационное пространство X со структурой аналитического информационного многообразия, определенной информационным атласом A, называется *произведением информационных многообразий* $\{X_i\}_{i \in I}$.

Легко проверяется, что справедливо обычное свойство универсальности произведения: для всякого информационного многообразия Y

$$\mathrm{Mor}\left(Y, \prod_{i \in I} X_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{Mor}(Y, X_i).$$

2. Сумма, или несвязное объединение. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — произвольная совокупность информационных многообразий.

Обозначим через

$$\sum_{i \in I} X_i,$$

или

$$\coprod_{i \in I} X_i,$$

несвязное объединение топологических информационных пространств $\{X_i\}_{i \in I}$. В информационном пространстве $X = \prod X_i$ существует (см. пример 4, п. 7.11.4) единственная структура аналитического информационного многообразия, согласованная с заданной структурой каждого информационного многообразия X_i; такое аналитическое информационное многообразие X называется *суммой,* или *несвязным объединением* информационных многообразий.

Легко проверяется, что справедливо обычное свойство универсальности суммы: для всякого информационного многообразия Y

$$\mathrm{Mor}\left(\coprod_{i \in I} X_i,\ Y\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{Mor}\,(X_i,\ Y_i).$$

В добавлении 2 к этому разделу с помощью несвязных объединений будет описанно строение компактных аналитических информационных многообразий, определенных над локально компактным неархимедовым полем.

7.11.7. Ростки аналитических функций

Пусть $x \in X$, и пусть $\mathscr{F}$ — множество пар вида (U, φ), где U — открытая окрестность точки x и φ — аналитическая функция на U. Множество $\mathscr{F}_x$ иногда называют множеством *локальных функций* в точке x. Мы введем в этом множестве отношения эквивалентности.

Будем говорить, что два элемента (U, φ), $(V, \psi) \in \mathscr{F}_x$ *эквивалентны,* если обнаружится такая открытая окрестность W точки x, что $W \subset U \bigcap V$ и $\varphi|W = \varphi|V$. Соответствующее множество классов эквивалентности обозначается через H_x и называется множеством *ростков аналитических функций в точке x,* или *локальным кольцом точки x.*

В множестве H_x естественным образом вводится структура кольца. Пусть f и g — ростки функций в точке x, выберем их представителей

$(U, \varphi) \in f$ и $(V, \psi) \in g$. Положим $W = U \bigcap V$. Сумма ростков $f + g$ определяется как класс, который содержит пару $(W, f \mid W + g \mid W)$, а произведение $f \cdot g$ - как класс, содержащий пару $(W, (f|W)\cdot(g|W))$. Легко проверяется, что эти определения коректны, т.е. не зависят от выбора представителей.

Имеем каноническое отображение $k \to \mathcal{F}_x$, которое сопоставляет элементу $\alpha \in k$ пару (X, c_α), где c_α — аналитическая функция, которая принимает всюду на X постоянное значение α. Это отображение индуцирует каноническое вложение $i\colon k \to \mathcal{H}_x$, которое превращает кольцо $\mathcal{H}_x$ в k -алгебру.

Имеем также другое каноническое отображение $\mathcal{F}_x \to k$ которое относит каждой паре $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_x$ элемент $\varphi(x)$. Это отображение индуцирует канонический сюръективный гомоморфизм $\theta\colon \mathcal{H}_x \to k$. Образ $\theta(f)$ элемента $f \in \mathcal{H}_x$ обозначим через $f(x)$ и назовем его *значением ростка f в точке x*. Ядро m_x эпиморфизма θ является максимальным идеалом.

Поскольку $\theta \circ i = \mathrm{id}_k$, постольку k-модуль $\mathcal{H}_x$ раскладывается каноническим образом в прямую сумму:

$$\mathcal{H}_x = i(k) \oplus \mathfrak{m}_x.$$

Как правило, мы будем отождествлять $i(k)$ и k.

Нетрудно показать, что $\mathcal{H}_x$ — локальное кольцо. Мы докажем более сильное утверждение.

Лемма. *Пусть (u, φ, n) — некоторая информационная карта информационного многообразия в точке x. Беря всевозможные композиции отображения φ с локальными аналитическими функциями в окраине точки $\theta \in k^n$, мы получаем изоморфизм*

$$\bar{\varphi}\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_x,$$

такой, что

$$\bar{\varphi}(\mathfrak{m}_0) = \mathfrak{m}_x.$$

(Здесь $\mathcal{H}_0$ обозначает кольцо ростков аналитических функций в точке $0 \in k^n$, а $\mathfrak{m}_0$ — *его максимальный идеал.) Кольцо $\mathcal{H}_0$ изоморфно локальному кольцу сходящихся степенных рядов от n переменных.*

Доказательство. Все утверждения леммы очевидны, за исключением, возможно, последнего, которое относится к локальности кольца сходящихся степенных рядов от n переменных. Для того чтобы его доказать, нам надо установить, что любой сходящийся степенной ряд f, для которого $f(0) \neq 0$, обратим в нашем кольце. Поскольку $f(x) = a + \psi(x)$, (где $a \in k$, $a \neq 0$ и $\psi(0) = 0$) и поскольку функция $g(y) = 1/y$

аналитична в точке a, композиция $g \circ f = 1/f$ аналитична в точке $0 \in k^n$. Лемма доказана.

Пусть $f \in H_x$ ($f \neq 0$). Наименьшее целое неотрицательное число μ, такое, что $f \notin m^{\mu+1}{}_x$, обозначим $\mathrm{ord}_x f$. Выбрав некоторую информационную карту *(и, φ, п)* точки *x*, мы можем с помощью предыдущей леммы интерпретировать число μ+1 как степень первой ненулевой однородной компоненты ряда $\bar{\varphi}(f)$.

7.11.8. Касательное и кокасательное информационные пространства

Пусть $x \in X$. По определению

$T^*{}_x X = \mathrm{m}_x/\mathrm{m}^2{}_x$ — *кокасательное информационное пространство в точке x,*

$T_x X = (\mathrm{m}_x/\mathrm{m}^2{}_x)^*$ — *касательное информационное пространство в точке x*.

Касательное информационное пространство допускает еще два эквивалентных описания.

1) *Информационное пространство T_xX канонически изоморфно пространству дифференцирований $v: H_x \to k$* (т.е. линейных отображений $v: H_x \to k$, таких, что

$$v(f \cdot g) = (vf)\, g(x) + f(x)\, (vg), \text{ де } f, g \in H_x).$$

Действительно, пусть $v \in T_xX$. Тогда v представляет собой некоторую линейную форму на m_x, аннулирующуюся на m_x^2. Продолжим эту форму на все пространство $H_x = k \oplus \mathrm{m}_x$, возлагая $v = 0$ на k. Покажем, что такая форма $v: H_x \to k$ является дифференцированием. Поскольку v — линейное отображение (над k), нам надо показать, что

$$v(f \cdot g) = (vf)\, g(x) + f(x)\, (vg)$$

для любых $f, g \in H_x$. Заметим, однако, что левая и правая части этого соотношения билинейны по f и g, а потому нам достаточно установить его для трех частных случаев:

(а) $f, g \in k;$

(б) $f \in k$ и $g \in \mathrm{m}_x$ или $f \in \mathrm{m}_x$ и $g \in k;$

(в) $f, g \in \mathrm{m}_x$.

Если имеют место случаи (а) или (в), то обе части нашего соотношения равны нулю; в случае (б) наше соотношение вытекает непосредственно из того факта, что отображение v линейно и обращается в нуль на k.

Обратно, пусть задано дифференцирование $\theta: H_x \to k$. Из свойств дифференцирования легко следует, что θ аннулируется на k и на $\mathrm{m}^2{}_x$ и потому однозначно определяет некоторую форму v на информационном пространстве m_x/m^2_x, т.е. некоторый касательный вектор $v \in T_xX$. Описанное соответствие, как легко проверить, является изоморфизмом.

2) *Информационное пространство T_xX канонически изоморфно пространству C_x «классов кривых, касающихся друг друга в точке x».*

Сначала точно определим пространство *Cx*. Пусть $\mathcal{F}'_x$ — множество пар (N, ψ), где N — открытая окрестность точки $0 \in k$ и ψ*:* $N \to X$ — морфизм, такой, что $\psi(0)=x$. Введем в множестве $\mathcal{F}'_x$ следующее отношение эквивалентности. Пусть $(N_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}'_x$, $i=1$, 2. Выберем в точке x какую-нибудь информационную карту (u, φ, n). Отображение $\varphi \circ \psi_u$ (i= 1, 2) определено в окрестности нуля $N \bigcap \psi_u^{-1}(u)$. Мы скажем, что две «кривые» (N_1, ψ_1) и (N_2, ψ_2) *эквивалентны* (или *касаются в точке x),* если $D(\varphi \circ \psi_1)(0)=D(\varphi \circ \psi_2)(0)$. Через C_x обозначим множество соответствующих классов эквивалентности элементов множества $\mathcal{F}'_x$.

Заметим, что отображение, которое сопоставляет каждой паре $(N, \varphi) \in \mathcal{F}'_x$, производную $D(\varphi \circ \psi)(0)$, определяет биекцию $\overline{\varphi} : C_x \to \mathrm{Hom}_k(k, k^n)=k^n$. Наличие таковой позволяет ввести в C_x структуру векторного пространства над полем *k*.

Нетрудно проверить, что эта структура и само определение множества C_x не зависят от выбора информационной карты (u, φ, n). В самом деле, пусть (u', φ', n) — другая информационная карта в точке x, и пусть $(N, \varphi) \in \mathcal{F}'_x$. Легко видеть, что

$$D(\varphi' \circ \varphi)(0) = D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(0) \circ D(\varphi \circ \psi)(0).$$

Полученная формула показывает, что эквивалентность двух кривых не зависит от выбора информационной карты. Кроме того, отсюда следует, что $\overline{\varphi} = D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(0) \circ \overline{\varphi}$, а это означает, что структура векторного пространства на множестве C_x тоже определена корректно.

Для того чтобы установить наличие канонического изоморфизма между C_x и T_xX, построим спаривание $C_x \times T^*_x X \xrightarrow{\omega} k$. (*Спариванием* двух векторных пространств V и V' называется билинейное отображение $V \times V' \to k$*;* спаривание называется *невырожденным*, если индуцированные им отображения $V \to V'^*$ и $V' \to V^*$ суть изоморфизмы.)

Для этого рассмотрим сначала естественное спаривание

$$\mathcal{F}'_x \times \mathcal{F}_x \to k,$$

которое сопоставляет паре элементов $(N, \psi) \in \mathcal{F}'_x$, $(V, f) \in \mathcal{F}_x$ элемент $D(f \circ \psi)(0) \in k$. Стандартные выкладки, которые используют координатную запись, показывают, что такое спаривание индуцирует *невырожденное* спаривание

$$C_x \times T^*_x X \xrightarrow{\omega} k,$$

которое и позволяет отождествить C_x с пространством, двойственным к пространству $T^*_x X$.

Замечание. 1. Спаривание ω можно интуитивно представлять себе просто как дифференцирование данной функции по направлению, касательному к данной кривой.

2. Если бы мы захотели ввести структуру векторного пространства на множестве производных более высокого порядка так, как мы это делали для множества C_x, то нас постигла бы неудача. Причина кроется в том, что производные более высокого порядка от композиции двух функций уже не зависят билинейным образом от производных этих функций.

Пример. Пусть X — конечномерное векторное пространство V, тогда

$Tx = \mathrm{Hom}_k(k, V) = V$,

$T^*_x = \mathrm{Hom}_k(V, k) = V^*$.

Введем теперь два связанных между собой основных понятия: дифференциал функции и касательное к морфизму отображение.

Пусть $f \in H_x$; очевидно, $f - f(x) \in \mathrm{m}_x$. Образ элемента $f - f(x)$ в факторпространстве $\mathrm{m}_x/\mathrm{m}_x^2 = T^*_x X$ называется *дифференциалом* локальной функции f в точке x и обозначается df_x.

Пусть $v \in T_x X$. Значение v на элементе df_x называется *производной* локальной функции f *по направлению* v и обозначается $\langle v, df_x \rangle$ или $v \bullet f_x$. Элемент df_x можем мыслить себе как линейную форму на пространстве $T_x X$.

Каждая аналитическая функция, которая задана в окрестности точки x, определяет элемент кольца H_x, а вместе с ним линейную форму

$$df_x \in (T_x X)^*.$$

Пусть даны два аналитических информационных многообразия X и Y, морфизм φ: $X \to Y$ и две точки $x \in X$, $y \in Y$, такие, что $\varphi(x) = y$. Определим отображение

$$T_x\varphi:\ T_x X \to T_y Y$$

формулой

$$\langle T_x\varphi(v),\ df_y \rangle = \langle v,\ d(f \circ \varphi)_x \rangle$$

для всех $v \in T_x X$ и всех $f \in H_x$. Можно определить отображение $T_x\varphi$ и через его транспозицию

$$T^*_x\varphi:\ T^*_y Y \to T^*_x X;$$

именно для любого $f \in H_x$ полагаем

$$T^{*}_{x}\varphi\,(df_y) = d\,(f \circ \varphi)_x.$$

Линейное отображение $T_x\varphi$ называют обычно *касательным отображением* морфизма φ.

В частном случае, когда $Y = k$, а φ - есть аналитическая функция f, имеем $T_x f = Df_x$.

В заключенне этого пункта мы рассмотрим несколько простых свойств касательных пространств произведений информационных многообразий. Пусть X, Y — два аналитических информационных многообразия, и пусть $x \in X$, $y \in Y$. Имеют место следующие две формулы:

$$T_{(x,\,y)}X \times Y = T_xX \times T_yY,$$

$$T^{*}_{(x\,,y)}X \times Y = T^{*}_{x}X \times T^{*}_{y}Y.$$

Пусть, далее, φ: $X\times Y \to Z$ — морфизм, для которого $\varphi(x, y)=z$. Отображение $T_{(x,y)}\,\varphi$ определяет два других отображения

$$T^{X}_{(x,\,y)}\varphi\colon\ T_xX \to T_zZ$$

$$T^{Y}_{(x,\,y)}\varphi\colon\ T_yY \to T_zZ,$$

которые удовлетворяют соотношению

$$T_{(x,\,y)}\varphi\,(v,\ w) = T^{X}_{(x,\,y)}\varphi\,(v) + T^{Y}_{(x,\,y)}\varphi\,(w).$$

Отображения $T^X\varphi$ и $T^Y\varphi$ называются *частными производными* морфизма φ по X и по Y соответственно.

7.11.9. Теорема об обратной функции

Пусть $x \in X$ и $f_{1},\ldots, f_m$ — аналитические функции, определенные в некоторой окрестности U точки x. Положим $F(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$, где $y \in U$. Будем говорить, что набор $\{f_i\}_{1\le i\le m}$ определяет в точке x *систему координат,* если существует такая открытая окрестность $U' \subset U$, что $(U', F|U', m)$ – информационная карта информационного многообразия X в точке x.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *набор $\{f_i\}$ определяет систему координат в точке x;*

(2) *дифференциалы df_{ix} образуют базис информационного пространства T_xX.*

Эта теорема является следствием другой, более общей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* φ: $X \to Y$ *— морфизм двух информационных многообразий, и пусть $\varphi(x)=y$ ($x \in X$, $y \in Y$). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) φ *— локальный изоморфизм;*

(2) $T_x\,\varphi$ *— изоморфизм;*

(2') $T^*_x\,\varphi$ — *изоморфизм.*

Определение. Морфизм $\varphi{:}X\to Y$, который удовлетворяет эквивалентным условиям теоремы 2, называется *наложением* в точке x. Отображение φ, которое является *наложением* в каждой точке $x\in X$, называется просто *наложением*.

7.11.10. Регулярные, корегулярные и локально линейные отображения

Определение. Пусть $\varphi{:}\,X\to Y$ и $\bar{\varphi}:\bar{X}\to Y$ — два морфизма.

Будем говорить, что они *локально подобны в точках* $x\in X$ и $\bar{x}\in\bar{X}$, если существуют такие открытые окрестности U, V, $\bar{U}$, $\bar{V}$ точек x, $\varphi(x)$, $\bar{x}$, $\bar{\varphi}(\bar{x})$ соответственно и такие изоморфизмы $g{:}\,U\to\bar{U}$ и $h{:}\,V\to\bar{V}$, что

(1) $\varphi(U)\subset V$ и $\bar{\varphi}(\bar{U})\subset\bar{V}$;

(2) $g(x)=\bar{x}$ и $h(\varphi(x))=\bar{\varphi}(\bar{x})$:

(3) диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d, "h"] \\ \bar{U} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & \bar{V} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Замечание. Мы будем пользоваться этим определением, как правило, в том случае, когда $\bar{X}$, $\bar{Y}$ - линейные пространства и $\bar{\varphi}$ - линейное отображение; при этом без лишних оговорок будет предполагаться, что $\bar{x}=0$ и $\bar{y}=0$.

Пусть X и Y - два информационных многообразия, $x\in X$, $y\in Y$, $\varphi{:}\,X\to Y$ — морфизм, для которого $\varphi(x)=y$, и пусть $m=\dim_x X$ и $n=\dim_y Y$.

1. Регулярные отображения.

Теорема 1. *Следующие свойства эквивалентны:*

(1) *отображение $T_x\varphi$ инъективно;*

(2) *существуют такие открытые окрестности U — точки x, V — точки y, W — точки $0\in k^{n-m}$ и такой изоморфизм $\psi{:}V\to U\times W$, что*

(a) $\varphi(U)\subset V$;

(б) *диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ & U \times W, \end{tikzcd}$$

где i — естественное отображение $U \to U\times\{0\} \subset U\times W$*;*

(3) *отображение* φ *локально подобно в точке x линейной инъекции* φ: $E\to F$, *где E и F — векторные пространства размерностей m и n соответственно;*

(4) *существуют такие функции* $\{f_i\}$ *и* $\{g_i\}$, *определяющие системы координат в точках x и y соответственно, что* $f_i = g_i\circ\varphi$ *при* $1\le i\le m$ *и* $0 = g_i\circ\varphi$ *при* $m + 1 \le j \le n$*;*

(5) *существуют такие открытые окрестности U точки x и V — точки y и такой морфизм* σ*:* $V \to U$, *что* $\varphi(U)\subset V$ *и* $\sigma\circ\varphi = \mathrm{id}_U$.

Доказательство. Импликации (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Поскольку все рассматривается локально, мы можем предполагать, что

а) Y — открытое подмножество в k^n;

б) $\varphi(x)=0$ и $\mathrm{Im}\,(T_x\,\varphi)=k^m\times\{0\}\subset k^m\times k^{n-m} = k^n$. Обозначим множество $\{0\}\times k^{n-m}(\subset k^n)$ через W. Определим отображение φ': $X\times W\to Y$ формулой $\varphi'(x, w)=\varphi(x)+w$. По теореме об обратной функции φ' является локальным изоморфизмом в точке x. Урезая, если нужно, пространства X, Y и W, мы можем считать φ' изоморфизмом. Искомый изоморфизм ψ есть просто отображение φ'^{-1}. Теорема доказана.

Определение. Морфизм φ, который удовлетворяет эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *регулярным* в точке x. Морфизм, регулярный во всех точках $x\in X$, называется просто *регулярным,*

2. Корегулярные отображения.

Теорема 2. *Следующие свойства эквивалентны:*

(1) *отображение* $T_x\varphi$ *сюръективно;*

(2) *существуют такие открытые окрестности U - точки x, V - точки y, W - точки* $0\in k^{n-m}$ *и такой изоморфизм* ψ: $V \to U\times W$, *что*

(а) $\varphi(U)=V$;

(б) *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & V \\ V \times W \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

где p обозначает проекцию $V\times W\to V$*;*

(3) *отображение* φ *локально подобно в точке x линейной сюръекции* $\overline{\varphi}$ *:E→F, где E і F — векторные пространства размерностей m и n соответственно;*

(4) *существуют такие наборы функций* $\{f_i\}$ *и* $\{g_i\}$, *которые определяют системы координат в точках x и y соответственно, что* $f_i = g_i \circ \varphi$ *для* $1 \le i \le n$;

(5) *существуют такие открытые окрестности U - точки x и V - точки y и такой морфизм* σ: *V→U, что* φ (*U*)⊂ *V и* φ ∘ σ =id$_V$.

Доказательство проводится точно так же, как в предыдущей теореме, и предоставляется читателю как упражнение.

Определение. Морфизм φ, который удовлетворяет эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *нерегулярным* в точке *x*. Морфизм, корегулярный во всех точках $x \in X$, называется просто *корегулярным*.

Замечание. 1. Наложениями являются в точности те морфизмы, которые одновременно регулярны и корегулярны.

2. Иногда мы будем употреблять выражение „морфизм φ имеет максимальный ранг". Это означает, что отображение $T_x\varphi$ инъективно, если $m \le n$, или сюръективно, если $m \ge n$.

3. Вложения.

Определение. Морфизм φ называется *вложением,* если

(а) φ - регулярный морфизм;

(б) φ: *X*→φ (*X*) - гомеоморфизм.

4. Локально линейные отображения.

Определение. Морфизм φ: *X*→*Y* называется *локально линейным в точке x,* если выполнены следующие эквивалентные условия:

(1) морфизм φ в точке *x* локально подобен композиции морфизмов $\overline{X} \xrightarrow{s} \overline{Z} \xrightarrow{i} Y$, где *s* — корегулярное, а *i* — регулярное отображение;

(2) морфизм φ в точке *x* локально подобен линейному отображению $\overline{\varphi}$: *E* →*F,* где *E* і *F* — векторные пространства размерностей *m* и *n* соответственно.

Если морфизм φ есть локально линейным во всех точках $x \in X$, мы будем называть его просто *локально линейным.*

Замечание. 1. Множество точек $x \in X$, в которых морфизм φ: *X*→*Y* регулярен (соответственно корегулярен, локально линеен), есть открытое подмножество информационного многообразия *X*.

2. Композиция двух регулярных (соответственно корегулярных) морфизмов есть регулярным (соответственно корегулярным)

морфизмом. Аналогичное утверждение для локально линейных морфизмов неверно.

Теорема 3. *Предположим, что основное поле k имеет нулевую характеристику. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *морфизм φ локально линеен в точке x;*

(2) *ранг отображения $T_{x'}\varphi$ постоянен для всех точек x' из некоторой окраины U точки x.*

Доказательство. Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидна. Докажем, что (2) $\Longrightarrow$ (1).

Обозначим через p размерность образа $\mathrm{Im}(T_x\varphi)$. Поскольку все рассматривается локально, мы можем считать, что

(а) $Y = V_1\times V_2$ — открытое множество в $k^n = k^p\times k^{n-p}$;

(б) $\varphi(x) = 0$ и $\mathrm{Im}(T_x\varphi)= k^p\times\{0\}$.

Пусть π: $k^p \times k^{n-p}\to k^p$ - проекция на первый сомножитель. Очевидно, композиция $\pi\circ\varphi$ корегулярна. Следовательно, мы можем считать, что

(в) $X= V_1\times V_2$ - открытое множество в $k^p\times k^{m-p} =k^m$, причем $x = 0$;

(г) композиция $\pi\circ\varphi$: $V_1\times V_2\to V_1$ есть проекция на первый сомножитель.

Таким образом, морфизм φ имеет следующий вид:

$$\varphi(x_1, x_2)=(x_1,\psi (x_1, x_2)),\quad x_1\in V_1\ x_2\in U_2.$$

Наконец, мы можем считать, что ранг $T_{x'}\varphi$ *постоянен* (именно равен p) на всем $V_1 \times U_2$. Докажем, что отображение ψ не зависит от x_2 в некоторой окрестности нуля. Для этого заметим прежде всего, что $D_2\psi(x_1, x_2)= 0$. В противном случае морфизм ψ имел бы в точке (x_1, x_2) ранг, строго больший p. Наше утверждение вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма. *Пусть f: V×U→k - аналитическая функция, такая, что* $D_2f= 0$. *Если поле k имеет нулевую характеристику, то функция f локально не зависит от аргумента, пробегающего сомножитель U.*

Доказательство леммы. В окрестности нуля функция f представляется степенным рядом

$$\sum f_\alpha(y)\, x^\alpha\ (x\in V,\ y\in U).$$

Равенство $D_2f \equiv 0$ означает, что $D_2f_2 \equiv 0$ для всех α. Нам надо показать, что $f_\alpha \equiv c_\alpha$, где $c_\alpha\in k$. Задача, таким образом, свелась к случаю $f = f_\alpha$. Мы можем считать теперь, что $f=\sum b_\beta y^\beta$ $(b_\beta\in k)$. Из свойств степенных рядов и равенства $D_2f = 0$ вытекает, что $\beta_i b_\beta = 0$, где $\beta = (\beta_{1\ldots}, \beta_r)$, $l\le i\le r$. Но так как характеристика поля k равна нулю, $b_\beta= 0$, если $\beta \ne 0$, т.е. функция f постоянна, и т.д.

Для того чтобы закончить доказательство теоремы, представим морфизм φ как композицию морфизмов

$$V_1 \times U_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} V_1 \xrightarrow{\mathrm{Id}_{V_1} \times \psi} V_1 \times V_2.$$

Очевидно, первый морфизм корегулярен, а второй регулярен. Теорема доказана.

Следствие 1. *Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику. Тогда множество точек $x \in X$, в которых морфизм локально линеен, всюду плотно в X.*

Доказательство. Обозначим указанное множество через X' и положим $f(x)=\mathrm{rk}T_x\varphi$. Согласно предыдущей теореме, функция f локально постоянна на X'. Наше следствие вытекает теперь непосредственно из двух очевидных свойств функции f:

а) она принимает целочисловые значения и локально ограничена;

б) она полунепрерывна снизу.

Следствие 2. *Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику и отображение φ инъективно. Тогда множество точек $x \in X$, в которых морфизм φ регулярен, всюду плотно в X.*

Это вытекает из следствия 1 и того факта, что инъективно локальное линейное отображение регулярно.

7.11.11. Конструирование информационных многообразий. Прообразы

1. Принцип единственности.

Теорема 1. *Пусть X — топологическое информационное пространство, A и B — два его полных информационных атласа. Обозначим через X_A (соответственно X_B) аналитическое информационное многообразие, которое определено в информационном пространстве X информационным атласом A (соответственно информационным атласом B). Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$X_A = X_B$, т.е. $A = B$;*

(2) *для любого информационного многообразия Y*

$$\mathrm{Mor}\,(Y, X_A) = \mathrm{Mor}\,(Y, X_B);$$

(3) *для любого информационного многообразия Y*

$$\mathrm{Mor}\,(Y, X_A) = \mathrm{Mor}\,(Y, X_B).$$

Доказательство. Эта теорема является частным случаем общей теоремы, согласно которой функтор определяет сущность однозначно с точностью до изоморфизма.

Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидна.

Покажем, что (2) $\Longrightarrow$ (1). Положим $Y=X_A$. Очевидно, тождественное отображение id_X: $X_B \rightarrow X_A$ есть морфизмом; аналогично морфизмом есть также отображения id_X: $X_A \rightarrow X_B$. Значит, информационные атласы A и B согласованы и, следовательно, совпадают, поскольку они полны.

Доказательство эквивалентности (1) $\Longleftrightarrow$ (3) также просто.

Сформулируем теперь две леммы, которые понадобятся, когда мы будем применять предыдущую теорему.

Пусть $f : X \rightarrow Y$— морфизм двух информационных многообразий, Z — произвольное третье информационное многообразие.

Лемма 1. *Пусть f - регулярный морфизм. Отображение g: Z→X есть морфизмом тогда и только тогда, когда*

(1) *отображение g непрерывно;*

(2) $f \circ g \in$ Mor (Z, Y).

Лемма 2. *Пусть f - корегулярный морфизм. Тогда*

(1) *отображение f открыто; в частности, множество f(X) открыто в Y*;

(2) *если f(X) = Y, то*

$$g \in \text{Mor}\,(Y, Z) \Longleftrightarrow g \circ f \in \text{Mor}\,(X, Z).$$

Леммы 1 и 2 непосредственно следуют из локального описания регулярных и корегулярних морфизмов.

2. Прообразы. Пусть X — топологическое информационное пространство, Y — информационное многообразие и f: $X \rightarrow Y$ — *непрерывное* отображение.

Теорема 2. *Пусть информационное пространство X можно снабдить структурой аналитического информационного многообразия, так чтобы отображение f было регулярным морфизмом. Тогда эта структура единственна.*

Доказательство. По лемме 1 для всякого информационного многообразия Z множество Mor(Z, X) определяется лишь топологической структурой информационного пространства X и аналитической структурой информационного многообразия Y. Следовательно, согласно теореме 1, структура информационного многообразия в информационном пространстве X определена однозначно, что и требовалось доказать.

Пусть $x \in X$. Мы скажем, что пара *(X, f) удовлетворяет условию* (Im) *в точке x,* если (Im) существуют открытая окрестность U точки x в информационном пространстве X, информационная карта (V, φ, n) информационного многообразия Y и линейное информационное подпространство $E \subset k^n$, такие, что

(а) $f(U) \subset V$ и f: $U \rightarrow f(U)$ - гомеоморфизм;

(б) $\varphi(f(U)) = E \bigcap \varphi(V)$.

Если это условие выполняется для всех точек $x\in X$, то мы скажем, что пара (*X, f) удовлетворяет условию* (Im).

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *в информационном пространстве X существует структура аналитического информационного многообразия, относительно которой отображение f есть регулярным морфизмом;*

(2) *пара (X, f) удовлетворяет условию* (Im).

Доказательство. Импликация (1)$\Longrightarrow$ (2) следует из теоремы 1 п. 7.11.10.

Покажем, что, обратно, (2) $\Longrightarrow$ (1). Выберем открытое покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$ информационного пространства *X,* такое, что для каждого индекса $i \in I$ найдутся информационная карта $c_i=(V_i, \varphi_i, n_i)$ и линейное информационное подпространство $E_i \subset k^{n_i}$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

(а) $f(U_i)\subset V_i$ и f: $U_i\to f(U_i)$ - гомеоморфизм;

(б) $\varphi_u(f(U_i)) = E\bigcap \varphi_u(V_i)$.

Каждое множество U_i естественным образом наделяется структурой аналитического информационного многообразия, относительно которой отображение $f|U_i$ регулярно. Далее, по теореме 2 структуры, индуцированные множествами U_i и U_j на пересечении $U_i\bigcap U_j$, совпадают. Но, как мы знаем (п.7.11.4, пример 4), информационное пространство *X* можно снабдить структурой аналитического информационного многообразия, согласованной с первоначальными структурами на множествах U_i. Остается заметить, что отображение *f* есть регулярным морфизмом относительно введенной структуры. Теорема доказана.

Пусть пара *(X, f*) удовлетворяет условию (Im). Из теоремы 1 и 2 в совокупности вытекает, что информационное пространство *X* обладает единственной структурой аналитического информационного многообразия, при которой отображение *f* становится регулярным морфизмом. Эту аналитическую структуру в информационном просторные *X* мы будем называть *структурой прообраза* (относительно *f*) или просто *индуцированной структурой.* Соответствующее аналитическое информационное многообразие будем обозначать через X_f в тех случаях, когда мы захотим подчеркнуть зависимость этой структуры от *f*.

Рассмотрим несколько приложений предыдущих результатов.

А. Информационное подмногообразие. Пусть Y — некоторое информационное многообразие, X — его информационное подпространство (наделенное индуцированной топологией), и пусть i: $X \to Y$ — отображение вложения. Мы будем говорить, что X - информационное подмногообразие в Y, если пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Заметим, что из этого условия, в частности, вытекает, что информационное пространство X локально замкнуто в Y.

Пусть $x \in X$. Мы будем говорить, что X есть *локальным информационным подмногообразием* в точке x, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

(1) пара (X, i) удовлетворяет условию (Im) в точке x;

(2) существует открытая окрестность $U \subset Y$ точки x, такая, что $U \bigcap X$ — информационное подмногообразие в U;

(3) в некоторой подходящей локальной системе координат $(x_1, ..., x_n)$ в точке x множество X в некоторой окрестности этой точки задается уравнениями $x_1 = \ldots = x_p = 0$ $(p \leq n)$.

Б. Локальный гомеоморфизм. Если отображение f: $X \to Y$ — локальный гомеоморфизм, то пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Морфизм f: $X_f \to Y$ в этом случае является наложением.

В. Прообразы точек. Пусть f: $X \to Y$- морфизм информационных многообразий, и пусть $b \in Y$. Обозначим через X_b прообраз $f^{-1}(b)$. Изучим вложение $X_b \subset X$ в оокрестности некоторой точки $a \in X_b$

Теорема 4. *Для того чтобы множество X_b в точке а было локальным информационным подмногообразием в X, достаточно выполнения любого со следующих трех условий:*

(1) *морфизм f нерегулярен в окрестности точки a;*

(2) *существует информационное подмногообразие $W \subset X$, такое, что*

(а) $W \subset X_b \, (a \in W)$,

(б) $T_a W = \operatorname{Ker} \left(T_a X \xrightarrow{T_a f} T_b Y \right)$;

(3) (А. В е й л ь) *существуют информационные многообразия Z, точка $c \in Z$ и морфизм g: $Z \to X$, такие, что*

(а) $f \circ g(z) = b$ *для всех* $z \in Z$,

(б) $g(c) = a$,

(в) *последовательность линейных отображений*

$$T_c Z \xrightarrow{T_c g} T_a X \xrightarrow{T_a f} T_b Y$$

точна.

В каждом из этих трех случаев имеем

$$T_a(X_b) = \operatorname{Ker}\left(T_aX \xrightarrow{T_af} T_bY\right).$$

Доказательство. (1) Наше утверждение вытекает из локального описания корегулярного морфизма.

(2) Докажем следующее утверждение: существует открытая окрестность $U\subset X$ точки a, такая, что

$$U\cap X_b = U\cap W.$$

Ввиду локального характера нашей задачи мы можем считать, что X — открытая окрестность точки $0\in k^m$ и что $X=W\times V$. Определим отображение

$$F\colon X\to W\times Y$$

формулой

$$F(w, v) = (w, f(w, v)),$$

Поскольку морфизм F регулярен в точке 0, мы можем считать, урезая, если нужно, X, что F инъективно. Тогда

$$X_b\subset F^{-1}(W\times\{b\}) = W\times\{0\} = W.$$

т.е. $X_b= W$ в окрестности точки a.

(3) Докажем слудующее утверждение: существуют открытая окрестность $W\subset Z$ точки c, открытая окрестность $U\subset X$ точки a, разложение $W = W_1\times W_2$ и морфизм $\varphi\colon W_1\to X$, такие, что

(а') φ — изоморфизм W_1 на информационное многообразие $\varphi(W_1)\subset X$;

(б') морфизм g представимый в виде композиции

$$W_1\times W_2 \xrightarrow{pr_1} W_1 \xrightarrow{\varphi} X;$$

(в') $U\cap X_b=g(W)$.

Тем самым, в частности, будет доказанна корегулярность морфизма g в точке c.

В силу локального характера задачи мы можем предполагать, что Z — открытая окрестность точки $c=0$ в пространстве k^p. Можно считать, что эта окрестность имеет вид $Z=W_1\times W_3$, причем $T_0^{W_1}(g)$ — изоморфизм, а $T_0^{W_3}(g)$ — нулевое отображение. Положим $\varphi=g|W_1$. Поскольку морфизм φ регулярен в нуле, можно предполагать, урезая, если нужно, множество W_1, что φ есть изоморфизм W_1 на информационное подмногообразие в X. Ввиду свойств (а) и (в) образ $\varphi(W_1)$ удовлетворяет условию (2). В силу доказанного выше найдется открытая окрестность $U\subset X$ точки a, такая, что $U\cap X_b=U\cap\varphi(W_1)$. Открытое множество $g^{-1}(U)= W$ является окрестностью нуля в $W_1\times W_3$, причем $g(W)\subset U\cap X_b$.

Ясно, что морфизм g отображает W в $\varphi(W_1)$. Нетрудно видеть также, что отображение $g: W \to \varphi(W_1)$ корегулярно в точке 0. Урезав подходящим образом W_1 и W_2, мы получим разложение $W = W_1 \times W_2$, которое удовлетворяет условиям (а) и (б). Для того чтобы выполнялось свойство (в), довольно сузить окрестность U.

Теорема доказана.

Г. Трансверсальные информационные подмногообразия. Пусть X - информационное многообразие, Y_1 и Y_2 — его информационные подмногообразия и $x \in Y_1 \bigcap Y_2$.

Теорема 5. *Следующие три свойств равносильны:*

(1) $T_x X = Tx_1 + Tx_2$;

(2) *точка x обладает информационной картой* $c = (U, \varphi, n)$, *такой, что*

$$\varphi(U) = V_1 \times V_2 \times W,$$

$$\varphi(U \cap Y_1) = V_1 \times \{0\} \times W,$$

$$\varphi(U \cap Y_2) = \{0\} \times V_2 \times W;$$

(3) *в точке x существуют локальные координаты* $(x_1, ..., x_n)$, *такие, что в окрестности этой точки* Y_1 *задается уравнениями* $x_1 = ... = x_p = 0$, *а* Y_2 — *уравнениями* $x_{p+1} = ... = x_{p+q} = 0$, *где* p, q — *целые неотрицательные числа,* $p + q = n$

Доказательство. Импликации (2)$\Longrightarrow$ (3) и (2) $\Longrightarrow$ (1) очевидны. Докажем, что

(1) $\Longrightarrow$ (3).

Поскольку Y_1 и Y_2 — информационные подмногообразия в X, можно (урезав, если необходимо, информационное пространство X) найти такие корегулярные морфизмы

$$f_1: X \to k^p, \quad f_2: X \to k^q,$$

что $Y_i = f_i^{-1}(0)$, $i=1, 2$. Условие (1) показывает, что отображение $(f_1, f_2): X \to k^p \times k^q$ корегулярно в точке x. Это позволяет отождествить координаты $(x_1, ..., x_{p+q})$ произведения $k^p \times k^q$ с частью локальных координат $(x_1, ..., x_n)$ в точке x. Следовательно, (1) $\Longrightarrow$ (3). Теорема доказана.

Если Y_1 и Y_2 удовлетворяют одному из эквивалентных условий предыдущей теоремы, то говорят, что информационные подмногообразия Y_1 и Y_2 *трансверсальны в точке x.*

Следствие. *Пусть информационные подмногообразия* Y_1 и Y_2 *трансверсальны в точке x.*

Тогда

(1) Y_1 и Y_2 *трансверсальны в некоторой окрестности этой точки;*

(2) *пересечение* $Y_1 \bigcap Y_2$ *есть локальным информационным подмногообразием информационного многообразия X в точке x;*

(3) $T_X(Y_1 \bigcap Y_2) = TX_1 \bigcap TX_2$

Д. Трансверсальные морфизмы. Рассмотрим пары морфизмов $f_i\colon Y_i \to X$, $i = 1, 2$. Положим

$$Y_1 \times {}_X Y_2 = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \mid f_1(y) = f_2(y)\}.$$

Это множество называется *расслоенным произведением* Y_1 и Y_2 над X. Положим

$$f = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2,$$

где

$$p_i\colon Y_1 \times {}_X Y_2 \to Y_i$$

ограничение отображения

$$\mathrm{pr}_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$$

(см. диаграмму).

$$\begin{tikzcd} Y_1 \times {}_X Y_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "f"] & Y_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "f_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Пусть $(y_1, y_2) \in Y_1 \times_X Y_2$ и пусть $x = f(y_1, y_2)$. Будем говорить, что морфизмы f_1 и f_2 *трансверсальны в точке* $y = (y_1, y_2)$, если

$$T_X X = \mathrm{Im}(T_{y_1} f_1) + \mathrm{Im}(T_{y_2} f_2),$$

Теорема 6. *Пусть морфизмы f_1 и f_2 трансверсальны в точке y. Тогда*

(1) *морфизмы f_1 и f_2 трансверсальны в некоторой окресносте точки y в $Y_1 \times_X Y_2$;*

(2) *множество $Y_1 \times_X Y_2$ в точке y есть локальным информационным подмногообразием в $Y_1 \times Y_2$;*

(3) $T_y(Y_1 \times {}_X Y_2) = T_{y_1}(Y_1) \times {}_{T_x(X)} T_{y_2}(Y_2).$

Доказательство (неполное). Положим $Y = Y_1 \times Y_2$ и $Z = Y_1 \times_X Y_2$. Обозначим через $\delta_u\colon Y \to Y \times X$ отображение $(\mathrm{id}_Y, f_i \circ \mathrm{pr}_i)$ и положим $\delta = \delta_i | Z$. Теорема вытекает из следующих трех утверждений:

а) морфизмы δ_1 и δ_2 есть изоморфизмами информационного многообразия Y на информационном подмногообразии в $Y \times X$;

б) информационные подмногообразия $\delta_1(Y)$ и $\delta_2(Y)$ трансверсальны в точке $\delta(y)$;

в) $\delta(Z) = \delta_1(Y) \bigcap \delta_2(Y)$.

Подробности предоставляем читателю.

Замечание. 1. Если хотя бы одно из отображений f_i корегулярно, то морфизмы f_1 и f_2 всюду трансверсальны.

2. Если в описанной выше ситуации f_1 есть вложения *информационного подмногообразия* Y_1 в информационное многообразие X и если f_1 и f_2 трансверсальны в точке y, то мы будем говорить, что морфизм f_2 *есть трансверсальным над* Y_1 в точке y.

7.11.12. Конструирование многообразий. Фактормногообразия

Пусть X — информационное многообразие и $R \subset X \times X$ — некоторое отношение эквивалентности. Обозначим через X/R множество классов эквивалентности относительно R и через $p: X \to X/R$ — каноническую проекцию. Снабдим множество X/R обычной фактортопологией. Именно: множество $\bar{U} \subset X/R$ открыто в том и только в том случае, если множество $p^{-1}(\bar{U}) \subset X$ открыто.

Теорема 1. *Если в информационном простор\-анстве X/R существует структура аналитического информационного многообразия, относительно которой отображение p есть корегулярным морфизмом, то такая структура единственна.*

Додоказательство. По лемме 2 из п. 7.11.11 множество Mor $(X/R, Z)$ для любого информационного многообразия Z зависит лишь от аналитической структуры информационного пространства X. Следовательно, по теореме 1 с п. 7.11.11 структура информационного многообразия на факторпространстве X/R определена однозначно, что и требовалось доказать.

Если ситуация, которая описана в предыдущей теореме, имеет место, то мы называем информационное пространство X/R *фактор информационным многообразием* (или просто информационным многообразием), а отношение R — регулярным отношением эквивалентности.

Теорема 2 (Годеман). *Следующие условия эквивалентные:*

(1) *отношение R регулярно (т.е. X/R) — информационное многообразие;*

(2) (а) *R — информационное подмногообразие в $X \times X$;*

(б) pr_2: *$R \to X$ — корегулярный морфизм.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть выполнено условие (1). Покажем, что тогда выполнено условие (2). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & X/R \end{tikzcd}$$

Очевидно, множество R совпадает с $X \times_{X/R} X$. Поскольку отображение p корегулярно, множество R является информационным подмногообразием в $X \times X$ (см. теорему 6 с п. 7.11.11 и замечание 1). Далее, если $(x, y) \in R$ и $z = p(x) = p(y)$, то

$$T_{x,\, y}(R) = T_x(X) \times_{T_z(X/R)} T_y(X).$$

Последнее равенство, в частности, показывает, что отображение $T_{(x,\, y)}(R) \rightarrow T_y(X)$ сюръективно, и, следовательно, ограничение проекции pr_2 на R — корегулярный морфизм (ср. с упражнением 5 ниже).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Для удобства доказательство этой импликации будет представлено в виде последовательности лемм.

Пусть U — подмножество в X. Положим $R_U = R \bigcap (U \times U)$. Напомним, что подмножество $U \subset X$ называется *насыщенным* относительно отношения эквивалентности R, если $U = p^{-1}p(U)$.

Лемма 1. *Пусть*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

где каждое подмножество U_i открыто и насыщенно в X, причем факторпространство $U_i R_{U_i}$ - информационное многообразие. Тогда X/R также является информационным многообразием.

Доказательство. По условию все отображения $U_i \rightarrow U_i R_{U_i}$ корегулярны. Поэтому для любых двух индексов $i, j \in I$ структуры аналитических информационных многообразий, которые индуцированы информационными многообразиями U_i/R_i и U_j/R_j на $U_i \bigcap U_j / R_{U_i \cap U_j}$, совпадают (теорема 1). На множестве X/R имеется, следовательно, единственная структура информационного многообразия, которая согласована с заданными структурами на множествах $U_i R_{U_i}$. Наконец, отображение p корегулярно, так как для всех i ограничение $p|U_i$ есть корегулярным морфизмом.

Л е м а 2. *Отображение p открыто (т.е. если подмножество $U \subset X$ открыто, то открытым будет и подмножество $p^{-1}p(U)$).*

Доказательство.

$$p^{-1}p(U) = \mathrm{pr}_2 \; ((U \times X) \bigcap R).$$

Но множество pr_2 ($(U \times X) \bigcap R$) открыто в X, поскольку проекция pr_2 корегулярна (лемма 2 с п. 7.11.11).

Лемма 3. *Если существует такое открытое подмножество $U \subset X$, что $p^{-1}p(U)=X$ и U/R_U - информационное многообразие, то факторпространство X/R также является информационным многообразием.*

Доказательство. Каноническое отображение α: $U/R_U \to X/R$ — гомеоморфизм. Если мы докажем теперь, что β: $X \to U/R_U$ — корегулярний морфизм, то, перенеся структуру аналитического информационного многообразия с U/R_U на X/R, мы превратим факторпространство X/R в аналитическое информационное многообразие, причем отображение p будет корегулярно. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
& (U \times X) \cap R \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
U \arrow[dr, "\beta | U"'] & & X \arrow[dl, "\beta"] \\
& U | R_U &
\end{tikzcd}$$

Отображение

$$(\beta \mid U) \circ \mathrm{pr}_1 = \beta \circ \mathrm{pr}_2,$$

как легко видеть, корегулярно. Значит, поскольку проекция pr_2 корегулярна, отображение β есть морфизмом, и даже нерегулярным (лемма 2 п.7.11.11).

Комбинируя леммы 1, 2 и 3, мы получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Если существует такое открытое покрытие $\{U_1\}_{i \in I}$ информационного многообразия X, что все U_1/R_i — информационные многообразия, то факторпространство X/R также является информационным многообразием.*

Суть леммы 4 заключается в том, что наша задача о построении структуры информационного многообразия на факторпространстве X/R (при условии корегулярности отображения p) приобрела теперь локальный характер. Остальные две леммы будут посвящены решению этой локальной задачи. Именно: мы покажем, что для каждой точки $x_0 \in X$ найдется такая ее открытая окрестность $U \subset X$, что фактормножество X/R_U обладает структурой информационного многообразия, относительно которой проекция $U \to U/R_U$ корегулярна.

Лемма 5. *Пусть $x_0 \in X$. Тогда существуют открытая окрестность U точки x_0, информационного подмногообразия $W \subset U$ и морфизм*

$r : U \to W$, такие, что для любой точки $u \in U$ имеет место сравнение $r(u)=u(\mathrm{mod} R)$, причем $r(u)$ — единственный элемент из W, который удовлетворяет этому сравнению.

Доказательство. Обозначим через N множество всех касательных векторов

$$\xi \in T_{x_0}(X),$$

таких, что

$$(\xi,\ 0) \in T_{(x_0,\ x_0)}(R).$$

Выберем информационное подмногообразие $W' \subset X$, которое проходит через точку x_0, касательное информационное пространство $T_{x_0}W' = K$ к которому является дополнительным к информационному подпространству $N \subset T_{x_0}X$. Положим $\Sigma = (W' \times X) \cap R$

Мы утверждаем, что

1.$\sum$ — информационное подмногообразие в R;

2. pr_2: $\sum \to X$ — наложение в точке (x_0, x_0).

Сразу заметим, что pr_1: $R \to X$ — корегулярный морфизм, поскольку морфизм pr_2 корегулярный и R — симметричное отношение. Утверждение 1° получается применением теоремы 6 с п.7.11.11 к проекции pr_1: $R \to X$ и вложению i: $W \to X$.

Далее, из определения N ясно, что

$$\mathrm{Ker}\,(T_{(x_0,\ x_0)}(\mathrm{pr}_2)) \simeq N \cap K.$$

Поскольку $N \cap K=(0)$, заключаем, что $T_{(x_0,\ x_0)}(\mathrm{pr}_2)$ — инъекция. С другой стороны, отображение $T_{(x_0,\ x_0)}(\mathrm{pr}_2)$ сюръективно. Действительно, пусть $\eta \in T_{x_0}X$. Возьмем любой вектор $\xi \in T_{x_0}X$ (например, $\xi=\eta$)), такой, что $(\xi,\ \eta) \in T_{(x_0,\ x_0)}R$. Представим ξ в виде $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 \in N$ и $\xi_2 \in K$. Тогда $(\xi_2,\ \eta) \in T_{(x_0,\ x_0)}R$, поскольку $N \times \{0\} \subset T_{(x_0,\ x_0)}R$. Следовательно, элемент $(\xi_2,\ \eta)$ лежит в пересечении $T_{x_0}W' \cap T_{(x_0,\ x_0)}R$. Остается заметить, что $T_{x_0}W' \cap T_{(x_0,\ x_0)}R = T_{(x_0,\ x_0)}\Sigma$ (теорема 5 с п.7.11.11) и $T_{(x_0,\ x_0)}(\mathrm{pr}_2)(\xi_2,\ \eta) = \eta$.

Итак, доказано, что наше отображение есть локальный изоморфизм в точке (x_0, x_0). Поэтому найдутся такие окрестности U_1 и U_2 точки x_0, что pr_2:$\sum \cap (U_1 \times U_1) \to U_2$ — изоморфизм. Обозначим через f обратное отображение. A priori морфизм f имеет вид: $f(x)=(r(x), x)$. Заметим, что $U_2 \subset U_1$ и $r(x)=x$, если $x \in U_2 \cap W'$. Первое очевидно, а второе вытекает из того обстоятельства, что точки (x, x), $(r(x), x)$ лежат в $\sum \cap (U_1 \times U_1)$ и их образы в U_2 совпадают.

Положим, наконец,

$$U=\{x\in U_2\,|\,r(x)\in U_2\cap W'\}$$

и

$$W=U\cap W'.$$

Множество *U*, очевидно, является открытым.

Мы должны установить, что

(а) $r(U)\subset W$,

(б) $r(x)$ — единственный элемент в *W*, эквивалентный элементу x $(x\in U)$.

Установим это.

(а) Пусть $x\in U$. Нужно показать, что $r(x)\in U$, т.е.

$$r(x)\in U_2 \text{ и } r(r(x))\in U_2\cap W'.$$

Первое очевидно; что же касается второго, то довольно заметить, что $r(x)\in U_2\cap W'$ и $r(r(x))=r(x)$.

(б) Если

$$y\equiv r(x) \text{ и } y\in W,$$

это

$$(y,\ x)\in R\cap(W\times U).$$

Но поскольку

$$(r(x),\ x)\in R\cap(W\times U)$$

и проекция

$$\mathrm{pr}_2\colon\ R\cap(W\times U)\to U$$

инъективна, точки $r(x)$ и y совпадают.

Лемма 6. *Если тройка (U, W, r) удовлетворяет условиям предыдущей леммы, то пространство U/R_U есть фактормногообразием.*

Доказательство. Морфизм r: $U\to W$ обладает обратным справа (вложение *W* в *U*), поэтому отображение *r* корегулярно. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "r"] \arrow[dr] & & W \arrow[dl, "\alpha"] \\ & U/R_U & \end{tikzcd}$$

Очевидно, отображение α — гомеоморфизм. Остается перенести структуру информационного многообразия с *W* на U/R_U.

Теорема доказана.

Замечание. Если отношение *R* регулярно, то фактормногообразие *X/R* есть хаусдорфовым тогда и только тогда, когда множество *R* замкнуто в $X\times X$ (это непосредственно вытекает из леммы 2).

7.11.12. ПРИМЕР ХАУСДОРФОВА МНОГООБРАЗИЯ НАД

НЕАРХИМЕДОВЫМ ПОЛЕМ *k*, ОБЛАДАЮЩЕГО ТОЧКОЙ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ОКРЕСТНОСТЕЙ, ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ ОДНОВРЕМЕННО

Пусть k — полное неархимедово поле и A - его кольцо нормирования.

Предположим, что в кольце A имеется такой ненулевой элемент $x\in A$, что факторкольцо A/xA бесконечно.

Мы утверждаем, что A как информационное многообразие аналитически изоморфно информационному многообразию $A\backslash\{0\}$. Для того чтобы это установить, мы покажем, что пространства A и $A\backslash\{0\}$ могут быть представлены в виде несвязного объединения одного и того же числа информационных многообразий, изоморфных A.

Заметим прежде всего, что любой класс смежности по подгруппе $x^{\mu}(\mu\in \mathbf{Z})$ аналитически изоморфен A. Очевидно, A есть несвязное объединение всех сопредельных классов по подгруппе xA. В то же время $A\backslash\{0\}$ есть несвязное объединение следующего набора смежных классов (по подгруппам $x^{\mu}A$, где μ пробегает все целые числа):

1° смежные классы по подгруппе xA, за исключением самой подгруппы xA;

2° смежные классы группы xA по подгруппе x^2A, за исключением самой подгруппы x^2A;

.

.

.

μ° смежные классы группы $x^{\mu-1}A$ по подгруппе x^nA, за исключением самой подгруппы $x^{\mu}A$;

.

.

.

Поскольку факторкольцо A/xA бесконечно, оба описанные семейств смежных классов имеют одну и ту же мощность.

Приведенную выше конструкцию можно рассматривать также как какую-то операцию присоединения точки P к шару A:

$$A\subset A\bigcup\{P\}\sqcup A$$

(точке P отвечает во втором экземпляре шара A точка 0). Подобная операция присоединения обладает тремя важными свойствами:

1) $A\bigcup\{P\}$ — хаусдорфове аналитическое информационное многообразие;

2) точка P принадлежит замыканию множества A;

3) точка P не лежит в замыкании ни одного сопредельного класса по идеалу m.

Последнее свойство есть следствие того факта, что точка 0 находится „достаточно далеко" от каждого из смежных классов, которые были введены выше при разбивке пространства $A\backslash\{0\}$.

Повторим указанную операцию счетное число раз. Именно: сначала к информационному пространству A присоединим точку P_0, потом (воспользовавшись аналитическим изоморфизмом $xA \sqcup A$) аналогичным образом присоединим точку P_1 к информационному пространству xA и склеим информационные пространства $A \bigcup \{P_0\}$ и $xA \bigcup \{P_1\}$ по их общему открытому подмножеству xA. Полученное информационное пространство $A \bigcup \{P_0\} \bigcup \{P_1\}$ есть хаусдорфовым, так как по свойству 3) точки P_0 и P_1 „достаточно далеко" отстоят друг от друга. Пусть информационное пространство $A \bigcup \{P_0\} \bigcup \{P_1\} \bigcup \ldots \bigcup \{P_\mu\}$ уже построено. Информационное пространство $A \bigcup \{P_0\} \bigcup \{P_1\} \bigcup \ldots \bigcup \{P_\mu\} \bigcup \{P_{\mu+1}\}$ мы определим как результат склеивания информационных пространств $A \bigcup \{P_0\} \bigcup \{P_1\} \bigcup \ldots \bigcup \{P_\mu\}$ и $x^{\mu+1}A \bigcup \{P_{\mu+1}\}$ по их общему открытому подмножеству $x^{\mu+1}A$. В результате мы приходим к счетной возрастающей последовательности хаусдорфовых информационных многообразий, таких, что каждое следующее содержит предыдущее в качестве своего открытого подмножества. Объединение этих информационных многообразий - множество X — наделяется естественной топологией, относительно которой все его подмножества $A \bigcup \{P_0\} \bigcup \{P_1\} \bigcup \ldots \bigcup \{P_\mu\}$ открыты и обладают исходной топологией.

Так как по нашему построению точки $P_0, P_1, \ldots, P_\mu, \ldots$ находятся „достаточно далеко" друг от друга, информационное пространство X, получаемое в пределе, есть информационным хаусдорфовым. Покажем, что точка $0 \in X$ не имеет фундаментальной системы окрестностей, которая состоит из множеств, открытых и замкнутых одновременно. Если бы такая система существовала, то одна из ее окрестностей U содержалась бы в информационном пространстве A. Поскольку совокупность $x^\mu A$ образовывает фундаментальную систему окрестностей точки 0, найдется такое целое число μ, что $x^\mu A \subset U$. Обозначив через $\overline{x^\mu A}$ замыкание подмножества $x^\mu A \subset X$, мы видим, что, с одной стороны, $\overline{x^\mu A} \subset U \subset A$. а из другой, $P_\mu \in \overline{x^\mu A}$. Тем самым мы получаем противоречие, поскольку по построению $P_\mu \notin A$.

Замечание. Мы предполагали существования такого полного неархимедова поля k и такого ненулевого элемента $x \in A$, что факторкольцо A/xA бесконечно. Поле k обладает этим свойством в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

1) поле вычетов k_v бесконечно;
2) нормирование поля k имеет недискретную область значений.

Заметим, что неархимедовы поля, которые не удовлетворяют ни одному из этих условий, исчерпываются конечными расширениями поля p-адических чисел и полей вида $\mathbf{F}((X))$, где $\mathbf{F}$ - конечное поле.

7.11.13. СТРОЕНИЕ *P*-АДИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

При изучении информационных многообразий над *локально компактным неархимедовым* полем k основную роль играет понятие несвязного объединения.

Пусть X— некоторое аналитическое информационное многообразие; предположим, что его размерность всюду одинакова и равна $n(n\geq 0)$. Предположим также, что информационное пространство X хаусдорфово и непусто.

Символ $B(r)(x)$ будет, как и раньше, обозначать шар в линейном информационном пространстве k^n радиуса r ($r>0$) с центром в точке $x\in k^n$.

Лемма 1. *Шар $B(r)(x)$ ($r>0$) является открытым и компактным подмножеством информационного пространства k^n. Этим свойством обладает, следовательно, любой шар информационного многообразия X.*

Доказательство.

1°. Компактность. Так как поле k локально компактно, точка x обладает компактной окрестностью U. Мы можем поэтому считать, что для достаточно малого $\varepsilon\in\mathbf{R}$ ($\varepsilon>0$) все шары вида $B(s)(x)$, где $s<\varepsilon r$, содержатся в U. Такие шара компактны ввиду их замкнутости. Поскольку абсолютное значение поля k нетривиально, найдется такой ненулевой элемент $\alpha\in k$, что $|\alpha|<\varepsilon$. Преобразование $f(y)=x+\alpha(y-x)$ есть гомеоморфизм шара $B(r)(x)$ на шар $B(|\alpha|r)(x)$, что и доказывает компактность первого шара.

2°. Открытость. Для того чтобы показать, что множество $B(r)(x)$ открыто, приходится существенно пользоваться неархимедовостью поля k. Пусть $y\in B(r)(x)$. Мы утверждаем, что $B(r)(y) = B(r)(x)$. (Это, в частности, означает, что шар $B(r)(x)$ — окрестность точки y.) Поскольку $x\in B(r)(y)$, нам достаточно в силу симметрии доказать включение $B(r)(y)\subset B(r)(x)$. Пусть $x\in B(r)(y)$, тогда

$$|z-x|\leqslant\max(|z-y|,|y-x|)\leqslant r,$$

так что $z\in B(r)(y)$ как и утверждалось.

Замечание. Подобными соображениями можно установить следующий факт. Пусть B_1 и B_2 - шары радиусов r_1 и r_2 соответственно, причем $r_1 \leq r_2$. Тогда возможны лишь два случая: либо шар B_1 содержится в шаре B_2, либо не пересекается с ним.

Лемма 2. *Пусть B - некоторый шар в информационном пространстве k^n, и пусть U — открытое и замкнутое подмножество этого шара. Существует такое положительное число r, не превышающее радиуса шара B, что множество U представляется в виде несвязного объединения конечной совокупности шаров радиуса r.*

Доказательство. Поскольку множество U открыто, оно может быть представлено в виде объединения некоторой совокупности шаров. Но так как множество U замкнуто и лежит в B, оно является компактным. Следовательно, упомянутую выше совокупность можно считать конечной, а ввиду предыдущего замечания - даже несвязной. Тот факт, что все шары могут быть выбраны одного радиуса, почти очевиден, так как каждый шар радиуса s может быть (в силу замечания и леммы 1) представлен в виде конечного несвязного объединения шаров любого радиуса $s' \leq s$.

Замечание. Пусть B — некоторый шар информационного многообразия X, и пусть U — открытое и замкнутое подмножество этого шара. Из доказанной леммы 2 непосредственно вытекает, что U есть несвязное объединение конечного числа шаров.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *информационное многообразие X парокомпактно;*

(2) *информационное многообразие X представляется в виде несвязного объединения шаров.*

Доказательство.

Импликация (2) $\Longrightarrow$ (1) очевидна, так как несвязное объединение компактных пространств парокомпактно.

Докажем, что (1) $\Longrightarrow$ (2). Покажем вначале, что информационное пространство X обладает локально конечным покрытием, состоящим из шаров. Так как X — информационное многообразие, оно покрывается некоторой совокупностью шаров $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$. По условию в это покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_\mu\}_{\mu\in M}$. Пользуясь известными теоремами общей топологии, впишем в это покрытие локально конечное замкнутое покрытие $\{W_\nu\}_{\nu\in N}$. Пусть φ: $M \to L$ и ψ: $N \to M$ — такие отображения, что $V_\mu \subset U_{\varphi(\mu)}$ и $W_\nu \subset V_{\psi(\nu)}$. Для каждого индекса $\nu \in N$ имеем

$$W_\nu \subset V_{\psi(\nu)} \subset U_{\varphi\psi(\nu)}.$$

Множество W_ν замкнуто и лежит в компактном шаре $U_{\varphi\psi(\nu)}$, следовательно, оно само компактно. Поскольку множество $V_{\varphi(\nu)}$ открыто, найдется конечный набор шаров $B_{\nu,i}$ $i\in I_\nu$, лежащих в $V_{\varphi(\nu)}$ и покрывающих W_ν. Воспользовавшись локальной конечностью покрытия $\{V_\mu\}_{\mu\in M}$, мы можем выбрать указанные шары таким образом, что каждый шар $B_{\nu,i}$ будет пересекаться лишь с конечным числом множеств V_μ. Таким образом, совокупность шаров $\{B_{\nu,i}\}_{\nu\in N,\, i\in I_\nu}$ образует локально конечное покрытие информационного многообразия X, такое, что любой шар $B_{\nu,i}$ пересекается лишь с конечным числом шаров из этой совокупности.

Построенное покрытие обозначим просто $\{U_i\}_{i\in I}$. Обозначим, дальше, через $F(I)$ множество всех конечных подмножеств множества I. Для каждого элемента $I\in F(I)$ положим

$$U_J = \bigcap_{i\in J} U_i \cap \Bigl(X \setminus \bigcup_{j\notin J} U_j\Bigr).$$

Очевидно, что

$$U_i \cap \Bigl(X \setminus \bigcup_{j\notin J} U_j\Bigr) = \bigcap_{j\notin J} (U_i \setminus U_j), \quad i\in J \ (J \neq \varnothing).$$

В правой части лишь для конечного числа членов $U_i \bigcap U_j \neq \varnothing$. Каждое множество вида $U_i \backslash U_j$ открыто и компактно; следовательно, и множество

$$U_i \cap \Bigl(X \setminus \bigcup_{j\in J} U_j\Bigr),$$

будучи пересечением конечного числа множеств $U_i \backslash U_j$, также открыто и компактно. Из всего сказанного следует, что каждое множество U_j (если оно непусто) есть открытым компактным подмножеством шаров и потому представимо в виде несвязного объединения шаров. Остается заметить, что множества U_J, $J\in F(I)$, по построению попарно не пересекаются. Теорема доказана.

Теорема 2. *Обозначим через q число элементов поля вычетов k_ν. Предположим, что информационное многообразие X компактно, непустое и имеет во всех точках одинаковую размерность $n\geq 1$. Тогда*

(1) *X есть несвязное объединение конечного числа шаров;*

(2) *число шаров, которые принимают участие в представлении информационного пространства X в виде несвязного объединения,*

имеет вычет по модулю $(q — 1)$, *не зависящий от выбора этого представления.*

(Итак, такое информационное многообразие X определяется, с точностью до изоморфизма, элементом кольца $\mathbf{Z}/(q — 1)\mathbf{Z}$.)

Набросок доказательства. Утверждение (1) есть очевидное следствие компактности информационного многообразия X и теоремы 1.

Что касается утверждения (2), то сначала мы осуществим ряд несложных редукций, которые сведут нашу теорему к некоторому частному случаю. Все проводимые редукции основываются на следующем замечании: любой шар можно разбить на q' шаров, где i — целое положительное число, не изменив вычета числа шаров по модулю q—1.

Итак, пусть X представленное двумя способами в виде конечных несвязных объединений шаров $\{U_i\}_{i\in I}$ и $\{V_j\}_{j\in J}$. Мы должны показать, что Card $(I)\equiv$ Card(I) (mod$(q$-1$)$).

Шаг 1. Редукция к случаю, когда покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$ вписано в покрытие $\{V_j\}_{j\in J}$.

Шаг 2. Редукция к случаю X=V_j и J= $\{j\}$. После этого шага ситуация такая:

а) X — шар в пространстве k^n;

б) U_i — шар в пространстве k^n, $i\in I$;

в) существует набор аналитических изоморфизмов φ_i: $U_i\to X$, $j\in J$, таких, что X есть несвязное объединение множеств $\{\varphi_i U_i\}$.

Шаг 3. Редукция к случаю, когда все отображения φ_i задаются сходящимися степенными рядами.

Шаг 4. Редукция к случаю $\varphi_i = L_i\circ\psi_i$, где L_i — линейный изоморфизм, а ψ_i — аналитический изоморфизм шара на шар. После этого шага мы можем считать, что $\varphi_i = L_i$.

Шаг 5. Чуть ниже мы докажем следующее утверждение. Пусть U — шар в пространстве k^n и L — линейный изоморфизм. Тогда существует такое число r (r >0), что

1) LU есть несвязное объединение шаров радиуса s, где s — любое положительное число, которое не превышает r;

2) число шаров, которые принимают участие в любом таком разложении, равняется степени q.

Посмотрим, как из этого утверждения вытекает наша теорема. Пользуясь конечностью множества f и приведенным выше утверждением, мы можем выбрать такое положительное число r, что все множества L_iU_i представляются как несвязные объединения шаров радиуса r. Число шаров, которые принимают участие в разбиении каждого множества L_iU_i равно q^{m_i}, а число шаров в разбиении всего пространства X (т.е. общее число шаров) равняется q^m. Итак,

$$1 \equiv q^m = \sum_{i \in I} q^{m_i} \equiv \sum_{i \in I} 1 = \mathrm{Card}(I) \ (\mathrm{mod}\,(q-1)),$$

что и доказывает теорему в этом частном случае.

Нам осталось установить справедливость сформулированного высшее утверждение. Отметим прежде всего, что число смежных классов по идеалу m_v^{μ}, $\mu \in Z$, $\mu > 0$ (т.е. число всевозможных сдвигов этого идеала) конечно и равно Card (A_v / m_v^{μ}) = q^n.

Выполняя подходящие сдвиги и гомотетии, мы можем считать, что центром шара U служит точка 0, $U \subset A_v^n$ и $L \in GL(n, A_v)$, при этом, очевидно, $LU \subset A_v^n$. Используя неархимедовость поля k, легко усмотреть, что шар U, а вместе с ним и множество LU является A_v-подмодулями модуля A_v^n. Обозначим через h' число Card (A_v/LU). Это число конечно, так как h'=Card(A_v/U), а пространство A_v^n компактно. Мы видим, таким образом, что множество A_v^n есть несвязное объединение сдвигов подмножества LU.

В силу леммы 2 существует положительное число r, которое удовлетворяет требованию 1) нашего утверждения. Докажем, что выполняется и требование 2).

Возьмем любое положительное число $s \leq r$ и представим LU в виде несвязного объединения шаров радиуса s; число их обозначим через h. Используя представление A_v^n в виде несвязного объединения сдвигов множества LU, разобьем A_v^n на hh' непересекающихся шаров радиуса s. Мы должны показать, что целое число h имеет вид q^m, где $m \in Z$ и $m \geq 0$. Для этого достаточно установить, что таким свойством обладают числа h' и hh'.

Относительно h' это очевидно. Действительно, h'=Card(A_v^n/LU), но A_v^n/LU — периодический модуль над кольцом главных идеалов A_v и, следовательно, разлагается в прямое произведение модулей вида A_v/m_v^{μ}. Из числа построенных выше шаров радиуса s выберем тот шар, который содержит точку 0; он, очевидно, имеет вид $(\mathrm{m}_v^{\mu})^n$. Следовательно, hh' = Card(A_v^n /$(\mathrm{m}_v^{\mu})^{n)}$ = $(q^{\mu})^n$, что и требовалось доказать.

7.11.14. ТРАНСФИНИТНАЯ *p*-АДИЧЕСКАЯ ПРЯМАЯ

В связи с теоремой 1 следует заметить, что существуют непаракомпактные хаусдорфовы многообразия над локально компактным неархимедовым нулем *k*.

Мы приведем здесь пример такого многообразия.

Мы построим индуктивную систему пространств $\{X_\gamma\}$, индексы которой пробегают первое несчетное (вполне упорядоченное) множество. Индуктивный предел $\varinjlim X_\gamma$ даст нам искомое непаракомпактное многообразие.

В качестве многообразия X_γ мы возьмем экземпляр кольца нормирования A_v поля *k*. Отображение $X_\delta \to X_\gamma$ для $\delta<\gamma$ мы определим трансфинитной индукцией по γ.

Выберем фиксированный простой элемент π кольца A_v.

1. $\gamma = 0$. Условие $\delta < \gamma$ в этом случае бессодержательно.

2. $\gamma = \gamma' + 1$, где γ'- некоторое порядковое число. Отображение $X_{\gamma'} \to X_\gamma$ есть по определению умножение на элемент π. Для производных индексов $\delta<\gamma$ определим отображение $X_\delta \to X_\gamma$ как композицию $X_\delta \to X_{\gamma'} \to X_\gamma$.

3. γ - предельное порядковое число.

Пусть

$$Y_\gamma = \varinjlim_{\delta < \gamma} X_\delta.$$

Пространство Y_γ есть объединение счетного семейства открытых, компактных подпространств X_δ ($\delta < \gamma$); в частности, пространство Y_γ паракомпактно. По теореме 1 оно является несвязным объединением шаров. Число этих шаров обязательно должно быть счетным, так как несвязное объединение всегда локально конечно, а в любому локально конечном покрытии лишь конечное число элементов этого покрытия может пересекаться с заданным множеством X_γ. Поскольку пространство $A\backslash\{0\}$ также может быть представленно в виде объединения счетного числа шаров, существует аналитический изоморфизм φ_γ: $Y_\gamma \to A\backslash\{0\}$. Определим для $\delta < \gamma$ отображение $X_\delta \to X_\gamma$ как композицию отображений

$$X_\delta \to Y_\gamma \xrightarrow{\varphi_\gamma} A\setminus\{0\} \subset A = X_\gamma.$$

Таким образом, дано полное индуктивное определение отображений $X_\delta \to X_\gamma$ ($\delta < \gamma$).

Многообразие

$$X = \varinjlim X_\gamma$$

обладает следующие основные свойства.

1) *Любое счетное семейство* $\{K^n\}$ *компактных подмножеств пространства* X *содержится в некотором компактном множестве.*

2) *Пространство X некомпактно.*

Доказательство.

1) Поскольку

$$K_n = \bigcup (K_n \cap X_\gamma)$$

и поскольку множество X_γ открыто в X, существует номер γ_n, такой, что $K_n \subset X_{\gamma_n}$ Выбрав индекс γ таким образом, чтобы $\gamma_n \leq \gamma$ для всех n, мы видим, что $K_n \subset X_\gamma$, а множество X_γ компактно.

2) Некомпактность пространства X очевидна, так как $X_\gamma \neq X$ для любого индекса γ.

Мы предоставляем читателю доказать, что локальное компактное пространство X, которое обладает свойствами 1) и 2), не является парокомпактним.

8. Римановы информационные пространства

8.1. Риманово информационное пространство

Информационное многообразие является той основой, на которой строится риманово информационное пространство. Пути для этого мы уже наметили в конце п. 7.5. Чтобы превратить информационное многообразие в риманово информационное пространство, нужно внести в него метрику. Это мы осуществим заданием в информационном многообразии метрического тензора, аналогичного метрическому тензору евклидова информационного пространства в криволинейных координатах. Дадим точное определение.

Римановым информационным пространством V_n *мы будем называть информационное многообразие* W_n, *в котором задано поле тензора*

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{8.1}$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$\mathrm{Det}\,|\,g_{ij}\,| \neq 0, \qquad g_{ij} = g_{ji}. \tag{8.2}$$

В остальном тензор $g_{ij}(M)$ выбирается произвольно; это значит, что на одно и то же информационное многообразие W_n можно по-разному накладывать риманову метрику. Тензор $g_{ij}(M)$ мы будем называть *метрическим;* его мы кладем в основу построения римановой геометрии по аналогии с евклидоиой геометрией, вполне определяемой своим метрическим тензором. В этом разделе информационное многообразие W_n имеет класс $N \geq 2$ и, соответственно, функции (8.1) непрерывно дифференцируемы N— 1 раз.

Мы начнем с рассмотрения касательного аффинного информационного пространства A_n к нашему информационному многообразию в какой-нибудь точке M. Векторы ξ этого пространства служат информационным изображением тензоров ξ^i в данной точке M. Располагая тензорным полем $g_{ij}(M)$, *мы превратим каждое касательное информационное пространство из аффинного* A_n *в евклидово* R_n, *вводя в нем скалярное произведение любых двух векторов* ξ, η *по формуле*

$$\xi\eta = g_{ij\,(M)}\xi^i\eta^j. \tag{8.3}$$

В сущности говоря, к этому и сводится информационное осмысливание тензора $g_{ij}(M)$; все остальное будет уже отсюда вытекать. Можно было бы даже сказать, что риманово информационное пространство V_n — это информационное многообразие W_n, в котором в каждое касательное информационное пространство A_n внесена евклидова метрика; нужно было бы лишь обеспечить достаточно гладкое ее изменение от точки к точке (что у нас обеспечивается непрерывной дифференнируемостыо функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$). В силу полного свертывания в правой части (8.3) скалярное произведение $\xi\eta$ представляет собой инвариант. Очевидно, $\xi\eta$ линейно зависит от ξ и от η, обладает симметрией

$$\xi\eta = \eta\xi$$

в силу симметрии тензора g_{ij} и дает невырожденную евклидову метрику в силу условия (8.1). Все это показывается дословно так же, как в п. 5.1.

Мы будем называть риманово информационное пространство *собственно римановым* или *псевдоримановым* в зависимости от того, будут ли его касательные информационные пространства собственно евклидовыми или псевдоевклидовыми (мы рассматриваем только вещественные пространства). Все, сказанное для евклидовых информационных пространств, будет справедливо для касательных информационных пространств R_n в каждой точке M риманова информационного пространства V_n. В частности, длина вектора ξ выражается формулой

$$|\xi| = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}. \tag{8.4}$$

При этом собственно риманово информационное пространство характеризуется тем, что квадратичная форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ будет положительно определенной.

Пусть в какой-нибудь точке *M* риманова информационного пространства задан тензор, например, $V^{i..}_{.rs}$. Его можно рассматривать одновременно и как тензор в касательном информационном пространстве R_n относительно локального репера. При этом $g_{ij}(M)$ служит в R_n метрическим тензором. Составим контравариантный метрический тензор $g^{ij}(M)$, координаты которого образуют матрицу, обратную $\| g_{ij}(M) \|$. Как мы знаем, в евклидовом информационном пространстве R_n разница между верхними и нижними индексами является несущественной в том смысле, что верхние индексы можно переводить в нижние и, наоборот, при помощи метрического тензора. Так, например, индекс *r* у нашего тензора можно «поднять», т. е. составить тензор

$$V^{ir.}_{..s}=g^{rp}\, V^{i..}_{.ps}. \tag{8.5}$$

Обратно, у полученного тензора индекс *r* можно «опустить», причем мы возвращаемся к прежнему тензору:

$$V^{i..}_{.rs}=g_{rp}V^{ip.}_{..s}. \tag{8.6}$$

Эти взаимно обратные операции «поднятия» и «опускания» данного индекса можно рассматривать и для тензорных полей $V^{i..}_{.rs}(M)$, $V^{ir.}_{..s}(M)$, подразумевая, что формулы (8.5), (8.6) имеют место в каждой точке рассматриваемой области.

Рассмотрим теперь в римановом информационном пространстве кривую

$$x^i=x^i(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b. \tag{8.7}$$

Бесконечно малому смещению по этой кривой отвечает бесконечно малый вектор $dx^i(t)$ в касательном пространстве (п. 7.8). Но теперь мы можем измерить длину этого вектора, чего раньше (в информационном многообразии) нельзя было сделать. Получим:

$$|d\mathbf{x}|=\sqrt{d\mathbf{x}^2}=\sqrt{g_{ij}dx^idx^j}.$$

По аналогии с евклидовым информационным пространством *мы принимаем длину вектора* d**x** *за дифференциал дуги ds вдоль нашей кривой, так что*

$$ds^2=d\mathbf{x}^2=g_{ij}(x^1,\ \ldots,\ x^n)\,dx^idx^j. \tag{8.8}$$

Здесь $x^1, \ldots, x^n$—координаты той точки *M,* из которой производится бесконечно малое смещение по кривой. Таким образом, квадрат дифференциала дуги выражается *дифференциальной квадратичной формой* от координат x^i. При преобразовании координат x^i эта квадратичная форма инвариантна, так как представляет собой скалярный квадрат вектора dx^i, или, что то же, результат полного свертывания тензора g_{ij} с дважды взятым тензором dx^i. Квадратичную форму $g_{ij}dx^i dx^j$ мы будем называть *метрической.*

В определении риманова информационного пространства можно заменить задание тензорного поли $g_{ij}(x^1, ..., x^n)$ заданием метрической квадратичной формы (или, как говорят еще, линейного элемента риманова информационного пространства). Тогда определение будет звучать так:

Римановым информационным пространством V_n *называется информационное многообразие* W_n, *в котором задана инвариантная дифференциальная квадратичная форма*

$$g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i\, dx^j, \tag{8.9}$$

где g_{ij} N— 1 *раз непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию*

$$\mathrm{Det}\,|g_{ij}| \neq 0 \qquad (g_{ij} = g_{ji}). \tag{8.10}$$

Из инвариантности квадратичной формы будет следовать, что g_{ij} образуют тензорное поле, так что мы возвращаемся к прежнему определению. В самом деле, запишем инвариантность формы (8.9) при переходе к новым координатам $x^{i'}$:

$$g_{i'j'}dx^{i'}\, dx^{j'} = g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Подставляя в правую часть

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, dx^{i'},$$

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, dx^{j'},$$

получаем тождественное равенство двух квадратичных форм относительно переменных $dx^{1'}$, ..., $dx^{n'}$:

$$g_{i'j'}dx^{i'}\, dx^{j'} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, dx^{i'}\, dx^{j'}.$$

Отсюда, учитывая, что $g_{ij} = g_{ji}$, $g_{i'j'} = g_{j'i'}$, получим:

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, g_{ij},$$

т. е. тензорный закон преобразования для g_{ij}. Мы вернулись к первому определению.

За *длину кривой* (8.7) мы принимаем интеграл от дифференциала дуги

$$s=\int_a^b \sqrt{g_{ij}dx^i\,dx^j}=$$

$$=\int_a^b \sqrt{g_{ij}(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t))\frac{dx^i(t)}{dt}\frac{dx^j(t)}{dt}}\,dt. \qquad (8.11)$$

В последнем выражении мы выносим dt из-под знака радикала и везде явно выписываем окончательный аргумент t, чтобы строение подынтегральной функции было видно полностью. Инвариантный характер интеграла относительно преобразования координат x^i ясен из инвариантности квадратичной формы под знаком радикала (полное свертывание); инвариантность относительно преобразования параметра t вдоль кривой проверяется очевидным образом.

Собственно риманово пространство характеризуется тем, что в нем метрическая квадратичная форма будет положительно определенной, а ds—всегда вещественным. Напротив, в псевдоримановом пространстве ds может быть вещественным, чисто мнимым и нулем. При этом радикал в (8.11) мы условимся брать положительным или с положительным коэффициентом при i. Кривые у нас будут, следовательно, трех сортов: вещественной длины, мнимой длины и изотропные.

Рассмотрим теперь в римановом информационном пространстве V_n поверхность $\mathfrak{M}_m$

$$x^i= x^i(u^1,\ldots,u^m),$$

сохраняя все обозначения и предположения п. 7.9.

Вычислим дифференциал дуги при произвольном бесконечно малом смещении при произвольной кривой на $\mathfrak{M}_m$. Пользуясь снова формулой (8.8) и учитывая, что теперь

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}du^\alpha \qquad (8.12)$$

$\left(\text{и аналогично } dx^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^\beta}du^\beta\right)$, получаем:

$$ds^2=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}du^\alpha\,du^\beta.$$

Обозначим:

$$G_{\alpha\beta}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \qquad (8.13)$$

Очевидно, $G_{\alpha\beta}$ представляет собой скалярные произведения векторов

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta},$$

касательных к координатным линиям u^α, u^β.

Учитывая, что $G_{\alpha\beta}$ зависят от точки на $\mathfrak{M}_m$, т. е. от u^1, ...,u^m, записываем окончательно:

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(u^1, \ \ldots, \ u^m)\, du^\alpha\, du^\beta. \qquad (8.14)$$

Итак, на поверхности $\mathfrak{M}_m$ *возникает дифференциальная квадратичная форма от переменных* u^1, ..., u^m, *выражающая квадрат дифференциала дуга и, следовательно, инвариантная (линейный элемент поверхности* $\mathfrak{M}_m$).

Используя второе определение риманова информационного пространства, мы вправе утверждать, что поверхность $\mathfrak{M}_m$ представляет собой m-мерное риманово информационное пространство V_m с метрическим тензором $G_{\alpha\beta}$, *если только соблюдается условие*

$$\operatorname{Det}|G_{\alpha\beta}| \neq 0. \qquad (8.15)$$

Что касается условия $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$, то оно очевидным образом следует из формулы (8.13) и условия $g_{ij} = g_{ji}$.

Условие (8.15) не обязано соблюдаться само собой, хотя, грубо говоря, большей частью оно соблюдается. Здесь положение такое же, как с плоскостями в евклидовом информационном пространстве: большей частью они бывают неизотропными и несут на себе евклидову метрику, но могут быть и изотропными — с вырожденной метрикой. Если условие (8.15) соблюдается, то поверхность мы будем называть *неизотропной;* она несет на себе риманову метрику, и в дальнейшем мы обозначаем ее V_m, т. е. как m-мерное риманово информационное пространство. Обозначение V_m мы будем употреблять только в случае неизотропной поверхности.

Если же условие (8.15) не соблюдается,

$$\operatorname{Det}|G_{\alpha\beta}| = 0, \qquad (8.16)$$

то поверхность мы называем *изотропной* и сохраняем для нее обозначение $\mathfrak{M}_m$. Квадратичная форма (8.14) имеет на ней неполный ранг, и метрика вырождается. Как правило, изотропными поверхностями мы интересоваться не будем. В случае *собственно риманова информационного* пространства все поверхности неизотропные, так как условие (8.15) вытекает из положительной определенности формы

$ds^2 = G_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$. Правда, непосредственно нам дана положительная определенность лишь для формы $ds^2 = g_{ij}dx^i\, dx^j$. Но если принять, что не все du^α равны нулю, то из условия (7.88) следует, что соответствующие $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha$ тоже не могут быть все равны нулю, а следовательно,

$$G_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \,(= g_{ij}\, dx^i\, dx^j) > 0.$$

Рассмотрим теперь *касательную плоскость* A_m к поверхности $\mathfrak{M}_m$. Эта плоскость лежит в касательном пространстве A_n, которое сейчас у нас является евклидовым, причем ее векторы ξ^i в силу (7.97) имеют вид

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha, \tag{8.17}$$

где ξ^α —всевозможные тензоры в $\mathfrak{M}_m$ в данной точке *M.*

Скалярное произведение любых двух векторов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ плоскости A_m мы получаем, вставляя в (8.3) выражения для ξ^i, η^i согласно (8.17):

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha, \qquad \eta^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\eta^\beta.$$

В результате

$$\xi\eta = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\xi^\alpha\eta^\beta = G_{\alpha\beta}(M)\,\xi^\alpha\eta^\beta. \tag{8.18}$$

Пусть соблюдается условие (8.15). Плоскость A_m будет неизотропной и несет евклидову метрику. Для информационного многообразия $\mathfrak{M}_m$ и тем самым для риманова информационного пространства V_m плоскость A_m служит касательным информационным пространством, так как все тензоры ξ^α находят себе изображение в виде ее векторов согласно (8.17). Формула (8.18) для V_m повторяет формулу (8.3) для V_n. Метрическим тензором служит теперь $G_{\alpha\beta}$.

Мы будем называть *нормальной плоскостью* к поверхности V_m в данной точке *M* n — m-мерную плоскость B_{n-m} в касательном к V_n евклидовом информационном пространстве A_n, ортогональную к касательной плоскости A_m и проходящую через *M.* В случае гиперповерхности V_{n-1} нормальная плоскость B_1 будет одномерной, т. е. представляет собой просто прямую (нормаль).

В трехмерном римановом информационном пространстве V_3 (в частности, в обычном евклидовом информационном пространстве) можно рассматривать одномерные поверхности V_1, т. е. кривые и двумерные поверхности V_2. В согласии с элементарной дифференциальной геометрией в случае V_1 нормальная плоскость имеет n — m= 2 измерения, а в случае V_2 она представляет собой просто нормаль к поверхности $(n$ — m=1).

8.2. Евклидово информационное пространство R_n как частный случай риманова

Мы видели в п 7.5, что евклидово информационное пространство (вообще говоря, рассматриваемое в пределах некоторой области Ω) обладает, как и риманово, полем метрического тензора $g_{ij}(M)$, причем этот тензор определяет всю его геометрическую информацию. Следовательно, мы можем рассматривать евклидово информационное пространство как частный случай риманова. В чем же выражается особенность этого частного случая?

В евклидовом информационном пространстве всегда можно перейти в такую специальную координатную систему, именно, в любую аффинную, в которой координаты метрического тензора становятся константами:

$$g_{ij}\ (M) = \text{const}.$$

Между тем в произвольном римановом информационном пространстве этого, вообще говори, сделать нельзя. Как бы мы ни подбирали новую координатную систему $x^{i'}$, нам не удастся добиться, чтобы в ней координаты метрического тензора

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$$

оказались бы константами. Таким образом, в римановом информационном пространтстве не существует, вообще говоря, специальных «прямолинейных» координатных систем наподобие аффинных. Поэтому мы здесь говорим просто о координатных системах без прилагательного «криволинейные»: они все по необходимости являются криволинейными в силу «кривого» характера самой метрики. Возникает вопрос, как узнать фактически, возможен ли в данном римановом информационном пространстве V_n переход к таким координатам x^i с некоторой областью изменения Ω, в которых

$$g_{ij}\ (M) = \text{const},$$

т. е. можно ли отождествить V_n с некоторой областью Ω в евклидовом пространстве, заданном в аффинных координатах. Но на этот вопрос мы сможем ответить позже.

Если в римановом информационном пространстве V_n в целом мы не в состоянии подобрать таких координат x^i, чтобы в них g_{ij} *(M)* были константами, *но можем сделать это по отдельности в некоторой окрестности каждой его точки, то пространство* V_n *называется локально евклидовым.*

Так, например, если отождествить в квадрате точки каждой стороны с соответствующими точками противоположной стороны, то квадрат «склеится» в двумерное информационное многообразие, устроенное наподобие тора. При этом все четыре вершины склеятся в одну точку, в которой сойдутся все четыре угла квадрата. Если сохранить в этом информационном многообразии прежнюю метрику, то мы получаем пример локально евклидова информационного пространства двух измерений (разумеется, это пространство приходится рассматривать абстрактно, не пытаясь реализовать его в виде тора в обычном пространстве: в последнем случае метрика не может быть локально евклидовой). Здесь мы имеем дело с неэлементарным информационноым многообразием; но и элементарное информационное многообразие может нести на себе локально евклидову метрику, не будучи областью евклидова информационного пространства. Так, последовательно подклеивая друг к другу листы бумаги, нетрудно сделать так, что последний лист будет заходить на первый (причем мы их оставим несклеенными). Мы получим локально евклидово двумерное информационное многообразие, не являющееся в то же время областью евклидовой плоскости.

В евклидовом информационном пространстве нет надобности в каждой точке *M* строить касательное информационное пространство, как мы делали в римановом информационном пространстве общего вида. Действительно, каждый контравариантный тензор ξ^i в евклидовом информационном пространстве, заданный в криволинейных координатах в какой-нибудь точке *M,* изображается вполне определенным вектором в этом же пространстве (см. (7.24)). Поэтому евклидово информационное пространство служит, как мы будем считать, само к себе касательным в любой точке *M.* Отдельных от него касательных информационноых пространств рассматривать не будем.

Мы выяснили, что поверхность V_m в римановом информационном пространстве V_n сама является римановым информационноым пространством.

В частности, *в качестве вмещающего информационного пространства* V_n *можно взять евклидово информационное пространство* R_n.

Простейший пример такого рода доставляет теория поверхностей в обычном евклидовом информационном пространстве R_3. На поверхности, отнесенной к параметрам *u, v,* появляется первая основная квадратичная форма, выражающая квадрат дифференциала дуги

$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2. \tag{8.19}$$

Тем самым поверхность можно считать двумерным римановым информационным пространством с метрической квадратичной формой (8.19) и соответственно с метрическим тензором

$$g_{11} = E, \qquad g_{12} = g_{21} = F, \qquad g_{22} = G. \tag{8.20}$$

Риманова геометрия, порождаемая на поверхности метрической квадратичной формой (8.19), носит название *внутренней геометрии* поверхности; она инвариантна при изгибании поверхности.

Аналогичным образом и в многомерных евклидовых (в том числе и псевдоевклидовых) информационных пространствах R_n мы можем рассматривать любые поверхности V_m, получая на них каждый раз определенную риманову геометрию (при условии (8.15)).

По сравнению с изучением поверхностей V_m в произвольном римановом информационнои пространстве V_n мы получаем здесь ряд преимуществ. Прежде всего будем считать, что уравнения поверхности V_m

$$x^i = x^i(u^1, \ \ldots, u^m) \tag{8.21}$$

записаны в аффинных координатах x^i. Тогда можно перейти к параметрическому уравнению поверхности в векторной форме, выразив радиус-вектор **x** произвольной точки поверхности как функцию параметров:

$$\mathbf{x} = x^i(u^1, \ldots, u^m)\mathbf{e}_i \text{ или, коротко, } \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \ldots, u^m). \tag{8.22}$$

Касательный вектор к произвольной кривой

$$u^\alpha = u^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1.\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{8.23}$$

на нашей поверхности мы находим, дифференцируя радиус-вектор **x** по t:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}.$$

Проводя через данную точку M всевозможные кривые по поверхности, мы получаем в качестве $\frac{du^\alpha}{dt}$ всевозможные тензоры ξ^α на V_m, а в качестве $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ — всевозможные векторы ξ, касательные к V_m данной точке. Итак,

$$\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha. \tag{8.24}$$

В результате касательные векторы $\frac{dx}{dt}$ ’откладываемые от точки M, заполняют m-мерную плоскость A_m, построенную на векторах

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^m}, \tag{8.25}$$

касательных к координатным линиям. Линейная независимость этих векторов видна из условия (7.88). В отличие от риманова информационного пространства все рассматриваемые векторы и плоскость A_m (касательная плоскость) принадлежат тому же евклидову информационному пространству, в котором расположена поверхность (а не специально построенному в каждой точке M касательному информационному пространству A_n). Этому же евклидову информационному пространству принадлежит и нормальная плоскость B_{n-m}, ортогональная к касательной плоскости A_m. В частности, для гиперсферы S_{n-1} с центром в начале O радиус-вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{x}^2 = \text{const}.$$

Дифференцируя $\mathbf{x}^2$ вдоль любой кривой на гиперсфере, получим:

$$2\mathbf{x}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} \perp \mathbf{x}.$$

Таким образом, все касательные к гиперсфере S_{n-1} векторы в данной точке (а значит, и касательная гиперплоскость A_{n-1}) ортогональны к радиусу-вектору данной точки.

Наконец, линейный элемент на поверхности V_m можно найти, применяя формулу (6.38):

$$ds^2 = dx^*$$

к произвольной кривой на поверхности V_m. Так как

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} du^\alpha,$$

то

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta. \tag{8.26}$$

Сравнивая с (8.14), получаем:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\beta}. \tag{8.27}$$

Мы получили выражение координат метрического тензора в римановом информационном пространстве V_m (предполагаем, что $\mathrm{Det}|G_{\alpha\beta}| \neq 0$). Возникает вопрос, любое ли наперед заданное риманово информационное пространство V_m можно реализовать таким образом на некоторой поверхности в R_n. Можно было бы доказать (хотя и совсем не простым образом), что ответ будет утвердительным, если вмещающее евклидово информационное пространство R_n взять достаточно большего числа измерений, а именно:

$$n = \frac{m(m+1)}{2}. \qquad (8.28)$$

Разумеется, иногда V_m можно реализовать и в евклидовом информационном пространстве меньшего числа измерений, но чтобы провести реализацию во всех случаях, нужно взять указанное значение *n*. При этом наше утверждение носит локальный характер, т. е. мы можем гарантировать реализацию V_m в виде поверхности в R_n, беря V_m не в целом, а лишь в некоторой окрестности любой его точки. Кроме того, функции $g_{ij}(x^1, ..., x^n)$ предполагаются аналитическими, и уравнения поверхности получаются тоже аналитическими. Если же V_m псевдориманово информационное пространство, то R_n должно быть псевдоевклидовым и притом подходящего индекса.

Интересно отметить, что в случае m =2 формула (8.28) дает n =3, т. е. любое двумерное риманово информационное пространство локально реализуется на некоторой поверхности в трехмерном евклидовом информационном пространстве.

В 1956 г. Нэш показал, что собственно риманово V_m *в целом* может быть реализовано в собственно евклидовом R_n при достаточно большом n.

8.3. Неевклидовы информационные пространства

Рассмотрим важный частный случай поверхности V_m в R_n, именно, когда эта поверхность является гиперсферой S_{n-1}. *Гиперсферой* S_{n-1} мы называем множество всевозможных точек в R_n, находящихся на постоянном расстоянии (вещественном, чисто мнимом или нулевом) от фиксированной точки. Римановы геометрии, возникающие на гиперсферах S_{n-1} в R_n, обладают рядом важных свойств; эти геометрии мы будем называть *неевклидовыми,* а гиперсферы S_{n-1}, рассматриваемые как римановы информационные пространства, — *неевклидовыми информационными пространствами.* Чтобы оценить важность неевклидовых геометрий, достаточно принять во внимание, что *геометрия Лобачевского* принадлежит к их числу (хотя и была получена самим Лобачевским совершенно иным путем). Заметим, что приходится говорить о неевклидовых информационных пространствах во множественном числе, потому что даже при данном числе измерений n евклидовы информационные пространства R_n могут обладать различными индексами k=0,1,2,...,n, в связи с чем гиперсферы S_{n-1} будут представлять собой существенно различные римановы информационные пространства. Вещественное или чисто мнимое значение радиуса гиперсферы тоже играет роль. Нулевого же значения мы не допускаем, так как S_{n-1} в этом случае будет изотропной поверхностью, именно *изотропным гиперконусом,* или даже просто сводится к точке (для собственно евклидовых информационных пространств при $k = 0$ или n).

Пусть в евклидовом информационном пространстве R_n индекса k, отнесенном к ортонормированному реперу, рассматривается гиперсфера S_{n-1} вещественного радиуса ρ с центром в начале O. Ее уравнение будет:

$$-x^{1^2} - \ldots - x^{k^2} + x^{k+1^2} + \ldots + x^{n^2} = \rho^2, \tag{8.29}$$

если считать, что скалярный квадрат вектора **x** имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{k^2} + x^{k+1^2} + \ldots + x^{n^2}. \tag{8.30}$$

Заметим, что то же уравнение (8.29) можно переписать в виде

$$x^{1^2} + \ldots + x^{k^2} - x^{k+1^2} - \ldots - x^{n^2} = -\rho^2 \tag{8.31}$$

и истолковать как уравнение гиперсферы S_{n-1} мнимого радиуса ρi в евклидовом информационном пространстве R_n индекса n — k, в котором

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + \ldots + x^{k^2} - x^{k+1^2} - \ldots - x^{n^2}. \tag{8.32}$$

Так как при этом изменился знак метрической квадратичной формы в R_n, то то же самое произойдет и на S_{n-1}, вследствие чего риманова метрика на S_{n-1} испытает тривиальное преобразование: все длины умножатся на i.

Итак, гиперсфера радиуса ρ в R_n *данного индекса* k *несет на себе такую же риманову метрику, как и гиперсфера радиуса* ρi *в* R_n *дополнительного индекса* n — k, *если не считать умножения всех длин на* i.

Вычислим теперь фактически метрическую квадратичную форму на гиперсфере S_{n-1} вещественного радиуса $\rho > 0$. При этом случай $k = n$ исключаем, так как тогда гиперсфера вещественною радиуса ρ невозможна (как видно из уравнения (8.29)). Это позволяет нам считать, что в метрической квадратичной форме (8.30) x^{n^2} входит всегда с плюсом.

Мы должны прежде всего ввести какую-либо координатную систему на S_{n-1}. Один из удобнейших способов для этого дает *стереографическая проекция* гиперсферы S_{n-1} на гиперплоскость R_{n-1}; особенностью стереографической проекции является то, что *центр проектирования* P *выбирается на самой* S_{n-1}, *а плоскость проекций* R_{n-1} *проходит ортогонально к радиусу* OP (т. е. параллельно касательной гиперплоскости к S_{n-1} в точке P). Разумеется, R_{n-1} не проходит через P.

Всем этим условиям можно удовлетворить, взяв в качестве центра проектирования точку $P(0, 0, \ldots, 0, \rho)$, а в качестве плоскости проекций R_{n-1} — координатную плоскость $x^n = 0$.

Допустим, что, проектируя точку $M(x^1, \ldots, x^n)$ гиперсферы из P на R_{n-1}, мы попадаем в некоторую точку $L(u^1, \ldots, u^{n-1}, 0)$ плоскости R_{n-1}, где через $u^1, \ldots, u^{n-1}$ обозначены $x^1, \ldots, x^{n-1}$ в точке L.

На рис. 8.1 изображен случай $n = 3$, причем уравнение S_2 имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} = \rho^2,$$

точка P имеет координаты $(0, 0, \rho)$, а u^1, u^2 совпадают с координатами x^1, x^2 точки L на координатной плоскости R_2.

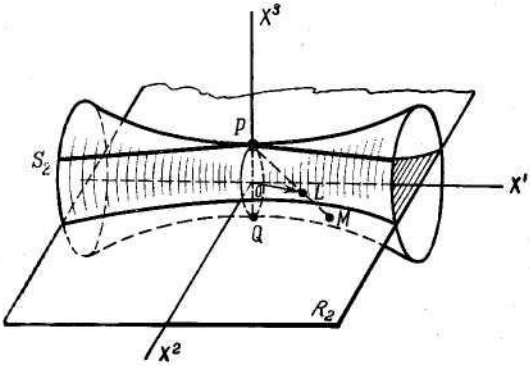


Рис. 8.1.

В случае обычного пространства $n=3$, $k = 0$, и мы получаем обычную стереографическую проекцию.

Примем $u^1, \ldots, u^{n-1}$ за параметры на S_{n-1} и выразим $x^1, \ldots x^n$ через них; это даст нам параметрические уравнения гиперсферы S_{n-1}. Точку M мы будем брать на S_{n-1} где угодно, однако при условии

$$x^n \neq \rho. \qquad (87.5)$$

В самом деле, при $x^n = \rho$ мы берем точку M на пересечении S_{n-1} с гиперплоскостью R'_{n-1} ($x^n = \rho$), параллельной R_{n-1} и проходящей через P. Тогда проектирующий луч PM тоже параллелен R_{n-1} и проекции L не существует. Заметим, что плоскость R'_{n-1} имеет направляющими векторами орты $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$, тем самым ортогональна к радиусу-вектору $\overrightarrow{OP}$, идущему по оси X^n, и, следовательно, служит *касательной гиперплоскостью к гиперсфере* S_{n-1} в точке P.

Пересечение R'_{n-1} и S_{n-1} определяется уравнением гиперплоскости $x^n = \rho$ и уравнением гиперсферы (8.29); это последнее можно переписать, пользуясь $x^n = \rho$, в виде

$$- (x^1)^2 - ... - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 +...+ (x^{n-1})^2 = 0. \qquad (8.34)$$

Отсюда видно, что в гиперплоскости R'_n мы получаем изотропный конус с вершиной в P.

В самом деле, x^1, . .., x^{n-1} при $x^n=\rho$ играют роль ортонормированных координат на R' с началом в P, причем левая часть уравнения служит метрической квадратичной формой. В случае собственно евклидовой геометрии на плоскости R_{n-1} (и тем самым и на R'_{n-1}) изотропный конус вырождается в точку P, которая, таким образом, лишь одна не имеет проекции на R_{n-1} (как это и имеет место в обычной стереографической проекции). На рис. 8.1 изотропный конус в R_2 представлен парой прямолинейных образующих поверхности S_2, проходящих через P. Так как за точку P можно принять любую точку гиперсферы S_{n-1} (если пустить через эту точку ось X^n), то отметим полученный нами попутно общий результат: *гиперсфера S_{n-1} пересекается со своей касательной плоскостью R'_{n-1} по ее изотропному конусу с вершиной в точке касания.*

Теперь переходим к выкладке, предполагая, что в точке M $x^n\neq\rho$. Так как точки P, M, L расположены на одной прямой, то векторы $\vec{PM}$ и $\vec{PL}$ должны быть коллинеарны. Записывая пропорциональность координат этих векторов, получаем:

$$\frac{x^\alpha}{u^\alpha}=\frac{x^n-\rho}{-\rho},$$

где α=1, 2, ..., n—1. Отсюда

$$x^\alpha=u^\alpha\left(1-\frac{x^n}{\rho}\right). \qquad (8.35)$$

Вставляя в уравнение гиперсферы (8.29), имеем:

$$\left(1-\frac{x^n}{\rho}\right)^2\left[-u^{1^2}-\ldots-u^{k^2}+u^{k+1^2}+\ldots+u^{n-1^2}\right]+x^{n^2}=\rho^2.$$

Перенеся x^{n^2} в правую часть, получаем выражение

$$\rho^2-x^{n^2}=\rho^2\left(1-\frac{x^n}{\rho}\right)\left(1+\frac{x^n}{\rho}\right).$$

Так как $x^n\neq\rho$ и, значит, $1-\frac{x^n}{\rho}\neq 0,$ то, сокращая на $1-\frac{x^n}{\rho}$, получим:

$$\left(1-\frac{x^n}{\rho}\right)\left[-u^{1^2}-\ldots-u^{k^2}+u^{k+1^2}+\ldots+u^{n-1^2}\right]=$$

$$=\rho^2\left(1+\frac{x^n}{\rho}\right). \qquad (8.36)$$

Обозначим через **u** радиус-вектор *OL* точки *L;* он вместе с *L* имеет координаты $u^1, \ldots, u^{n-1}$, 0 и, как видно из (8.30), его скалярный квадрат можно записать в виде

$$\mathbf{u}^2 = -u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2}. \tag{8.37}$$

Вставляя в (8.36) $\mathbf{u}^2$ вместо прямой скобки и разрешая это уравнение относительно x^n, приходим к выражению

$$x^n = \rho \frac{\mathbf{u}^2 - \rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2} = \rho \left(1 - \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2}\right). \tag{8.38}$$

Вставляя это значение x^n в (8.35), придадим последнему следующий вид:

$$x^\alpha = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2} u^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{8.39}$$

Мы получили параметрические уравнения (8.38), (8.39) гиперсферы S_{n-1} с параметрами $u^1, \ldots, u^{n-1}$. В то же время это есть выражение координат x^i точки *M* на гиперсфере S_{n-1} через координаты u^α ее стереографической проекции *L* на гиперплоскости R_{n-1}.

В случае *собственно евклидовой геометрии на* R_{n-1} имеем $\mathbf{u}^2 \geq 0$, и знаменатели в наших уравнениях всегда положительны, *параметрам* u^α *можно давать любые значения,* так что их область изменения состоит из всей гиперплоскости R_{n-1}, причем на S_{n-1} мы получаем, как уже указывалось, тоже *все точки за исключением центра проекций P.* Хуже обстоит дело в случае псевдоевклидовой геометрии на R_{n-1}; тогда выбор значений u^α нужно ограничить условием

$$\mathbf{u}^2 + \rho^2 \neq 0,$$

где $\mathbf{u}^2$ имеет значение (8.37). Поэтому область изменения состоит из гиперплоскости R_{n-1} с выкинутой из нее поверхностью (сферой радиуса ρi) $\mathbf{u}^2 + \rho^2 = 0$. Точки этой области изменения (которая будет несвязной) взаимно однозначно отвечают точкам гиперсферы S_{n-1} с выкинутым из нее изотропным конусом с вершиной в *P.* Точки этого конуса в нашем параметрическом представлении получаться не будут. Это связано с тем, что S_{n-1} не является элементарным информационным многообразием и *одной* координатной системой не может быть обслужена. Но двух уже будет достаточно (то же построение с центром проекций *Q* (0,. . . ,0,— ρ) дает вторую координатную систему). Запишем наше параметрическое представление в векторной форме, обозначая через **x** радиус-вектор точки *M,* а через **u** - по-прежнему радиус-вектор точки *L*. Греческие индексы пробегают значения 1, 2.....*n*—1. Тогда

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha + x^n \mathbf{e}_n = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2} u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \rho \left(1 - \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2}\right) \mathbf{e}_n.$$

Так как

$$u^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}=\mathbf{u},$$

то окончательно

$$\mathbf{x}=\frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\,\mathbf{u}+\rho\left(1-\frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\right)\mathbf{e}_n. \tag{8.40}$$

Вычислим теперь квадрат дифференциала дуги ds^2 для произвольной кривой на S_{n-1}, пользуясь формулой

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 \tag{8.41}$$

(см. (6.38)). Для этого вычислим сначала

$$d\mathbf{x}=\frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\,d\mathbf{u}-\frac{2\rho^2\cdot 2\mathbf{u}\,d\mathbf{u}}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,\mathbf{u}+\rho\,\frac{2\rho^2\cdot 2\mathbf{u}\,d\mathbf{u}}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,\mathbf{e}_n.$$

Возводим в скалярный квадрат, выписывая сначала квадраты слагаемых, а потом их удвоенные произведения, и помня при этом, что

$\mathbf{e}_n \perp R_{n-1}$, так что $\mathbf{e}_n\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{e}_n\, d\mathbf{u} = 0$, и из трех удвоенных произведений два пропадут; кроме того, $\mathbf{e}_n^2 = 1$. Получим:

$$ds^2=d\mathbf{x}^2=\frac{4\rho^4}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,d\mathbf{u}^2+\frac{16\rho^4\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^4}\,\mathbf{u}^2+\frac{16\rho^6\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^4}-\frac{16\rho^4\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^3}.$$

Три последних члена взаимно уничтожаются, и мы имеем окончательно:

$$ds^2=\frac{4\rho^4\,d\mathbf{u}^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}=\frac{4\rho^4\left[-du^{1^2}-\ldots-du^{k^2}+du^{k+1^2}+\ldots+du^{n-1^2}\right]}{\left[-u^{1^2}-\ldots-u^{k^2}+u^{k+1^2}+\ldots+u^{n-1^2}+\rho^2\right]^2}. \tag{8.42}$$

Это — метрическая квадратичная форма (линейный элемент) на гиперсфере S_{n-1}, записанная в параметрах u^1, ..., u^{n-1}. Метрический тензор $G_{\alpha\beta}(u^1, ..., u^{n-1})$ имеет в этих параметрах следующие координаты:

$$\left.\begin{aligned} &G_{\alpha\beta}=0 \quad (\alpha\neq\beta),\\ &G_{\alpha\alpha}=\mp\frac{4\rho^4}{\left[-u^{1^2}-\ldots-u^{k^2}+u^{k+1^2}+\ldots+u^{n-1^2}+\rho^2\right]^2}.\end{aligned}\right\} \tag{8.43}$$

Таким образом, мы получили метрику неевклидова информационного пространства как частный случай римановой метрики.

Следует обратить внимание на свойственный стереографической проекции *конформный характер отображения S_{n-1} на R_{n-1}*. Действительно, пользуясь (8.41), получаем для линейного элемента на гиперплоскости

$$\tilde{d}s^2=d\mathbf{u}^2.$$

Вставляя в (8.42), приходим к соотношению

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1+\frac{u^2}{\rho^2}\right)^2} \tilde{d}s^2, \tag{8.44}$$

которое показывает, что *метрические квадратичные формы на* S_{n-1} *и* R_{n-1} *для соответствующих бесконечно малых смещений отличаются множителем, зависящим лишь от точки.* Другими словами, координаты метрических тензоров в соответствующих точках M и L пропорциональны между собой. В этом случае взаимно однозначное соответствие между двумя римановыми информационными пространствами называется *конформным.* Грубо говоря, это означает, что в бесконечно малой окрестности каждой данной точки на S_{n-1} линейные размеры фигур меняются при отображении на R_{n-1} пропорционально, так что в пределах этой окрестности отображение сводится как бы к преобразованию подобия (разумеется, если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка).

Вернемся к формуле (8.42). Пользуясь ею, не нужно забывать, что мы рассматривали ρ только вещественные. Но чтобы учесть случай чисто мнимых ρ, достаточно в рассмотренной задаче *умножить метрическую квадратичную форму в* R_n *на* — 1, *вследствие чего, во-первых, умножится на* —1 *и метрическая квадратичная форма на* S_{n-1} *и, во-вторых,* S_{n-1} *станет гиперсферой мнимого радиуса* ρi. При этом индекс k евклидова информационного пространства R_n заменится на $n - k$.

Таким образом, мы имеем $2n$ вариантов $n-1$-мерной неевклидовой геометрии: во-первых, гиперсферы S_{n-1} вещественного радиуса ρ в R_n индекса $k = 0, 1, ..., n-1$; метрика задается согласно (8.42); во-вторых, гиперсферы S_{n-1} мнимого радиуса ρi в R_n индекса $n - k = n, n-1, ..., 1$; метрика задается согласно (8.42) *с обратным знаком.*

Среди различных неевклидовых информационных пространств особенно важны информационные пространства *с собственно римановой метрикой,* т. е. с положительно определенной метрической квадратичной формой. При данном n такие информационные пространства мы получим лишь в двух случаях: когда в (8.42) все квадраты положительны, т. е. k=0, или наоборот, когда они все отрицательны, $k = n-1$; в последнем случае нужно еще умножить метрическую квадратичную форму в R_{n-1} (а значит, и на S_{n-1}) на —1.

Первый случай, $k = 0$. Пространство R_n собственно евклидово. Уравнение гиперсферы S_{n-1} имеет вид

$$x^{1^2} + \ldots + x^{n^2} = \rho^2. \tag{8.45}$$

Область изменения u^α — вся плоскость R_{n-1}; параметрическое представление (8.40) дает всю гиперсферу S_{n-1} за исключением центра проекций P. При этом к точке P на S_{n-1} мы неограниченно приближаемся при $u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} \to \infty$.Метрическая квадратичная форма на S_{n-1} принимает вид

$$ds^2 = 4\,\frac{du^{1^2} + \ldots + du^{n-1^2}}{\left[1 + \frac{u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2}}{\rho^2}\right]^2}\,. \tag{8.46}$$

Полученное неевклидово информационное пространство называется *сферическим информационным пространством Римана* в данном случае n—1 измерений (не смешивать с римановым информационным пространством). Сферическая геометрия двух измерений, n=3, n—1=2, есть, очевидно, внутренняя геометрия обыкновенной сферы. Следует отметить родственное сферическому *эллиптическое пространство Римана.* Оно получается из сферического путем *отождествления диаметрально противоположных точек сферы* S_{n-1}. Таким образом, эллиптическое пространство есть как бы «сложенное вдвое» сферическое пространство. Хотя такая конструкция представляется искусственной, но фактически оказывается, что эллиптическое пространство обладает более простыми свойствами, чем сферическое, т. е. последнее целесообразно рассматривать именно «сложенным вдвое». Конечно, в пределах не слишком больших кусков эллиптическое пространство обладает той же геометрией, как и сферическое. Эллиптическое пространство можно получить, ограничившись в нашем параметрическом представлении лишь теми значениями u^α, которые удовлетворяют условиям

$$u^{1^2} + u^{2^2} + \ldots + u^{n-1^2} \leqslant \rho^2, \tag{8.47}$$

причем в полученном n—1-мерном шаре в плоскости R_{n-1} нужно отождествить диаметрально противоположные точки его граничной сферы S_{n-2}:

$$u^{1^2} + u^{2^2} + \ldots + u^{n-1^2} = \rho^2. \tag{8.48}$$

Тем самым n—1-мерный шар превращается в замкнутое n—1-мерное информационное многообразие; в это информационное многообразие вносится риманова метрика согласно (8.46), и полученное риманово информационное пространство как раз и будет эллиптическим n—1-мерным информационным пространством.

В самом деле, ограничение (8.47) означает, что мы рассматриваем лишь нижнюю половину гиперсферы S_{n-1}, срезанную плоскостью R_{n-1} (коэффициент при $\mathbf{e}_n$ в (8.40) ≤ 0); далее на срезе, который как раз совпадает с S_{n-2}, мы отождествляем диаметрально противоположные точки, а это и означает построение эллиптического пространства, причем, вместо того чтобы отождествлять точки верхней половины S_{n-1} с диаметрально противоположными точками нижней половины, мы просто их (точки верхней половины) выкинули и провели указанное отождествление лишь по срезу.

Второй случай, $k = n—1$. Напишем уравнение гиперсферы радиуса ρ

$$-x^{1^2} - \ldots - x^{n-1^2} + x^{n^2} = \rho^2 \tag{8.49}$$

и параметрическое представление (8.40) (учитывая (8.37)):

$$\mathbf{x} = \frac{2\rho^2}{-u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2} + \rho^2}\,\mathbf{u} + \rho\left(1 - \frac{2\rho^2}{-u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2} + \rho^2}\right)\mathbf{e}_n. \tag{8.50}$$

Меняем знак метрической квадратичной формы в R_n, после чего она принимает вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} - x^{n^2}. \tag{8.51}$$

Вследстпие этого меняется знак и у метрической квадратичной формы на S_{n-1}, так что (8.42) запишется теперь

$$ds^2 = \frac{4\rho^4\left(du^{1^2} + \ldots + du^{n-1^2}\right)}{\left[\rho^2 - u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2}\right]^2} = 4\,\frac{du^{1^2} + \ldots + du^{n-1^2}}{\left[1 - \dfrac{u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2}}{\rho^2}\right]^2}. \tag{8.52}$$

При этом, хотя гиперсферу S_{n-1} мы оставляем прежней, но в результате изменения метрики в R_n ее радиус становится мнимым, ρ*i* вместо ρ.

Итак, мы имеем дело с гиперсферой мнимого радиуса ρ*i в псевдоевклидовом информационном пространстве индекса* 1. Такая гиперсфера с *аффинной точки зрения* представляет собой двухполостный гиперболоид. При этом в параметрическом представлении (8.50) мы получаем нижнюю полость, когда коэффициент при $\mathbf{e}_n$ отрицателен:

$$1 - \frac{2\rho^2}{\rho^2 - u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2}} < 0,$$

что равносильно неравенству

$$u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} < \rho^2. \tag{8.53}$$

Таким образом, на нижнюю полость S_{n-1} отображается внутренность шара радиуса ρ в плоскости R_{n-1}; аналогично на верхнюю полость S_{n-1} (за исключением точки *P)* отображается внешняя по отношению к этому шару часть плоскости R_{n-1}.

$$u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} > \rho^2 \tag{8.54}$$

(точки на граничной сфере $u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} = \rho^2$ образов на S_{n-1} не имеют). Достаточно рассмотреть нижнюю полость S_{n-1}, так как верхняя полость в силу симметрии несет на себе точно такую же риманову геометрию, хотя формула (8.50) и дает для разных полостей разные параметрические представления (в том смысле, что параметры $u^1, \ldots, u^{n-1}$ пробегают разные области изменения). Но это уже связано с избранным нами способом параметризации.

Итак, нижняя полость гиперсферы S_{n-1}, *рассматриваемая как риманово информационное пространство, задается метрической квадратичной формой* (8.52) *в области изменения параметров* (8.53). В отличие от сферического и эллиптического пространств полученное пространство представляет собой *элементарное* информационное многообразие.

Каждая полость гиперсферы мнимого радиуса ρi *в псевдоевклидовом информационном пространстве индекса* 1 *несет на себе собственно риманову геометрию, совпадающую с геометрией Лобачевского соответствующего числа измерений.*

Эту формулировку можно при желании рассматривать как определение геометрии Лобачевского; если же исходить из другого, например, аксиоматического построения геометрии Лобачевского, то это предложение можно доказать как теорему.

Мы получили пространство Лобачевского во взаимно однозначном отображении на внутренность шара в евклидовом информационном пространстве R_{n-1}; это отображение называется интерпретацией Пуанкаре.

Возвращаясь к общему случаю неевклидова информационного пространства S_{n-1}, отметим, что оно обладает *свободной подвижностью* так же, как и евклидово информационное пространство. Этим мы хотим сказать, что в S_{n-1} точку с ортонормированным локальным репером в ней всегда можно перевести движением S_{n-1} (т. е. его изометрическим отображением на себя) *в любую другую точку с любым ортонормированным локальным репером в ней.* Покажем это.

При нашем понимании неевклидовой геометрии как римановой геометрии на гиперсфере S_{n-1} в R_n движения в S_{n-1} также наглядно изображаются *вращениями в* R_n *около начала О.* Ясно, что при этом гиперсфера S_{n-1} переходит в себя с сохранением всех ее геометрических свойств, в том числе и римановой геометрии на ней. При этом путем вращения R_n около O можно заставить ортонормированный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ перейти в любой другой ортонормированный репер $\{O, \tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$. С точки зрения S_{n-1} это означает, что вектор $\rho\mathbf{e}_n$, идущий из O в точку R (для определенности рассматриваем S_{n-1} вещественного радиуса ρ), превращается в вектор $\tilde{\rho}\mathbf{e}_n$, идущий в другую точку $\tilde{P}$ той же гиперсферы S_{n-1}, причем $\tilde{P}$ можно выбирать произвольно (так как при желании $\mathbf{e}_n$ всегда можно направить по $\vec{OP}$). Далее, векторы $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_{n-1}$, ортогональны к $\rho\mathbf{e}_n = \vec{OP}$ и потому принадлежат касательной гиперплоскости R'_{n-1} к S_{n-1} в точке P, образуя *ортонормированный локальный репер для* S_{n-1}. При задании точки P определяется орт $\mathbf{e}_n$, направленный по $\vec{OP}$, но орты $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_{n-1}$ в ортогональной к $\mathbf{e}_n$ плоскости R'_{n-1} остаются произвольными и образуют произвольный ортонормированный локальный репер в точке P. Поэтому возможность перевести векторы $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$ вращением R_n около O в соответствующие векторы любого другого ортонормированного репера означает с точки зрения гиперсферы S_{n-1}, что не только точка P переходит в любую другую точку $\tilde{P}$, но и ортонормированный локальный репер в P переходит в любой ортонормированный локальный репер в $\tilde{P}$.

В связи с этим ясно, что произвол в выборе движений в неевклидовом информационном пространстве (т. е. число независимых параметров, определяющих движение) должен быть таким же, как и в евклидовом информационном пространстве. Это можно проверить и прямым подсчетом. В евклидовом n-мерном информационном пространстве R_n движение зависит от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров; следовательно, в R_{n-1} — от $\frac{(n-1)n}{2}$ параметров. Заметим, что под «числом параметров», строго говоря, нужно понимать здесь размерность группы движений, как некоторого (неэлементарного) информационного многообразия.

Движения в S_{n-1} порождаются вращениями R_n около O и, следовательно, тоже зависят от $\frac{(n-1)n}{2}$ параметров.

Свободная подвижность неевклидовых информационных пространств показывает, что они обладают столь же высокой степенью однородности, как и евклидовы информационные пространства. С этим связано и богатство их информационных свойств, развертывающихся в последовательности, напоминающей евклидову геометрию, но совершенно своеобразных. Как и евклидово информационное пространство, они допускают исследование элементарно геометрическими средствами, особенно эллиптическая геометрия и геометрия Лобачевского.

Исследование элементарно геометрическими средствами тесно связано со свободной подвижностью информационного пространства. Действительно, важнейшей основой элементарной геометрии является возможность переносить данную фигуру из одного места информационного пространства в другое и поворачивать ее без изменения геометрических свойств. Но это означает по существу свободную подвижность информационного пространства. Отсюда вытекиет понятие о конгруэнтных (равных) фигурах, как переводимых одна в другую посредством движения; на основе свободной подвижности фигур доказываются важнейшие теоремы, например, о равенстпе треугольников; даже процесс измерения отрезка другим отрезком, принятым за эталон длины, требует свободной подвижности этого эталона. Конечно, в элементарной геометрии в ее школьном изложении свойство свободной подвижности принимается просто как очевидное, но при аксиоматическом построении оно должно быть точно охарактеризовано соответствующими аксиомами (или прямо, или косвенно через понятие конгруэнтности).

Другие римановы информационные пространства свободной подвижностью уже не обладают; более того, произвольно взятое риманово информационное пространство, *вообще говоря,* совершенно неоднородно и никаких движений не допускает.

8.4. Измерение объемов в римановом информационном пространстве V_n

Мы хотим ввести измерение объемов в римановом информационном пространстве. Изложим сначала некоторые наводящие соображения. Рассмотрим бесконечно малый координатный параллелепипед, стягивающийся в данную точку *M*(x^i). Вообще под *координатным параллелепипедом* мы понимаем область, состоящую из точек *M* (x^i), для которых

$$a^i \leqslant \tilde{x}^i \leqslant b^i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8.55}$$

В данном случае координатный параллелепипед определяется неравенствами

$$x^i \leqslant \tilde{x}^i \leqslant x^i + dx^i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{8.56}$$

где $dx^i \to 0$.

«Ребра» этого параллелепипеда состоят из бесконечно малых отрезков координатных линий. Так, на координатной линии x^1 соответствующий отрезок заключен между данной точкой $M\,(x^1, \ldots, x^n)$ и точкой $M_1(x^1+dx^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$. В касательном евклидовом информационном пространстве бесконечно малому смещению MM_1 отвечает бесконечно малый вектор с координатами

$$\xi^1 = dx^1,\ \ \xi^2 = \ldots = \xi^n = 0 \tag{8.57}$$

(координаты берутся относительно локального репера). Аналогично обстоит дело и с бесконечно малыми смещениями по другим координатным линиям.

Подменим координатный параллелепипед соответствующим параллелепипедом в касательном евклидовом информационном пространстве, построенном на бесконечно малых векторах вида (8.57). Согласно (5.205) объем параллелепипеда в евклидовом информационном пространстве выражается формулой

$$W_D = \sqrt{|g|}\,|\operatorname{Det}|\,a_k^i\,||,$$

где g=Det$|g_{ij}|$, a^i_k — координаты k-го вектора из числа векторов, на которых построен параллелепипед. В нашем случае

$$a_k^i = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ dx^i & (i = k) \end{cases}, \text{ так что } \operatorname{Det}|\,a_k^i\,| = dx^1\ \ldots\ dx^n,$$

и мы получаем:

$$dW = \sqrt{|g|}\,dx^1 \ldots dx^n. \tag{8.58}$$

Оценим грубо объем какой-либо области D риманова информационного пространства как составленный из объемов элементарных координатных параллелепипедов, на которые мы область D разбиваем, причем мы их подменяем параллелепипедами в касательных евклидовых информационных пространствах. Суммирование таких объемов в пределе сводится к интегрированию элемента объема dW (8.58) по области D, и мы получаем:

$$W_D = \int\limits_D \sqrt{|g|}\,dx^1\ \ldots\ dx^n. \tag{8.59}$$

Мы не станем уточнять приведенное выше грубое рассуждение, а предпочтем принять формулу (8.59) за *определение объема в римановом информационном пространстве.* Чтобы это определение было законным, нужно показать его инвариантность при преобразовании координат x^i. Для этой цели вычислим

$$W'_D = \int_D \sqrt{|g'|}\, dx^{1'} \ \dots \ dx^{n'}, \tag{8.60}$$

где g' =Det$|g_{i'j'}|$, и покажем что $W'_D = W_D$. По тензорному закону преобразования

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij},$$

откуда аналогично (5.17) получаем:

$$\mathrm{Det}\,|g_{i'j'}| = \left(\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\right)^2 \mathrm{Det}\,|g_{ij}|,$$

так что

$$\sqrt{|g'|} = \left|\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\right| \sqrt{|g|}. \tag{8.61}$$

Вставляя последний результат в (8.60) и пользуясь формулой замены переменных под знаком кратного интеграла, получим:

$$W'_D = \int_D \sqrt{|g|}\, \mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\left| dx^{1'} \dots dx^{n'} = \int_D \sqrt{|g|}\, dx^1 \dots dx^n = W_D,\right.$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, по свойствам кратного интеграла объем обладает аддитивным характером, т. е. объем составной области равен сумме объемов составляющих областей. Далее, в частном случае евклидова информационного пространства (8.59) дает объем в евклидовом информационном пространстве. Действительно, если x^1, ..., x^n — ортонормированные координаты в евклидовом информационном пространстве, то $|\, g \,| = 1$, и мы получаем:

$$W_D = \int_D dx^1 \dots dx^n,$$

а это согласуется с определением объема в евклидовом информационном пространстве (5.195).

Пусть в римановом информационном пространстве V_n дана поверхность V_m, также несущая на себе риманову геометрию (п. 8.1). На этой поверхности мы можем, следовательно, измерять объемы m-мерных областей по формуле (8.59):

$$W_D = \int_D \sqrt{|G|}\, du^1 \dots du^m, \tag{8.62}$$

где

$$G = \mathrm{Det}\,|G_{\alpha\beta}|, \quad G_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{8.63}$$

В частности, в случае двумерной поверхности V_2 мы получаем:

$$G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2,$$

так что «двумерные объемы», т. е. площади на поверхности, выражаются формулой

$$W_D = \int_D \sqrt{|G_{11}G_{22} - G_{12}^2|}\, du^1 du^2.$$

Если речь идет о поверхности в обычном евклидовом информационном пространстве R_3, то G_{11}, G_{12}, G_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы на поверхности. При этом $G_{11}G_{22} - G^2_{12} > 0$, так что знак модуля под радикалом можно устранить.

Как видно из (8.63), $G_{\alpha\beta}$ представляют собой попарные скалярные произведения m векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, касательных к координатным линиям u^α на поверхности V_m. Поэтому подынтегральная функция $\sqrt{|G|}$, т. е. $\sqrt{|\mathrm{Det}\,|G_{\alpha\beta}||}$, представляет собой объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ в касательном евклидовом информационном пространстве. Но этот же объем выражается формулой (5.222), так что

$$\sqrt{|G|} = \sqrt{|g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|}. \tag{8.64}$$

Здесь $a^{i_1 \ldots i_m}$—координаты простого m-вектора, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, т. е.

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^m} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^m} \end{vmatrix}, \tag{8.65}$$

а $g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m}$ выражаются согласно (5.213):

$$g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \cdots & g_{i_1 j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{i_m j_1} & \cdots & g_{i_m j_m} \end{vmatrix}. \tag{8.66}$$

В то время как формула (8.62) дает нам объем области D на поверхности V_m с «внутренней» точки зрения, можно записать тот же результат с «внешней» точки зрения, заменив $\sqrt{|G|}$ согласно (8.64). Получим:

$$W_D = \int_D \sqrt{|g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|}\, du^1 \ldots du^m. \tag{8.67}$$

В частности, получаем выражение площади какой-либо области D на двумерной поверхности V_2 в виде

$$W_D = \frac{1}{2} \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^2} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x^{j_2}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^2} & \frac{\partial x^{j_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix}}\, du^1\, du^2. \tag{8.68}$$

Подкоренное выражение предполагается взятым по модулю (после суммирования по всем индексам).

8.5. Информационное пространство аффинной связности

Мы на время оставим в стороне римановы информационные пространства и займемся другим вариантом геометрии, которую можно получить на базе данного n-мерного информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$. Именно, если вместо поля метрического тензора $g_{ij}(M)$ внести в $\mathfrak{M}_n$ поле объекта связности Γ^i_{jk} (M), то вместо римановой геометрии мы получим в $\mathfrak{M}_n$ *геометрию аффинной связности,* превратив $\mathfrak{M}_n$ *в информационное пространство аффинной связности* L_n.

Подобно тому как образцом для построения риманова информационного пространства V_n служило у нас евклидово информационного пространство R_n в криволинейных координатах, так теперь такую же роль будет играть аффинное информационного пространство A_n тоже в криволинейных координатах. Определение объекта связности, которое было дано в п. 7.4 для аффинного информационного пространства, легко переносится на информационное многообразие $\mathfrak{M}_n$.

Если в данной точке M в $\mathfrak{M}_n$ для каждой координатной системы x^i, область действия которой включает точку M, задана система чисел Γ^i_{jk}, преобразующихся при переходе от одной к другой координатной системе по закону

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}, \tag{8.69}$$

то мы говорим, что в точке М задан объект связности.

Все частные производные в (8.69) предполагаются вычисленными в точке *М. Информационным пространством аффинной связности* L_n *мы назовем информационное многообразие* $\mathfrak{M}_n$*, в котором задано поле объекта связности*

$$\Gamma^k_{ij}(M) = \Gamma^k_{ij}(x^1, \ \ldots, \ x^n), \tag{8.70}$$

т. е. объект связности задан в каждой точке М, причем функции (8.70) *N*—2 *раза непрерывно дифференцируемы* (здесь *N* — класс информационного многообразия $\mathfrak{M}_n$; при преобразовании (8.69) сохраняется (*N* — 2)-дифференцируемость Γ^k_{ij} (но не выше!). Правая часть (8.70) имеет смысл лишь в области действия каждой данной координатной системы x^i.*)* При этом в отличие от объекта связности аффинного информационного пространства, вообще говоря,

$$\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ji}.$$

Покажем прежде всего, что для задания объекта связности (как мы будем кратко называть поле объекта связности) в элементарном $\mathfrak{M}_n$ достаточно произвольно *задаться функциями* (8.70) *в одной какой-нибудь координатной системе* x^i. Тогда в любой другой координатной системе $x^{i'}$ координаты $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ объекта связности определятся по закону преобразования (8.69). Однако при этом объект связности еще нельзя считать построенным: нужно проверить, что закон преобразования (8.69) действует не только при переходе от *x* к $x^{i'}$, где x^i — начальная координатная система, но и при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$, где $x^{i'}$, $x^{i''}$—любые координатные системы. Координаты объекта связности в системе $x^{i''}$ выражаются аналогично (8.69):

$$\Gamma^{k''}_{i''j''} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}. \tag{8.71}$$

Нам требуется проверить, следовательно, что, подвергая $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *преобразованию по тому же закону при переходе от* $x^{i'}$ *к* $x^{i''}$*, мы получим* $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Другими словами, требуется проверить, что выражение

$$\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} \Gamma^{k'}_{i'j'} \tag{8.72}$$

дает нам $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Для этого вставим сюда $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ из (8.69) и рассмотрим сначала член, содержащий Γ^k_{ij}. Этот член в (8.69) имеет такой вид, как если бы Γ^k_{ij} подвергались *тензорному* закону преобразования при переходе от x к $x^{i'}$; при подстановке в (8.72) этот член еще раз подвергается *тензорному* закону преобразования при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$; в результате Γ^k_{ij} испытают преобразование по тензорному закону при переходе от x^i к $x^{i''}$ (см. (7.33)), и мы получим:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}. \tag{8.73}$$

Теперь рассмотрим свободные от Γ^k_{ij} члены в (8.72) (после подстановки из (8.69)). Получаем (обозначая в первом члене индекс суммирования j' вместо k'):

$$\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

Так как во втором члене

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k},$$

а в первом члене

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}},$$

то, вынося $\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k}$ за скобки, получаем:

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \left(\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\, dx^{j'}} \right) = \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}. \tag{8.74}$$

То, что круглая скобка равна $\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}$, легко получить, диффереицируя x^k как сложную функцию от $x^{1''}, \ldots, x^{n''}$ при промежуточных аргументах $x^{j'}$. В результате (8.72) состоит из членов (8.73) и (8.74), т. е. совпадает с правой частью (8.71) и дает, действительно, $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Проверка окончена.

Закон преобразования (8.69) можно записать в несколько ином виде, удобном для некоторых выкладок. Умножаем (8.69) почленно на $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}$ и суммируем по k'. Так как

$$\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} = \delta^l_k,$$

то получаем:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} \delta^l_k + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma^k_{ij} \delta^l_k,$$

а после суммирования по k получаем окончательно:

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}=\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^l. \tag{8.75}$$

Заметим, что эта формула вполне эквивалентна закону преобразования (8.69), так как он из нее обратно следует. Достаточно умножить (8.75) почленно на $\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}$ (с суммированием по l) и учесть, что в левой части $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}=\delta_{k'}^{l'}$, чтобы вернуться к (8.69).

Будет полезным записать формулу (8.75), поменяв ролями координаты x^i и $x^{i'}$. Получим:

$$\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{k}}=\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\Gamma_{i'j'}^{l'}. \tag{8.76}$$

Мы уже отмечали, что, вообще говоря,

$$\Gamma_{ij}^k\neq\Gamma_{ji}^k.$$

Обозначим:

$$S_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k. \tag{8.77}$$

Величины S^k_{ij} образуют тензор, что легко показать следующим образом. Перепишем (8.69), переставив между собой индексы i', j' и поменяв местами обозначения индексов суммирования i, j. Получим:

$$\Gamma_{j'i'}^{k'}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma_{ji}^k. \tag{8.78}$$

Вычитая это равенство почленно из (8.69) и пользуясь обозначением (8.77) как в старых, так и в новых координатах, получаем:

$$S_{i'j'}^{k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}S_{ij}^k.$$

Свободные члены при вычитании уничтожились, и мы получили тензорный закон преобразования для S^k_{ij}.

Тензор $S^k_{ij}(M)$ называется *тензором кручения* данного пространства аффинной связности. Его геометрический смысл выяснится позже. Если тензор кручения S^k_{ij} равен нулю, т. е. если

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k,$$

то мы говорим, что нам дано *информационное пространство аффинной связности без кручения;* обозначаем его L^0_n. Обращение в нуль тензора S^k_{ij} (как и всякого тензора) есть факт, инвариантный относительно преобразования координат x^i, а потому, если $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, в одной координатной системе, то то же имеет место и в любой другой.

Переходим теперь к геометрическому истолкованию объекта связности, а вместе с тем к установлению основной конструкции геометрии аффинной связности — *параллельного перенесения векторов.* Мы воспользуемся при этом аналогией с п. 7.3, где параллельное перенесение вектора *в криволинейных координатах в аффинном информационном пространстве* задавалось при помощи объекта связности формулой (7.34): . .

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i.$$

Аналогичным образом мы определим параллельное перенесение в информационном пространстве аффинной связности L_n.

Пусть вдоль некоторой кривой

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $x^i(t)$ непрерывно дифференцируемое, дано векторное поле

$$\xi^i = \xi^i(t). \tag{8.79}$$

Мы будем говорить, что вектор $\xi^i(t)$ параллельно переносится вдоль кривой, если при каждом бесконечно малом смещении по кривой координаты вектора $\xi^i(t)$ меняются по закону

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{8.80}$$

Речь идет не о приращениях, а о дифференциалах координат $\xi^i(t)$. Аналогично dx^i — дифференциалы функции $x^i(t)$; Γ^k_{ij} — координаты объекта связности. Напомним еще, что ξ^i — это по буквальному смыслу один раз контравариантный тензор; мы говорим о векторе ξ^i, имея в виду истолкование ξ^i в виде вектора *в касательном аффинном информационном пространстве A_n.*

Если вдуматься в смысл нашего определения параллельного перенесения, то оно перестает казаться столь произвольным, как кажется с первого взгляда. В самом деле, мы хотим установить какой-то определенный закон, по которому вектор ξ^i из данной точки x^i переносится в бесконечно близкую точку x^i+dx^i (рассуждение ведем с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Спрашивается, каковы будут при этом приращения $d\xi^i$ координат нашего вектора. Простейшее предположение на этот счет, которое можно сделать, заключается в том, что $d\xi^i$ линейно зависят и от начальных координат вектора ξ^i и от координат вектора бесконечно малого смещения dx^i. Но по существу это предположение и записано в виде формулы (8.80), причем через Γ^k_{ij} обозначены коэффициенты соответствующих билинейных функций. Конечно, выбор коэффициентов

$\Gamma^k_{ij}(x^1, \ \ldots, x^n)$ остается произвольным, и это означает, что на данное информационное многообразие $\mathfrak{M}_n$ можно по-разному наложить аффинную связность.

Таким рассуждением мы оправдываем наше определение с его содержательной стороны. Но оно нуждается в оправдании и с формальной стороны. А именно, необходимо показать его инвариантный характер: *если вектор $\xi^i(t)$ параллельно переносится вдоль данной кривой с точки зрения одной координатной системы x^i, то это же верно и с точки зрения любой другой координатной системы $x^{i'}$.* Другими словами, если условие (8.80) соблюдается в координатах x^i, то оно будет соблюдаться и в координатах $x^{i'}$.

Чтобы проверить это, мы вычислим $d\xi^{k'}(t)$ при бесконечно малом смещении по нашей кривой. Согласно тензорному закону преобразования

$$\xi^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\xi^k.$$

Поэтому

$$d\xi^{k'} = \left(d\,\frac{\partial x^{k'}}{dx^k}\right)\xi^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}d\xi^k = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k\,\partial x^i}dx^i\,\xi^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}d\xi^k.$$

Обозначая в первом члене индекс суммирования k через j и заменяя $d\xi^k$ согласно (8.80), получаем:

$$d\xi^{k'} = \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\,\partial x^i} - \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}\right)\xi^j dx^i. \tag{8.81}$$

Пользуясь формулой (8.76) (заменив в ней l' на k'), мы получаем для круглой скобки выражение

$$-\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\Gamma^{k'}_{i'j'}.$$

Учитывая, наконец, что

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}dx^i = dx^{i'},\ \ \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\xi^j = \xi^{j'},$$

приводим (8.81) к виду

$$d\xi^{k'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}\xi^{j'}dx^{i'}. \tag{8.82}$$

Таким образом, предполагая, что для векторного поля вдоль данной кривой соблюдается (8.80), мы получили, что соблюдается и (8.82), т.е. наше определение параллельного перенесения инвариантно относительно преобразования координат x^i. Важнейшим местом нашей выкладки является *использование закона преобразования для* Γ^k_{ij} в форме (8.76). Можно сказать, что закон преобразования Γ^k_{ij} подобран именно так, чтобы параллельное перенесение вектора, определенное согласно (8.80), было *инвариантным* относительно преобразования координат x^i . И действительно, если потребовать эту инвариантность (для перенесения любого вектора вдоль любой кривой), то наш закон преобразования для Γ^k_{ij}. получается как следствие. В этом можно убедиться следующим образом. В силу инвариантности данного параллельного перенесения формулы (8.80), (8.82) должны вытекать одна из другой. По-прежнему преобразуем (8.80) к виду (8.81), а в (8.82) подставляем

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \qquad \xi^{i'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \xi^j.$$

Так как полученные формулы должны вытекать одна из другой, то их правые части тождественно равны; приравнивая коэффициенты при dx^i, ξ^i, возвращаемся к формуле (8.76), т. е. к прежнему закону преобразования для Γ^k_{ij}.

Заметим, что в случае аффинного информационного пространства мы не нуждались в доказательстве инвариантности параллельного перенесения; там оно имело непосредственный геометрический смысл и, в отличие от того, что мы делаем сейчас, *не определялось, а лишь записывалось* формулой (8.80).

Мы определили параллельное перенесение вектора вдоль кривой, однако не знаем еще, когда можно такое перенесение осуществлять и будет ли оно совершаться однозначно. Обращаясь к формулам (8.80), мы перепишем их, поделив на *dt:*

$$\frac{d\xi^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij}(x^1(t), \ldots, x^n(t))\, \xi^j \frac{dx^i(t)}{dt}. \tag{8.83}$$

Так как Γ^k_{ij} в данном пространстве и в данной координатной системе нам известны как функции от x^i, а x^i вдоль данной кривой известны как функции от *t,* то в уравнениях (8.83) все функции от *t* можно считать известными кроме $\xi^k(t)$, которые мы будем считать искомыми. Для этих *п* функций мы имеем нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений; производная каждой неизвестной функции $\xi^k(t)$ линейно выражена через сами неизвестные функции ξ^k , причем коэффициентами служат известные функции от *t* (при наших предположениях во всяком случае непрерывные).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что такая система имеет решение $\xi^k(t)$ при любых начальных условиях вида

$$\xi^k = \xi^k_0 \ (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ при } t = t_0, \tag{8.84}$$

причем это решение определяется единственным образом и существует на всем интервале изменения *t.*

Переводя это на геометрический язык, мы скажем, что *вектор* ξ^k_0 *заданный в какой-нибудь точке нашей кривой* M_0 (t_0), *можно параллельно переносить вдоль всей кривой и притом единственным образом. Перенесенный в произвольную точку* $M(t)$ *нашей кривой вектор* ξ^k_0 *будет иметь вид* $\xi^k(t)$, *где* $\xi^k(t)$ *— решение системы* (8.83) *при начальных условиях* (8.84) (результат остается верным и тогда, когда наша кривая обслуживается не одной, а последовательно несколькими координатными системами; рассуждение повторяется соответствующее число раз.)

В отличие от того, что мы имели в аффинном информационном пространстве, наше параллельное перенесение, вообще говоря, *зависит от пути.* Этим мы хотим сказать, что вектор ξ^i, полученный параллельным перенесением вектора ξ^i_0 из точки M_0 в точку M, зависит от выбора пути перенесения $\overset{\frown}{M_0M}$. В соответствии с этим параллельное перенесение вектора ξ^i_0 по замкнутому пути с возвращением его в исходную точку M_0 дает нам вектор, вообще говоря, отличный от ξ^i_0,

Таким образом, мы теперь не можем вектор, заданный в точке M_0, вполне определенным образом отложить из точки M, как это было в аффинном информационном пространстве. Однако, от выбора параметризации вдоль пути результат перенесения не зависит, как легко следует из уравнений (8.83).

Зададимся теперь в начальной точке M_0 (t_0) не одним вектором ξ^i_0, а совокупностью всех векторов касательного пространства A^0_n в точке M_0. *В процессе их совместного параллельного перенесения по данному пути линейные зависимости между ними не нарушаются.* Действительно, пусть в точке M_0 $\eta^i_0 = \alpha\xi^i_0$, где α — численная константа. Тогда в процессе параллельного перенесения векторов ξ^i_0, η^i_0 эта зависимость сохраняется:

$$\eta^i(t) = \alpha\xi^i(t). \qquad (8.85)$$

Действительно, умножая формулу параллельного перенесения вектора ξ^i

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i \qquad (8.86)$$

почленно на α, мы убеждаемся, что вектор $\alpha\xi^i$ удовлетворяет этой же формуле и, следовательно, переносится параллельно вместе с ξ^i. Но η^i тоже переносится параллельно, и мы имеем:

$$d\eta^k = -\Gamma^k_{ij}\eta^j dx^i, \qquad (8.87)$$

причем в точке M_0 векторы η^i и $\alpha\xi^i$ совпадают. Значит, они продолжают совпадать и в процессе параллельного перенесения в *силу единственности этого последнего.* Этим (8.85) доказано.

Далее, если в начальной точке $\zeta_0^i = \xi_0^i + \eta_0^i$, то в процессе параллельного перенесения этих трех векторов сохраняется зависимость

$$\zeta^i(t) = \xi^i(t) + \eta^i(t). \tag{8.88}$$

В самом деле, складывая почленно (8.86) и (8.87), убеждаемся, что вектор $\xi^i + \eta^i$ тоже удовлетворяет формуле параллельного перенесения и, следовательно, переносится параллельно вместе с ξ^i и η^i. Поскольку вектор ξ^i тоже переносится параллельно, то равенство между ζ^i и $\xi^i + \eta^i$, имеющее место в начальной точке, сохраняется все время, и мы приходим к (8.88).

Так как все линейные зависимости между векторами сводятся к рассмотренным простейшим (8.85) и (89.8), то все они сохраняются при параллельном перенесении.

8.6. Геодезические линии в L_n

Геодезические линии в информационном пространстве аффинной связности играют приблизительно такую же роль, как прямые линии в аффинном информационном пространстве. Именно, они обладают тем же основным свойством — *постоянством направления.* Для прямых линий это свойство выражается в том, что вектор, направленный по данной прямой линии в какой-нибудь ее точке, будет направлен по ней и в любой другой ее точке. Аналогично этому мы формулируем определение геодезической линии.

Кривая в информационном пространстве аффинной связности называется геодезической, если всякий вектор ξ^i_0 ($\neq 0$), *касательный к этой кривой в какой-нибудь ее точке* M_0, *остается к ней касательным при параллельном перенесении вдоль нее.*

Пусть геодезическая задана уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $x^i(t)$—по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые функции, и пусть параллельно переносимый касательный вектор вдоль геодезической будет $\xi^i(t)$. В силу коллинеарности касательных векторов в каждой точке кривой можно написать:

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha\xi^i, \tag{8.89}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ зависит от точки на кривой и нигде не обращается в нуль, так как иначе $\frac{dx^i}{dt}$ обращались бы в нуль одновременно, что мы исключаем. При желании всегда можно перейти к такому параметру τ, вдоль геодезической, чтобы коэффициент α тождественно равнялся единице. Для этого достаточно положить:

$$\tau = \int \alpha(t)\, dt, \text{ так что } d\tau = \alpha(t)\, dt, \tag{8.90}$$

после чего (8.89) принимает вид:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \xi^i. \tag{8.91}$$

Параметр τ на геодезической, для которого $\frac{dx^i}{d\tau}$ есть параллельно переносимый касательный вектор, мы будем называть каноническим параметром. Как мы показали, переход к каноническому параметру всегда возможен. При этом канонический параметр выбирается с точностью до произвольного линейного преобразования с постоянными коэффициентами

$$\tau^* = A\tau + B, \quad A \neq 0. \tag{8.92}$$

Действительно, если τ — канонический параметр, то и τ^* тоже, так как

$$d\tau^* = A d\tau, \quad \frac{dx^i}{d\tau^*} = \frac{1}{A}\frac{dx^i}{d\tau} \quad \left(\frac{1}{A} = \text{const}\right)$$

и вектор $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ будет вместе с $\frac{dx^i}{d\tau}$ — *параллельно переносимым* касательным вектором.

С другой стороны, *формула* (8.92) *исчерпывает все возможные способы выбора канонического параметра.* В самом деле, если τ и τ^* — два канонических параметра, то векторы $\frac{dx^i}{d\tau}$, $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ оба параллельно переносятся вдоль кривой, а следовательно, в равенстве

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\tau^*}\frac{d\tau^*}{d\tau}$$

коэффициент $\frac{d\tau^*}{d\tau}$ должен быть постоянным (линейные зависимости между параллельно переносимыми векторами сохраняются). Отсюда следует, что зависимость τ^* от τ обязательно будет линейной.

Мы дали определение геодезических линий, но не знаем еще, существуют ли они, с каким произволом их можно выбирать и как фактически их строить. На эти вопросы дают ответ *дифференциальные уравнения геодезических линий.*

Будем искать параметрические уравнения геодезических линий с каноническим параметром τ:

$$x^i = x^i(\tau). \qquad (8.93)$$

Запишем требование, чтобы вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ *параллельно переносился вдоль искомой кривой; это будет означать одновременно, что кривая геодезическая и что параметр* τ *на ней канонический.*

Применяя формулу параллельного перенесения (8.80) к вектору $\frac{dx^i}{d\tau}$, получаем:

$$d\,\frac{dx^k}{d\tau} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^j}{d\tau}dx^i$$

и, деля на $d\tau$, приходим к дифференциальным уравнениям геодезических

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}, \qquad (8.94)$$

отнесенных к каноническому параметру.

Как было уже сказано, $x^k(\tau)$ мы рассматриваем как неизвестные функции. Вторая производная каждой неизвестной функции $x^k(\tau)$ выражена здесь через сами неизвестные функции (входящие как аргументы под знак $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$) и через их первые производные. Мы имеем здесь, таким образом, частный случай канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, решение такой системы единственным образом определяется заданием начальных значений неизвестных функций и всех их производных порядка более низкого, чем порядок старших производных, выраженных в дифференциальных уравнениях. При этом необходимо сделать определенные предположения относительно гладкости функций, входящих в правые части уравнений; в нашем случае эти предположения вполне покрываются непрерывной дифференцируемостью функций $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$. В соответствии со сказанным мы можем произвольно задаться начальными значениями неизвестных

функций x и их первых производных $\frac{dx^k}{d\tau}$ при каком-либо начальном значении параметра:

$$(x^i)_{\tau=\tau_0} = a^i, \quad \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = b^i, \qquad (8.95)$$

где b^i одновременно в нуль не обращаются. Тогда по общей теореме существования мы можем утверждать, что *в некоторой окрестности* *значения* $\tau = \tau_0$ *существуют и единственным образом определяются функции* $x^i(\tau)$, *удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений* (8.94) *и начальным условиям* (8.95).

Полученное решение, таким образом, зависит от начальных условий и в развернутом виде записывается:

$$x^i = x^i(\tau;\ a^1,\ \ldots,\ a^n;\ b^1,\ \ldots,\ b^n), \tag{8.96}$$

причем, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, эти функции по всем своим аргументам будут непрерывно дифференцируемыми такое же число раз, как и функции $\Gamma(x^1, \ldots, x^n)$, а по аргументу τ — даже на 2 единицы выше. В переводе на геометрический язык наш результат означает, что всегда можно провести геодезическую линию и притом только одну через наперед заданную точку $A\ (a^i)$ и с наперед заданным касательным вектором b^i в этой точке. Заметим, что существенно при этом задание не самого касательного вектора b^i, а лишь касательной прямой, по которой он направлен. В самом деле, если b^i заменить любым коллинеарным вектором, например, $-5b^i$, то *геодезическая от этого не изменится:* достаточно на прежней геодезической взять вместо канонического параметра τ другой канонический параметр $\tau^* = -\frac{1}{5}\tau$. Тогда в прежней начальной точке

$$\frac{dx^i}{d\tau^*} = -5\,\frac{dx^i}{d\tau} = -5b^i.$$

Точно так же полученная геодезическая не зависит от начального значения τ_0 параметра τ, так как, не меняя самой кривой, можно принять на ней за канонический параметр $\tau + C$, где C—любая константа. Тогда начальное значение τ_0+C может быть сделано каким угодно.

Мы видим, что произвол в выборе геодезических в информационном пространстве аффинной связности такой же, как и произвол в выборе прямых в аффинном информационном пространстве: *через каждую точку по каждому направлению проходит одна и только одна геодезическая.*

В случае аффинного информационного пространства A_n *прямые линии являются геодезическими,* как сразу видно из определения геодезических. Теперь мы можем утверждать и обратное: *всякая геодезическая в* A_n *является прямой линией.* Действительно, через данную точку по данному направлению проходит лишь одна геодезическая, которая должна, таким образом, совпадать с прямой линией, проведенной через ту же точку по тому же направлению.

Возвращаемся к произвольному L_n.

Общая теорема существования гарантирует нам существование функций $x^i(\tau)$ лишь в некоторой окрестности данного значения $\tau = \tau_0$, т. е. существование лишь некоторого кусочка геодезической около данной точки $A(a^i)$. После небольшого дополнительного рассуждения мы сможем утверждать больше. А именно, обозначим через $\tau_1>\tau_0$ такое значение τ, что: 1) при τ, меняющемся между τ_0 и τ_1 ($\tau_0 \leq \tau < \tau_1$), функции $x^i(\tau)$, удовлетворяющие (8.94), (8.95), существуют, но 2) при τ, меняющемся от τ_0 до $\tau_1+\delta$, они уже не существуют, сколь бы малым ни брать $\delta > 0$. При этом мы допускаем случай $\tau_1=\infty$; тогда последнее требование 2) излишне и даже не имеет смысла. Другими словами, τ_1— верхняя грань всех тех значений канонического параметра τ, которые можно достичь, продолжая нашу геодезическую столько, сколько это возможно,

Итак, меняя τ в сторону возрастания, начиная от τ_0, мы неограниченно приближаемся к τ_1, но не превосходим этого значения. Как будет показано ниже, мы даже не достигаем значения τ_1; более того, при $\tau \to \tau_1$ (имеется в виду непрерывное изменение τ) *точка $M(\tau)$ на геодезической не может стремиться к какому-либо предельному положению M_1.* В самом деле, допустим противное:

$$M(\tau) \underset{\tau \to \tau_1}{\longrightarrow} M_1. \tag{8.97}$$

Окружим M_1 очень малой окрестностью U, так что заключенные в ней маленькие кусочки геодезических будут иметь, грубо говоря, почти линейные уравнения $x^i \approx a^i\tau + b^i$ и будут вести себя почти как кусочки прямых (если координаты x^i представить себе как аффинные координаты в аффинном информационном пространстве). Ясно, что те геодезические отрезочки в U, которые не проходят через точку M_1, не могут к ней и неограниченно приближаться (это нетрудно было бы показать и с полной строгостью). Наша геодезическая в силу (8.97) войдет в окрестность U и будет в ней оставаться, начиная с некоторого значения τ. Следовательно, она должна в этой части совпасть с одним из геодезических отрезочков, заключенных в окрестности U, а именно с одним из отрезочков, проходящих через M_1 — иначе (8.97) не могло бы иметь места. Но тем самым наша геодезическая не только дойдет до точки M_1, но и пройдет через нее, а значит, параметр τ не только достигнет значения τ_1, но и превзойдет его, а это невозможно.

Наше предложение доказано.

Смысл его в том, что, продолжая геодезическую, мы не можем вдруг остановиться, упереться в некоторую точку; если даже возрастание канонического параметра ограничено значением $\tau_1 < \infty$, геодезическая в пределах нашего пространства продолжается неограниченно. Этому не противоречит такое, например, положение вещей: пусть наше пространство представляет собой ограниченную область Ω аффинного информационного пространства A_n. Тогда при продолжении геодезических линий (т. е. прямых) мы часто будем останавливаться, упираясь в границу области Ω. Однако граница области Ω не принадлежит рассматриваемому информационному многообразию, и с точки зрения самой области Ω геодезическая продолжается неограниченно (см. определение области; п. 7.1).

Мы все время говорим о продолжении геодезических линий; при этом важно, что *продолжать геодезическую можно лишь одним способом.* В самом деле, допустим, что геодезическая линия при ее продолжении с некоторого момента раздваивается; пусть при этом τ^* — верхняя грань значений $\tau \geq \tau_0$, при которых обе геодезические еще совпадают. Тогда они будут совпадать и при значении $\tau = \tau^*$, так как в обоих случаях

$$M(\tau) \to M(\tau^*) \text{ при } \tau \to \tau^* \ (\tau_0 \leqslant \tau < \tau^*),$$

где точки $M(\tau)$ — общие для обеих геодезических; действительно, в илу условия 4° (п. 7.10) $M(\tau)$ при $\tau \to \tau^*$ не может стремиться одновременно к двум различным предельным точкам $M_1(\tau^*)$, $M_2(\tau^*)$. Исходя теперь из точки $M(\tau^*)$, можно продолжить общий отрезок $\tau_0 \leq \tau \leq \tau^*$ двух геодезических линий и на значения $\tau > \tau^*$ (вблизи τ^*), и притом единственным образом по уже использованной теореме существования и единственности. Мы вступаем в противоречие с определением τ^*, и этим доказывается наше утверждение.

Информационное пространство аффинной связности L_n называется *полным,* если на любой его геодезической канонический параметр τ можно менять от $-\infty$ до $+\infty$. Таково, например, аффинное информационное пространство A_n.

Рассмотрим еще некоторые свойства геодезических. *Если в информационных пространствах аффинной связности нас интересуют лишь их геодезические, то мы можем ограничиться информационными пространствами без кручения. А именно, объект связности* Γ^k_{ij} *определяет в данном информационном многообразии те же геодезические, что и объект связности без кручения* $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, *полученный его симметрированием:*

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}\right).$$

Убедимся прежде всего, что $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, таким образом полученные, действительно образуют объект связности. Для этого достаточно почленно сложить и разделить на 2 формулы преобразования (8.69) и (8.78). Заменяя как в старых, так и в новых координатах полусумму Γ^k_{ij} и Γ^k_{ji}; через $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, получаем для $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ закон преобразования вида (8.69), а это означает, что $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ — тоже объект связности. Очевидно, эта связность без кручения, так как $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ симметричен по нижним индексам.

Теперь покажем, что геодезические для обеих связностей будут общие. Пишем дифференциальные уравнения геодезических для связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$:

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\tilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = -\frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ji}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}.$$

Меняя обозначения индексов суммирования во втором члене правой части *(i* на *j* и наоборот), убеждаемся, что он равен первому члену, в результате в правой части остается удвоенный первый член, и мы получаем: $\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}$, а это есть дифференциальные уравнения геодезических связности Γ^k_{ij}.

Таким образом, геодезические для обеих связностей действительно общие.

Будем рассматривать теперь *геодезические для связностей без кручения.* Поставим следующую задачу.

Пусть винформационном многообразии заданы две связности без кручения Γ^k_{ij}, G^k_{ij}; *в каком случае они имеют общие геодезические?*

Допустим, что нам *дано, что геодезические у обеих связностей общие.* Рассмотрим для какой-либо геодезической касательный вектор ξ^i, параллельно переносимый в первой связности, и касательный вектор η^i, параллельно переносимый во второй связности. Так как оба вектора касательные, то

$$\eta^k = \alpha\xi^k, \tag{8.98}$$

где коэффициент α, вообще говоря, переменный; α≠0. Запишем формулы параллельного перенесения:

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i, \tag{8.99}$$

$$d\eta^k = -G^k_{ij}\eta^j dx^i. \tag{8.100}$$

Вставляя в последнюю формулу η^k из (8.98), получим:

$$d\alpha\,\xi^k + \alpha\,d\xi^k = -G^k_{ij}\alpha\xi^j dx^i.$$

Деля почленно на α и вставляя сюда $d\xi^k$ из (8.99), получим:

$$\frac{d\alpha}{\alpha}\xi^k - \Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i = -G^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{8.101}$$

Параллельно переносимый касательный вектор ξ^i согласно (8.91) можно записать: $\xi^i = \frac{dx^i}{d\tau}$, где τ — канонический параметр по отношению к первой связности. Тогда (8.101) после почленного деления на $d\tau$ принимает вид

$$\frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k = (\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij})\xi^j\xi^i. \tag{8.102}$$

Так как геодезические линии можно проводить через любую точку по любому направлению, то это равенство *должно быть верно в любой точке и для любого вектора* ξ^i. При этом $\frac{d\ln\alpha}{d\tau}$ имеет каждый раз свое численное значение, которое зависит от выбора точки и вектора ξ^i. Обозначим для краткости

$$\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij} = T^k_{ij}. \tag{8.103}$$

Отметим, что составленная таким образом *разность двух объектов связности дает всегда тензор, один раз контравариантный и дважды ковариантный.* Это легко проверить, выписав закон преобразования (8.69) для Γ^k_{ij} и параллельно для G^k_{ij} и вычитая почленно из первого равенства второе. Тогда члены со вторыми производными взаимно уничтожаются, и для разностей T^k_{ij} мы получаем тензорный закон преобразования. Это верно для любых связностей Γ^k_{ij}, G^k_{ij} в том числе и с кручением. В нашем случае связности без кручения; отсюда следует $T^k_{ij} = T^k_{ji}$. Теперь (8.102) можно переписать:

$$T^k_{ij}\xi^i\xi^j = \frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k. \tag{8.104}$$

Из этого соотношения мы должны сделать выводы относительно строения тензора T^k_{ij}.

Для этой цели исключим неизвестный нам множитель $\frac{d\ln\alpha}{d\tau}$ следующим образом: умножаем (8.104) почленно на ξ^l и альтернируем по индексам *k* и *l*. Получим:

$$\xi^{[l}T^{k]}_{ij}\xi^i\xi^j = 0. \tag{8.105}$$

Пользуясь единичным тензором δ^l_m, можно записать тождество

$$\xi^l = \delta^l_m\xi^m.$$

Вставляя это выражение в (8.105), получим:

$$\delta_m^{[l} T_{ij}^{k]} \xi^m \xi^i \xi^j = 0. \tag{8.106}$$

Так как это равенство должно иметь место *тождественно* относительно $\xi^1, \ldots, \xi^n$, то после приведения подобных членов все коэффициенты кубичной формы в левой части должны обратиться в нуль. Член с произведением $\xi^p\xi^q\xi^r$ будет встречаться при суммировании по m, i, j шесть раз (если p, q, r все различны), именно, когда m, i, j принимают значения p, q, r в их всевозможных перестановках. Соответствующий суммарный коэффициент при $\xi^p\xi^q\xi^r$, который мы должны приравнять нулю, легко вычисляется из (8.106):

$$2\left(\delta_p^{[l} T_{qr}^{k]} + \delta_q^{[l} T_{rp}^{k]} + \delta_r^{[l} T_{pq}^{k]}\right) = 0. \tag{8.107}$$

Ввиду симметрии T^k_{ij} по нижним индексам среди шести коэффициентов будут три пары одинаковых. Аналогичным подсчетом соотношение (8.107) получается и при наличии среди p, q, r одинаковых индексов.

Запишем альтернацию в (8.107) в развернутом виде:

$$\delta_p^l T_{qr}^k + \delta_q^l T_{rp}^k + \delta_r^l T_{pq}^k - \delta_p^k T_{qr}^l - \delta_q^k T_{rp}^l - \delta_r^k T_{pq}^l = 0.$$

Произведем теперь свертывание по индексам l, r. Учитывая свойства тензора δ^i_j, в частности, что

$$\delta_l^l = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^n = n,$$

получим:

$$T_{qp}^k + T_{qp}^k + nT_{pq}^k - \delta_p^k T_{ql}^l - \delta_q^k T_{lp}^l - T_{pq}^k = 0,$$

откуда

$$T_{pq}^k = \frac{1}{n+1}\left(\delta_p^k T_{ql}^l + \delta_q^k T_{pl}^l\right). \tag{8.108}$$

Обозначим через p_i - одноковариантный тензор, полученный свертыванием тензора T^k_{ij} и последующим умножением на $\frac{2}{n+1}$:

$$p_i = \frac{2}{n+1} T_{il}^l. \tag{8.109}$$

Теперь (8.108) можно записать окончательно:

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(p_i\delta_j^k + p_j\delta_i^k\right), \tag{8.110}$$

т. е.

$$T_{ij}^k = p_{(i}\delta_{j)}^k. \tag{8.111}$$

Мы выяснили строение тензора T^k_{ij}. Сформулируем теперь теорему, которая является ответом на поставленный нами вопрос.

Для того чтобы два объекта связности без кручения обладали общими геодезическими, необходимо и достаточно, чтобы они отличались на тензор вида

$$T^k_{ij} = p_{(i}\delta^k_{j)}.$$

Правда, нами доказана лишь необходимость этого признака. Но достаточность его проверяется легко. Пусть нам дано, что

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\left(p_i\delta^k_j + p_j\delta^k_i\right), \tag{8.112}$$

где p_i — некоторое тензорное поле. Пусть дана какая-нибудь линия, геодезическая в связности Γ^k_{ij}, с каноническим параметром τ и с параллельно переносимым касательным вектором ξ^i. Покажем, что, подобрав некоторый (переменный) множитель α, мы можем добиться, чтобы вектор $\eta^i = \alpha\xi^i$ *оказался параллельно переносимым уже в связности* G^k_{ij}. Тем самым будет показано, что наша геодезическая будет геодезической и в связности G^k_{ij}. Записывая, что ξ^k переносится параллельно в связности Γ^k_{ij}, получим снова (8.99). Требуем, далее, чтобы $\eta^k = \alpha\xi^k$ переносился параллельно в связности G^k_{ij}: записываем (8.100) и после прежних преобразований получаем (8.102). Пользуясь (8.112), вставляем сюда $\frac{1}{2}\left(p_i\delta^k_j + p_j\delta^k_i\right)$ вместо $\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij}$ и получаем:

$$\frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k = p_i\xi^i\xi^k,$$

т. е. наше требование принимает вид

$$\frac{d\ln\alpha}{d\tau} = p_i\xi^i.$$

Так как вдоль нашей кривой $p_i\xi^i$ есть вполне определенная функция параметра τ, то отсюда после интегрирования найдем $\ln\alpha$ с точностью до постоянного слагаемого, а само α — с точностью до постоянного множителя. Тем самым найден и вектор $\eta^i = \alpha\xi^i$, и всякая геодезическая в связности Γ^k_{ij} оказывается геодезической и в связности G^k_{ij}. Теорема доказана.

Заметим, что если бы мы потребовали для двух связностей без кручения совпадения не только геодезических, но и канонических параметров на них, то и сами связности совпали бы.

Действительно вдоль общей геодезической и для общего канонического параметра τ удовлетворяются дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}, \quad \frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -G^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},$$

откуда

$$\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}=G^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},$$

а так как геодезические линии проходят через любую точку по любому направлению, то здесь мы имеем тождество относительно x^i и $\frac{dx^i}{d\tau}$.
Из него следует (учитывая симметрию Γ^k_{ij} и G^k_{ij} по нижним индексам):

$$\Gamma^k_{ij}=G^k_{ij}. \qquad (8.113)$$

Наше утверждение доказано.

Добавление к какому-либо объекту связности любого тензора вида (8.111) называется *геодезическим преобразованием аффинной связности;* геодезические при этом не меняются.

Пространство аффинной связности L^0_n с объектом связности Γ^i_{jk} $(=\Gamma^i_{kj})$ называется *проективно евклидовым,* если в некоторой окрестности каждой его точки можно перейти в такую координатную систему x^i, в которой геодезические линии задаются линейными параметрическими уравнениями

$$x^i=a^it+b^i \qquad (a^i,\ b^i=\text{const}). \qquad (8.114)$$

Это значит, что они ведут себя как геодезические аффинного (или евклидова) пространства в аффинных координатах, т. е. как прямые линии.

Тем самым геодезические линии, определяемые нашим объектом связности Γ^k_{ij}, определяются и объектом связности G^i_{jk} аффинного пространства, а следовательно, согласно (8.112)

$$G^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-p_{(i}\delta^k_{j)}, \qquad (8.115)$$

где p_i — некоторое тензорное поле (все это в пределах рассматриваемой окрестности).

Чтобы L^0_n с объектом связности Γ^i_{jk} было проективно евклидовым, необходимо и достаточно существование в пределах некоторой окрестности любой его точки такого тензорного поля p_i, что $\Gamma^k_{ij}-\delta^k_{(i}p_{j)}$ можно было бы отождествить с объектом связности G^k_{ij} в некоторой области аффинного пространства.

Необходимость этого признака только что была показана: достаточность же обнаруживается переходом к аффинным координатам в аффинном пространстве, после чего уравнения геодезических (общих для обеих связностей) можно записать в виде (8.114).

8.7. Геодезические координаты в информационных пространствах аффинной связности без кручения L^0_n

Среди информационных пространств аффинной связности имеют наибольшее значение и обладают наилучшими информационными свойствами пространства без кручения, для которых

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{8.116}$$

Их мы и будем рассматривать. Важность их основывается прежде всего на том, что к их числу принадлежит аффинное информационне пространство. Действительно, мы видели (п.п. 7.4, 7.5), что объект связности аффинного информационного пространства симметричен по нижним индексам. Кроме того, аффинное информационное пространство (или, более общо, область Ω в аффинном информационном пространстве) можно рассматривать как частный случай информационного пространства аффинной связности, так как вся аффинная информация области Ω вполне определяется заданием в ней объекта связности (п. 7.5). Таким образом, *область в аффинном информационном пространстве есть частный случай информационного пространства аффинной связности без кручения.*

Возникает вопрос, как узнать, не является ли данное информационное пространство аффинной связности просто некоторой областью аффинного информационного пространства (которая, в частности, может заполнять и все п информационное ространство). Прежде всего при этом имеет смысл рассматривать лишь информационные пространства без кручения — для пространств с кручением вопрос сразу решается отрицательно. Затем вопрос сводится к такому: *можно ли перейти в такую координатную систему $x^{i'}$, действующую во всем пространстве, в которой все коэффициенты связности $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ тождественно обращаются в нуль.*

В самом деле, мы знаем, что коэффициенты связности аффинного информационного пространства равны нулю в аффинных координатах и только в них. Поэтому если в информационном пространстве аффинной связности L^0_n, отнесенном к координатной системе x^i с областью изменения координат Ω', оказывается

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0, \tag{8.117}$$

то мы вправе отождествить это пространство с куском аффинного информационного пространства, заданным в аффинных координатах $x^{i'}$ в пределах той же области изменения Ω'. Действительно, коэффициенты связности $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ в обоих случаях одинаковы (равны нулю), а следовательно, одинакова и геометрия, определяемая объектом связности.

В некоторых случаях нельзя добиться обращения в нуль $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ во всем пространстве одновременно, но можно это сделать в некоторой окрестности каждой его точки. Тогда информационное пространство аффинной связности мы называем *локально аффинным* (аналогично локально евклидову). В некоторой окрестности любой своей точки локально аффинное информационное пространство представляет собой «кусок аффинного информационного пространства» и лишь в целом отличается от него.

Возвращаемся к общей теории. Вообще говоря, информационное пространство аффинной связности, даже с нулевым кручением, аффинным информационным пространством не является, и ни в какой координатной системе $x^{i'}$, хотя бы в пределах малой окрестности данной точки *M*, $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ не удается обратить в нуль тождественно.

Однако в случае нулевого кручения без труда можно обратить $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *в нуль в самой данной точке M.* В самом деле, переходя от координат x^k к координатам $x^{k'}$, зададимся значениями $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ в данной точке *M* произвольно (матрица должна быть неособенной), а значения $\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$ в той же точке подберем так, чтобы $\Gamma^{k'}_{i'j'}(M)$ обратились в нуль. Для этого, как видно, из (8.69) достаточно потребовать:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} = 0. \tag{8.118}$$

Все величины предполагаются вычисленными в данной точке *M*. Можно взять вместо (8.118) равносильное соотношение

$$\Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{8.119}$$

используя закон преобразования (8.69) в форме (8.76)

Таким образом, переходя от координат x^i *к координатам* $x^{i'}$, *мы можем добиться обращения* $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *в нуль в наперед заданной точке M. Для этого достаточно подобрать функции* $x^{i'}(x^1, ..., x^n)$ *так, чтобы их вторые частные производные в точке M выражались через их первые частные производные и* Γ^k_{ij} *в той же точке M согласно* (8.119), а это можно сделать бесчисленным количеством способов. Зададимся, например, неособенной числовой матрицей $a^{i'}_i$ и введем новые координаты $x^{i'}$ посредством формул

$$x^{l'} = a^{l'}_i (x^i - x^i_M) + \frac{1}{2} a^{l'}_k \Gamma^k_{ij}(M)(x^i - x^i_M)(x^j - x^j_M). \tag{8.120}$$

Здесь $x^i{}_M$, $\Gamma^k{}_{ij}(M)$ — определенные числа, так что x^i выражаются через x^i квадратичными многочленами. Дифференцируя (8.129) по x^i, а потом по x^j почленно и полагая $x^i = x^i{}_M$, получаем:

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}(M) = a_i^{l'}, \qquad \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}(M) = a_k^{l'} \Gamma_{ij}^k(M),$$

так что (8.119) соблюдается, а значит, $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$. Полученная координатная система $x^{i'}$ пригодна, по крайней мере, в некоторой окрестности данной точки *М*.

В качестве матрицы $a^{i'}{}_i$ можно взять и просто единичную матрицу. Точкой *М* можно задаваться произвольно. Однако каждый раз переход к координатам $x^{1'}$приходится делать по-своему, и каждый раз мы получаем, что $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$ лишь для одной точки *М*. Если бы захотели указанным приемом добиться *тождественного* обращения $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ в нуль, то нам нужно было бы обеспечить равенство (8.119) *в каждой точке М,* т. е. проинтегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций
$x^{i'}$ $(x^1, \ldots, x^n)$. Однако эта система, вообще говоря, несовместна. Напомним, что мы рассматриваем пространство без кручения. Это очень существенно, так как в случае $\Gamma^k{}_{ij}=\Gamma^k{}_{ji}$, вторые частные производные нельзя было бы вычислять по формуле (8.119)

Если в данных координатах $x^{i'}$ *в данной точке М имеет место* $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *(М)* = 0, *то координаты* $x^{i'}$ *называются геодезическими в точке М.* Значение геодезических координат состоит в том, что они вблизи точки *М* подражают аффинным координатам, насколько это возможно в нашем пространстве. Действительно, формула параллельного перенесения (8.86) в точке *М* соответствующих геодезических координатах $x^{i'}$ дает

$$d\xi^{k'} = 0.$$

Это означает, что координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ хоть и не являются постоянными, как в аффинных координатах, но все же являются стационарными в точке *М.* Точнее, это значит, что при бесконечно малом смещении из точки *М* по любому пути координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ получают приращения $\Delta\xi^{k'}$ бесконечно малые высшего порядка (ввиду $d\xi^{k'} = 0$). В остальных точках пространства координаты $x^{i'}$, геодезические в точке *М,* никакими преимуществами не обладают.

Заметим, что линейное преобразование геодезических координат

$$x^{i''} = A^{i''}_{i'} x^{i'} + A^{i''}$$

оставляет их геодезическими в данной точке. Действительно, так как в этом случае $\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}} = 0,$, то закон преобразования $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ принимает тензорный характер $\Gamma^{i''}_{j''k''} = A^{i''}_{i'} A^{j'}_{j''} A^{k'}_{k''} \Gamma^{i'}_{j'k'},$ и из $\Gamma^{i'}_{j'k'}\ (M) = 0$ следует $\Gamma^{i''}_{j''k''}(M) = 0.$

Итак, если пространство без кручения, то для каждой точки М можно построить координаты $x^{i'}$, геодезические в этой точке.

Этот результат можно значительно усилить: *преобразованием координат x^i можно добиться обращения* Γ^k_{ij} *в нуль не только в любой наперед заданной точке, но и вдоль любой наперед заданной кривой С.* Кривая *С* предполагается несамопересекающейся; координаты x^i задаются в некоторой окрестности этой кривой.

Предварительным преобразованием координат всегда можно добиться, чтобы наша кривая оказалась некоторым отрезком координатной линии x^1, т. е. чтобы $x^2, \ldots, x^n$ вдоль нее оставались постоянными. Для простоты всегда можно принять, ничего не теряя в общности, что вдоль кривой

$$x^2 = \ldots = x^n = 0,\ 0 \leqslant x^1 \leqslant 1. \tag{8.121}$$

Предположим, что нам удалось перейти к искомым новым координатам $x^{i'}$, так что вдоль нашей кривой $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0.$. Тем самым в каждой точке нашей кривой должно соблюдаться соотношение (8.119).

Вдоль нашей кривой значения $\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}$ будут функциями от x^1, что ми обозначим так:

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} = a^{l'}_i\ (x^1). \tag{8.122}$$

Тогда (8.119) дает

$$\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\ (x^1)\ a^{l'}_k (x^1), \tag{8.123}$$

где Γ^k_{ij} вдоль нашей кривой тоже являются функциями x^1. Отсюда легко вытекает, что функции $a^{l'}_i(x^1)$ не могут быть произвольными: дифференцируя (8.122) по x^1 почленно и сравнивая с (8.123) при j=1, получим для $a^{l'}_i\ (x^1)$ нормальную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{da^{l'}_i\ (x^1)}{dx^1} = \Gamma^k_{1i}(x^1)\ a^{l'}_k\ (x^1). \tag{8.124}$$

Все полученные до сих пор соотношения лишь необходимы, так как мы рассуждали, предполагая задачу решенной. Теперь откинем это предположение и перейдем к фактическому отысканию новых координат $x^{i'}$. Для этой цели интегрируем систему (8.124), произвольно задавшись начальными значениями $a^{l'}{}_i$ (0) функций $a^{l'}{}_i\,(x^1)$ при условии неособенности матрицы $a^{l'}{}_i$ (0). Как известно, решение $a^{l'}{}_i$ (x^1) в этом случае существует (причем матрица $a^{l'}{}_i\,(x^1)$ остается неособенной).

Далее, напишем соотношение (8.122) при i=1

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^1} = a_1^{l'}\,(x^1). \tag{8.125}$$

Интегрируя его при произвольных начальных значениях $x^{l'} = x^{l'}$ (0), находим $x^{l'}$ как функции от x^1 вдоль нашей кривой:

$$x^{l'} = x^{l'}\,(0) + \int_0^{x^1} a_1^{l'}\,(x^1)\,dx^1 = f^{l'}\,(x^1). \tag{8.126}$$

Теперь мы введем новые координаты $x^{l'}$ в окрестности нашей кривой по формулам

$$x^{l'} = f^{l'}\,(x^1) + a_\alpha^{l'}\,(x^1)\,x^\alpha + \frac{1}{2}\,\Gamma_{\alpha\beta}^k(x^1)\,a_k^{l'}\,(x^1)\,x^\alpha x^\beta. \tag{8.127}$$

Здесь α, β пробегают значения 2, 3 ..., *n.*

По существу мы получаем здесь новые координаты $x^{l'}$ в виде разложения в ряд Тейлора по степеням старых координат $x^2, x^3,\ldots, x^n$ при каждом значении x^1, $0 \le x^1 \le 1$. Для простоты обрываем ряд на членах второй степени. Выражения для вторых частных производных заимствованы из (8.123).

Остается проверить, что вдоль кривой (8.121) удовлетворяются уравнения (8.119), а для этого достаточно проверить (8.122) и (8.123). Дифференцируя (8.127) по $x^\gamma(\gamma = 2, 3, \ldots, n)$, имеем:

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^\gamma} = a_\gamma^{l'}(x^1) + \Gamma_{\alpha\gamma}^k(x^1)\,a_k^{l'}\,(x^1)\,x^\alpha. \tag{8.128}$$

В последнем члене мы дифференцировали по x^γ только x^β, а потом удвоили результат, так как дифференцирование x^α дает то же самое. Так как речь идет о кривой (8.121), то $x^\alpha = 0$, и

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^\gamma} = a_\gamma^{l'}\,(x^1),$$

так что (8.121) имеет место при i = 2, 3, ..., *n.* Чтобы проверить (8.121) при i=1, дифференцируем (8.127) по x^1 и, полагая затем $x^\alpha = 0$, приходим вдоль нашей кривой к выражению

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^1} = \frac{df^{l'}(x^1)}{dx^1} = a_1^{l'}\,(x^1),$$

где последнее равенство следует из (8.126). Итак, (8.122) проверено полностью.

Продифференцируем (8.128) по x^δ (δ = 2, 3, ..., *n*) почленно:

$$\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\gamma}} = \Gamma^k_{\delta\gamma}(x^1)\, a^{l'}_k\,(x^1),$$

и значит, (8.123) соблюдается при *i*, *j*=2, 3, ..., *n*. Далее, дифференцируя (8.128) по x^1 и полагая $x^\alpha = 0$, имеем:

$$\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^1\partial x^{\gamma}} = \frac{da^{l'}_{\gamma}(x^1)}{dx^1}.$$

Заменяя правую часть согласно (8.124), убеждаемся, что (8.123) соблюдается вдоль нашей кривой при *i*=1, *j* =2, 3, ..., *n*.

Наконец, дифференцируя (8.127) два раза по x^1 и полагая $x^\alpha = 0$, получим:

$$\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^1\partial x^1} = \frac{d^2 f^{l'}(x^1)}{\partial x^1\partial x^1} = \frac{da^{l'}_1(x^1)}{dx^1} = \Gamma^k_{11}(x^1)\, a^{l'}_k(x^1).$$

В этой выкладке мы использовали (8.125) и (8.124). Итак, соотношение (8.123) проверено полностью. *В результате вдоль нашей кривой соблюдается и* (8.119), *и тем самым,* $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$. *Координаты* $x^{l'}$ *со свойством* $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$ *вдоль данной кривой мы будем называть геодезическими вдоль этой кривой.*

Координаты $x^{l'}$, геодезические вдоль данной кривой, обладают вблизи нее свойствами как бы аффинных координат; при бесконечно малом смещении из любой точки *M* нашей кривой дифференциалы координат параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ равны нулю, так что $\Delta\xi^{i'}$суть бесконечно малые высшего порядка. Таким образом, при параллельном перенесении вектора в бесконечной близости нашей кривой его координаты остаются «почти постоянными». Это справедливо при любом бесконечно малом смещении не только по нашей кривой, но и «вбок» от нее.

Если же, в частности, *смещение происходит вдоль самой кривой, то все время*

$$d\xi^{i'} = 0$$

и координаты параллельно переносимого вектора просто остаются постоянными:

$$\xi^{i'} = \text{const}.$$

Конечно, наш способ введения координат $x^{l'}$, геодезических вдоль данной кривой, отнюдь не является единственным; мы его выбрали лишь как наиболее простой. Результат не изменился бы, например, если бы мы в (8.127) добавили еще какие угодно многочлены с членами степени >2 относительно x^2, ..., x^n и с коэффициентами, зависящими от x^1.

Наше предположение, что кривая не самопересекается, существенно: иначе она содержала бы замкнутый контур, при обнесении по которому вектор $\xi^{k'}$, вообще говоря, должен был бы измениться, а потому и нельзя было бы подобрать таких координат $x^{l'}$, чтобы вдоль кривой координаты вектора $\xi^{k'}$ оставались постоянными.

Но и сейчас не исключено, что $x^{l'}$ будут принимать *одинаковые* значения в *разных* точках кривой *C;* в этом случае $x^{l'}$ играют роль координат лишь локально — в некоторой окрестности каждой точки кривой *C*.

8.8. Аффинная связность в римановом информационном пространстве

До сих пор мы рассматривали отдельно риманову геометрию, порождаемую метрическим тензором $g_{ij}(M)$, и геометрию аффинной связности, порождаемую объектом связности $\Gamma^k_{ij}(M)$. Наиболее содержательная информационная картина получается при объединении той и другой информации, причем это можно сделать вполне естественным путем. *А именно, в римановом информационном пространстве всегда можно построить и притом единственным образом связность* $\Gamma^k_{ij}(M)$, *обладающую следующими двумя свойствами.*

1°. *Кручение равно нулю*

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{8.129}$$

2°. *Всякий раз, когда вдоль какого-либо пути одновременно переносятся параллельно два вектора* $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, *их скалярное произведение не меняется.*

Из условия 2° следует, в частности, что скалярные квадраты параллельно переносимых векторов также остаются постоянными. Таким образом, мы хотим подобрать связность Γ^k_{ij} так, чтобы всевозможные векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, .. ., заданные в какой-нибудь точке *M,* вели себя в процессе параллельного перенесения *как одно твердое тело:* не только аффинные, но и все их метрические свойства должны оставаться неизменными, в частности, не должны меняться их длины и углы между ними (все это вытекает из постоянства скалярных произведений $\boldsymbol{\xi\eta}$). Это требование должно приблизить нас к положению вещей в евклидовом пространстве, где параллельное перенесение векторов, очевидно, сохраняет все их метрические свойства.

Условие 1° имеет аналогичное назначение: аффинная связность в евклидовом (или, что то же самое, в аффинном) пространстве имеет кручение нуль. Вводя связность в римановом пространстве, мы стараемся сохранить и это свойство.

Переходим к доказательству нашего утверждения. *Будем искать связность* Γ^k_{ij}, *удовлетворяющую условиям* 1°, 2°. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ записывается согласно (8.3) в виде

$$\boldsymbol{\xi\eta} = g_{ij}\xi^i\eta^j.$$

Требование постоянства $\boldsymbol{\xi\eta}$ при параллельном перенесении вдоль какого-либо пути можно записать в виде равенства нулю дифференциала

$$d(\boldsymbol{\xi\eta}) = d(g_{ij}\xi^i\eta^j) = 0, \tag{8.130}$$

или

$$dg_{ij}\xi^i\eta^j + g_{ij}d\xi^i\eta^j + g_{ij}\xi^i d\eta^j = 0. \tag{8.131}$$

Так как векторы $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ переносятся параллельно, то

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{pi}\xi^i\,dx^p, \qquad d\eta^k = -\Gamma^k_{pj}\eta^j\,dx^p,$$

где Γ^k_{ij} — коэффициенты *искомой* связности, а dx^p—-дифференциалы координат точки при бесконечно малом смещении по пути. Кроме того,

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\,dx^p.$$

Вставляем все это в (8.131), изменив предварительно в этом равенстве обозначения индексов суммирования: во втором члене *i* на *k*, в третьем члене *j* на *k*. Получим:

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} - g_{kj}\Gamma^k_{pi} - g_{ik}\Gamma^k_{pj}\right)\xi^i\eta^j\,dx^p = 0.$$

Так как ξ^i, η^j, dx^p мы можем выбирать совершенно произвольно, т. е. любые векторы можем переносить по любому пути, то равенство должно представлять собой тождество относительно ξ^i, η^j, dx^p. Отсюда вытекает обращение в нуль всех коэффициентов при этих величинах:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} - g_{kj}\Gamma^k_{pi} - g_{ik}\Gamma^k_{pj} = 0. \tag{8.132}$$

Из этих уравнений и из условия 1° и подлежат определению искомые Γ^k_{ij}. Очевидно, от соотношений (8.132) можно обратной выкладкой вернуться к (8.130), так что эти соотношения не только необходимы, но и достаточны для соблюдения условия 2°.

Обозначим аналогично (7.61):

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk}\Gamma^k_{ij}. \tag{8.133}$$

Ясно, что обратным поднятием индекса через величины $\Gamma_{l,\,ij}$ можно выразить Γ^k_{ij}:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,\,ij}. \qquad (8.134)$$

При этом в силу условия 1° как Γ^k_{ij}, так и $\Gamma_{l,\,ij}$ симметричны по индексам i, j.

Теперь уравнения (8.132) перепишутся в виде

$$\Gamma_{j,\,pi} + \Gamma_{i,\,pj} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}. \qquad (8.135)$$

Но эти уравнения по форме вполне совпадают с (7.64) и решаются таким же образен. Получаем (аналогично (7.65)):

$$\Gamma_{l,\,mk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right) \qquad (8.136)$$

и согласно (8.134)

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \qquad (8.137)$$

Формулы (8.137) *дают решение поставленной задачи, как мы видам, единственное.* Мы нашли связность без кручения, сохраняющую скалярное произведение любых двух параллельно переносимых векторов; оказалось, что она будет только одна.

Ранее полученную формулу (7.66) по внешности совершенно такую же, как формула (8.137), нужно рассматривать как частный случай последней. Действительно, формула (7.66), решает *для евклидова информационного пространства* по существу ту же самую задачу, которую мы решили сейчас для более общего случая *риманова информационного пространства.*

Может показаться, что нужно проверить, образуют ли Γ^k_{ij}, найденные в различных координатных системах x^i, один и тот же объект связности, т. е. удовлетворяют ли они закону преобразования (8.69). Однако это можно утверждать и без проверки. Действительно, в силу *инвариантного* характера требований 1°, 2° безразлично, в каких координатах x^i искать нашу связность; она будет получаться всегда одной и той же. Но это и означает, что Γ^k_{ij}, вычисленные в любых координатах, образуют один и тот же объект связности. Конечно, это можно проверить и непосредственной выкладкой, исходя из (8.137) и пользуясь законом преобразования метрического тензора g_{ij}.

Полученную связность в римановом информационном пространстве мы будем называть *римановой связностью*. В дальнейшем будем всегда считать, что риманово информационное пространство снабжено этой связностью.

В заключение покажем геометрический смысл нашего параллельного перенесения в том случае, когда риманово информационное пространство V_m реализовано в виде поверхности в евклидовом информационное пространстве R_n;

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^1, \ldots, u^m) \qquad (8.138)$$

(см. (8.22)). Разложим вторые частные производные $\mathbf{x}_{\alpha\beta}=\dfrac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ на составляющие по касательной плоскости A_m (т. е. по ее направляющим векторам $\mathbf{x}_\alpha=\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}$) и по нормальной плоскости B_{n-m}:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}=\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\delta+\mathbf{y}_{\alpha\beta}, \qquad (8.139)$$

где $\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}$ — некоторые коэффициенты разложения, очевидно, симметричные по нижним индексам, а $\mathbf{y}_{\alpha\beta}$ — вектор в B_{n-m}, так что

$$\mathbf{y}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\gamma=0. \qquad (8.140)$$

Покажем, что $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *совпадают с коэффициентами связности* $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *в римановом информационном пространстве* V_m. Умножая для этого (8.139) на $\mathbf{x}_\nu$ скалярно и учитывая (8.140), получаем:

$$\mathbf{x}_\gamma\mathbf{x}_{\alpha\beta}=\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\delta\mathbf{x}_\gamma.$$

Так как согласно (8.27)

$$\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta=G_{\alpha\beta}, \qquad (8.141)$$

то

$$\mathbf{x}_\gamma\mathbf{x}_{\alpha\beta}=G_{\gamma\delta}\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}=\tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}, \qquad (8.142)$$

где $\tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}$ обозначает результат опускания индекса.

Дифференцируя (8.141) по u^γ, получаем:

$$\mathbf{x}_{\alpha\gamma}\mathbf{x}_\beta+\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_{\beta\gamma}=\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma},$$

т. е.

$$\tilde{\Gamma}_{\beta,\gamma\alpha}+\tilde{\Gamma}_{\alpha,\gamma\beta}=\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}. \qquad (8.143)$$

Эти уравнения в применении к V_m совпадают с уравнениями (8.135), а следовательно, $\tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}$ совпадают с $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$. Отсюда, поднимая первый индекс, убеждаемся и в совпадении $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ с $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$. *Окончательно разложение* (8.139) *принимает вид*

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_{\delta} + \mathbf{y}_{\alpha\beta}. \tag{8.144}$$

Здесь принципиально важно, что коэффициенты $\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ вполне определяются из римановой метрики $G_{\alpha\beta}$ на поверхности V_m вне зависимости от способа ее вложения в R_n.

Пусть теперь на поверхности V_m задана кривая

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(t),$$

а вдоль этой кривой мы строим поле вектора $\xi(t)$, касательного к V_m. Тем самым согласно (8.24) имеет место разложение

$$\xi(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^{\alpha}}\xi^{\alpha}(t) = \mathbf{x}_{\alpha}\xi^{\alpha}(t), \tag{8.145}$$

где $\xi^{\alpha}(t)$ — координаты вектора ξ в информационном многообразии V_m. Рассмотрим дифференциал вектора ξ при бесконечно малом смещении по кривой:

$$d\xi = d\mathbf{x}_{\alpha}\xi^{\alpha} + \mathbf{x}_{\alpha}d\xi^{\alpha} = \mathbf{x}_{\alpha\beta}du^{\beta}\xi^{\alpha} + \mathbf{x}_{\alpha}d\xi^{\alpha}.$$

В последнем члене заменяем обозначение индекса суммирования на δ, а $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$ выражаем согласно (8.144). Получим:

$$d\xi = (\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\, du^{\beta}\xi^{\alpha} + d\xi^{\delta})\,\mathbf{x}_{\delta} + \mathbf{y}_{\alpha\beta}\, du^{\beta}\xi^{\alpha}. \tag{8.146}$$

Мы хотим, чтобы вектор $\xi(t)$ при переходе от точки t к точке $t+dt$ по нашей кривой *изменялся возможно наименьшим образом.* Мы не можем требовать, чтобы он совсем не менялся, так как касательная плоскость A_m к V_m, в которой он расположен, вообще говоря, поворачивается при переходе от точки к точке. Если ξ в точке t задан, то при переходе в точку $t+dt$ мы можем распоряжаться лишь значениями $d\xi^{\delta}$. При этом мы можем уничтожить в разложении (8.146) первый член, направленный по касательной плоскости A_m в точке t, если положим:

$$\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\, du^{\beta}\xi^{\alpha} + d\xi^{\delta} = 0, \text{ т. е. } d\xi^{\delta} = -\Gamma^{\delta}_{\beta\alpha}\xi^{\alpha}\, du^{\beta}. \tag{8.147}$$

Мы заменили здесь $\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ через $\Gamma^{\delta}_{\beta\alpha}$ по свойству римановой связности. Что же касается второго члена, направленного по нормальной плоскости B_{n-m}, то мы не в состоянии его как-либо варьировать, так как он $d\xi^{\delta}$ не содержит. Поэтому наилучшего возможного результата в смысле малости $d\xi$ мы добиваемся, уничтожая его касательную составляющую, т. е. перенося вектор ξ из точки t в точку $t+dt$ согласно (8.147). Но это есть параллельное перенесение согласно римановой связности на V_m.

Таким образом, параллельное перенесение вектора ξ в римановом информационном пространстве V_m при вложении V_m в R_n в качестве *поверхности получает следующее геометрическое истолкование: с точки зрения объемлющего пространства R_n вектор ξ переносится так, чтобы касательная составляющая $d\xi$ все время была равна нулю,* т. *е. чтобы $d\xi$ был нормален к* V_m, $d\xi \perp A_m$. Как мы только что видели, для вектора ξ, касательного к поверхности V_m, этот способ перенесения есть наилучшее приближение к идеальному случаю, когда переносимый вектор просто не меняется. Тем самым введенное нами параллельное перенесение в римановом пространстве получает дополнительное геометрическое обоснование.

Как побочный результат получается следующая теорема. При любом способе вложения данного V_m в R_n перенесение касательного вектора ξ по полученной поверхности с соблюдением условия $d\xi \perp A_m$ всегда имеет один и тот же смысл, так как совпадает с параллельным перенесением согласно римановой связности на V_m.

В пространстве аффинной связности L_n, в частности, в римановом информационном пространстве V_n, естественным путем возникает аппарат *абсолютного дифференцирования.* Смысл его заключается в следующем. Желая исследовать какое-нибудь тензорное поле, например, U^{ij}_{klm} (M), в бесконечно малой окрестности данной точки M, мы рассматриваем, как обычно, полные дифференциалы dU^{ij}_{klm} функций U^{ij}_{klm} $(x^1, ..., x^n)$. Однако эти дифференциалы уже не образуют тензора и преобразуются по более сложному закону с участием самих U^{ij}_{klm}. Это мешает выявлению инвариантных результатов и не позволяет пользоваться аппаратом тензорной алгебры. Делу можно помочь тем, что, прежде чем вычислять дифференциалы dU^{ij}_{klm}, мы параллельно переносим тензор поля U^{ij}_{klm} *(M') из бесконечно близкой точки M' в данную точку M* и уже после этого вычитаем из него тензор U^{ij}_{klm} в данной точке. Главная линейная часть полученной разности и будет *абсолютным дифференциалом* DU^{ij}_{klm} тензора U^{ij}_{klm}. Это будет снова тензор того же строения, как и U^{ij}_{klm}. Что касается параллельного перенесения тензоров, то оно легко определяется на основе параллельного перенесения векторов, как будет показано ниже. Тензорная алгебра, дополненная аппаратом абсолютного дифференцирования, образует *тензорный анализ.*

8.9. Параллельное перенесение тензоров в L_n

Пусть информационное пространство аффинной связности L_n отнесено к координатной системе x^i, и пусть в некоторой точке M задан тензор, например, U^{ij}_{lm}. Мы знаем, что координаты этого тензора относительно координатной системы x^i можно рассматривать в то же время и как его координаты относительно локального репера $\{M, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в касательном пространстве A_n *в* точке M.

Зададимся в A_n аффинным репером $\{M, \xi_1, \dots, \xi_n\}$, где $\xi_1, \dots, \xi_n$ суть n произвольных линейно независимых векторов. Если координаты вектора $\boldsymbol{\xi}_k$ обозначить ξ^i_k, то, очевидно,

$$\boldsymbol{\xi}_k = \xi^i_k \mathbf{e}_i, \tag{8.148}$$

так как координаты вектора $\boldsymbol{\xi}_k$ в координатной системе x^i суть в то же время его координаты относительно соответствующего локального репера.

Вообще при переходе от одного аффинного репера к другому тензор U^{ij}_{lm} преобразуется по закону

$$U^{i'j'}_{l'm'} = A^{i'}_i A^{j'}_j A^l_{l'} A^m_{m'} U^{ij}_{lm}, \tag{8.149}$$

причем

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i. \tag{8.150}$$

Мы хотим в записи закона преобразования ограничиться лишь матрицей $A^i_{i'}$, и не прибегать к обратной матрице $A^{i'}_i$. Для этого умножаем соотношение (8.149) почленно на $A^{i'}_p A^{j'}_q$ и производим суммирование по i', j'. В правой части получим:

$$A^p_{i'} A^{i'}_i = \delta^p_i, \quad A^q_{j'} A^{j'}_j = \delta^q_j,$$

так что

$$A^p_{i'} A^q_{j'} U^{i'j'}_{l'm'} = \delta^p_i \delta^q_j A^l_{l'} A^m_{m'} U^{ij}_{lm} = A^l_{l'} A^m_{m'} U^{pq}_{lm};$$

и окончательно, меняя для симметрии обозначения индексов суммирования i', j' на p', q', получим:

$$A^p_{p'} A^q_{q'} U^{p'q'}_{l'm'} = A^l_{l'} A^m_{m'} U^{pq}_{lm}. \tag{8.151}$$

В результате закон преобразования (8.149) записан с участием лишь одной матрицы $A^i_{i'}$, зато в виде, не разрешенном ни относительно старых, ни относительно новых координат тензора. Ясно, что, обратно, соотношения (8.151) влекут за собой (8.149); чтобы убедиться в этом, достаточно умножить (8.151) почленно на $A^{i'}_p A^{j'}_q$ и произвести в левой части свертывание по p, q.

Для примера мы взяли тензор, два раза ковариантный и два раза контравариантный; но запись (8.151) применяется очевидным образом и для тензора произвольного строения: в левой части пишется по одному множителю вида $A^i_{i'}$ для каждого верхнего, а в правой — для каждого нижнего индекса.

Возвращаясь к нашей задаче, обозначим через $\tilde{U}^{pq}_{rs}$ координаты тензора U^{ij}_{lm} относительно репера { M, ξ_1, ..., ξ_n }. Когда мы переходим к этому реперу от локального репера {M, $\mathbf{e}_1$, . .. , $\mathbf{e}_n$} согласно (8.148), роль матрицы $A^i_{i'}$, играет матрица ξ^i_k. Поэтому закон преобразования (8.151) принимает вид

$$\xi^i_p\xi^j_q\tilde{U}^{pq}_{rs} = \xi^l_r\xi^m_s U^{ij}_{lm}. \tag{8.152}$$

Так связаны координаты тензора U^{ij}_{lm} в координатной системе x^i с его координатами $\tilde{U}^{pq}_{rs}$ относительно произвольного репера {M, ξ_1, ..., ξ_n} в касательном пространстве A_n.

Допустим теперь, что векторы этого репера параллельно переносятся, в то время как точка M описывает некоторый путь в L_n. Мы будем говорить, что тензор U^{ij}_{lm} параллельно переносится вдоль данного пути, если он задается в каждой точке этого пути и притом так, что его координаты $\tilde{U}^{ij}_{lm}$ относительно параллельно переносимого репера сохраняют постоянные значения:

$$\tilde{U}^{pq}_{rs} = \text{const}. \tag{8.153}$$

Это определение параллельного перенесения тензора не зависит от выбора параллельно переносимого репера {M, ξ_1, ..., ξ_n}. В самом деле, пусть {M, $\xi_{1'}$, ..., $\xi_{n'}$} — другой репер, параллельно переносимый вдоль того же пути в L_n. Разлагая векторы ξ_i по векторам

$$\xi_{i'} = A^i_{i'}\xi_i,$$

мы замечаем, что $A^i_{i'}$ остаются постоянными, так как в процессе параллельного перенесения линейные зависимости между векторами сохраняются. Поэтому, записывая закон преобразования (8.149), убеждаемся, что $\tilde{U}^{p'q'}_{r's'}$ остаются постоянными вместе с $\tilde{U}^{pq}_{rs}$ и $A^i_{i'}$, т. е. наш тензор имеет постоянные (хотя и различные) координаты относительно *любого* параллельно переносимого вдоль данного пути репера.

Таким образом, определенное нами параллельное перенесение тензора совершается вдоль данного пути строго единственным образом. В частности, если в данной точке тензор был равен нулю, то в результате параллельного перенесения он остается равным нулю.

Теперь выясним, как записать закон параллельного перенесения тензора, заданного своими координатами U^{ij}_{lm} *относительно координатной системы x^i*. Для этой цели дифференцируем почленно соотношение (8.152) вдоль рассматриваемого пути, учитывая постоянство $\tilde{U}^{pq}_{rs}$. Получим:

$$d\xi^i_p\xi^j_q\tilde{U}^{pq}_{rs}+\xi^i_p\,d\xi^j_q\,\tilde{U}^{pq}_{rs}=d\xi^l_r\xi^m_s U^{ij}_{lm}+\xi^l_r\,d\xi^m_s U^{ij}_{lm}+\xi^l_r\xi^m_s\,dU^{ij}_{lm}. \qquad (8.154)$$

Так как все векторы репера переносятся параллельно, то

$$d\xi^i_p=-\Gamma^i_{kt}\xi^t_p\,dx^k. \qquad (8.155)$$

Прежде чем вставлять это выражение для $d\xi^i_p$ в предыдущую формулу, можно сделать предположение, сильно упрощающее выкладку. Предположим, что параллельно переносимый репер $\{M,\ \xi_1,\ ...,\ \xi_n\}$ выбран так, что *в той точке пути,* в которой в данный момент производится дифференцирование, он совпадает с локальным репером $\{M,\ \mathbf{e}_1,\ ...\ ,\ \mathbf{e}_n\}$. Мы знаем, что на параллельном перенесении тензора это не отразится. Тогда *в данной точке в силу совпадения реперов* мы имеем $\tilde{U}^{ij}_{rs}=U^{ij}_{rs}$; кроме того, как видно из (8.148), $\xi^i_k=\delta^i_k$, и (8.155) принимает вид

$$d\xi^i_p=-\Gamma^i_{kp}\,dx^k. \qquad (8.156)$$

Аналогичные упрощения за счет $\xi^i_k=\delta^i_k$, произойдут и в (8.154), так что (учитывая $\tilde{U}^{ij}_{rs}=U^{ij}_{rs}$) получим:

$$d\xi^i_p\ U^{pj}_{rs}+d\xi^j_q U^{iq}_{rs}=d\xi^l_r U^{ij}_{ls}+d\xi^m_s U^{ij}_{rm}+dU^{ij}_{rs}.$$

Заменяем здесь $d\xi^i_p$ и т. д. согласно (8.156). Это дает нам

$$-\Gamma^i_{kp}\,dx^k U^{pj}_{rs}-\Gamma^j_{kq}\,dx^k U^{iq}_{rs}=-\Gamma^l_{kr}\,dx^k U^{ij}_{ls}-\Gamma^m_{ks}\,dx^k U^{ij}_{rm}+dU^{ij}_{rs}.$$

Выражая отсюда U^{ij}_{rs}, вынося dx^k за скобку и обозначая все индексы суммирования (кроме k) через p, получим окончательно:

$$dU^{ij}_{rs}=\{-\Gamma^i_{kp}U^{pj}_{rs}-\Gamma^j_{kp}U^{ip}_{rs}+\Gamma^p_{kr}U^{ij}_{ps}+\Gamma^p_{ks}U^{ij}_{rp}\}\,dx^k. \qquad (85.157)$$

Мы получили дифференциалы координат параллельно переносимого вдоль данного пути тензора U^{ij}_{rs}, выраженные через сами координаты этого тензора и, конечно, через дифференциалы координат точки и объект связности. Координаты тензора берутся теперь относительно лишь координатной системы x^i (т. е. локального репера); параллельно переносимый репер сыграл свою роль и больше ни в чем не участвует.

Запутанность полученной формулы лишь кажущаяся; в действительности она составлена строго закономерно и по простой схеме. А именно, каждому верхнему индексу тензора (например, *i)* в правой части формулы отвечает определенный член (в данном случае первый), составленный следующим образом: данный индекс переходит на объект связности, причем на освободившееся место ставится индекс суммирования (в данном случае *p),* который свертывается со вторым индексом внизу у объекта связности. Остальные индексы у тензора переписываются без изменения. Первый индекс у объекта связности (в нашем случае *k*) всегда свертывается с дифференциалами координат точки. Все выражение берется с обратным знаком. В нашем примере тензор имеет два верхних индекса, и в правой части формулы мы получаем два отвечающих им по этому правилу члена. Но весь проделанный нами вывод дословно повторяется и для тензора с любым числом индексов наверху, причем в правой части формулы появляются составленные по указанному правилу члены по одному для каждого индекса.

Для каждого нижнего индекса (например, *r)* в правой части формулы также имеется соответствующий член (в данном случае третий), составленный по несколько иному правилу. Данный индекс переходит на объект связности на вторoе место внизу; на освободившееся место ставится индекс суммирования (в нашем случае *p),* который свертывается с верхним индексом объекта связности. Остальные индексы у тензора переписываются без изменения. Первый индекс у объекта связности по-прежнему свертывается с дифференциалами координат точки. Все выражение берется со своим знаком. В нашем случае мы имеем в правой части два члена такого типа соответственно двум нижним индексам. Но весь вывод повторяется и при любом числе нижних индексов. Поэтому на (8.157) нужно смотреть как на схему записи дифференциалов координат любого параллельно переносимого тензора.

Эта схема станет более отчетливой, если выделить два основных случая: когда параллельно переносимый тензор один раз контравариантный *(U^i)* и когда он один раз ковариантный *(U_r).* В первом случае в правой части формулы (8.157) мы помещаем лишь один член, отвечающий индексу *i:*

$$dU^i = -\Gamma^i_{kp} U^p \, dx^k. \tag{8.158}$$

Мы, как и следовало ожидать, вернулись к формуле параллельного перенесения вектора U^i.

Во втором случае в правой части формулы (8.157) нужно поместить лишь один член, отвечающий нижнему индексу *r;*

$$dU_r = \Gamma^p_{kr} U_p \, dx^k. \tag{8.159}$$

Такова формула параллельного перенесения один раз ковариантного тензора (ковектора). Если теперь вернуться к общей схеме (8.157), то можно сказать, что *для каждого верхнего индекса параллельно переносимого тензора в правой части формулы составляется член согласно* (8.158), *а для каждого нижнего индекса — согласно* (8.159), *в обоих случаях так, как если бы данный индекс был единственным; при этом нужно лишь приписывать каждый раз остальные индексы без каких-либо изменений по сравнению с левой частью.*

Таким образом, в общем случае формула (8.157) будет иметь вид

$$dU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} = \{-\Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \\ - \Gamma^{i_2}_{kp} U^{i_1 p \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \ldots - \Gamma^{i_u}_{kp} U^{i_1 i_2 \ldots p}_{r_1 r_2 \ldots r_v} + \Gamma^{p}_{k r_1} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{p r_2 \ldots r_v} + \\ + \Gamma^{p}_{k r_2} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 p \ldots r_v} + \ldots + \Gamma^{p}_{k r_v} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots p}\} dx^k. \quad (8.160)$$

В частности, когда тензор лишен индексов, т. е. представляет собой просто инвариант U, в правой части не будет ни одного члена, и формула принимает вид

$$dU=0,$$

т. е.

$$U=\text{const}.$$

Параллельное перенесение инварианта, как и следовало ожидать, сохраняет его численное значение.

8.10. Абсолютный дифференциал и абсолютная производная

Пусть точка M в пространстве аффинной связности L_n пробегает некоторый путь

$$x^i=x^i(t), \quad (8.161)$$

причем в каждой точке этого пути задан тензор определенного строения, например U^{ij}_{rs}:

$$U^{ij}_{rs} = U^{ij}_{rs}(t). \quad (8.162)$$

Другими словами, нам задано тензорное поле, по крайней мере, вдоль данного пути. Как обычно, функциональные зависимости предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Переходя из данной точки пути t в его бесконечно близкую точку $t+dt$, мы находим в ней тензор поля с координатами

$$U^{ij}_{rs}(t+dt) \approx U^{ij}_{rs}(t) + dU^{ij}_{rs}(t). \quad (8.163)$$

Здесь мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка относительно dt, заменив приращения функций $U^{ij}_{rs}(t)$ их дифференциалами. С той же степенью точности мы будем вести выкладку и далее. Однако, желая оценить, насколько изменился тензор поля $U^{ij}_{rs}(t)$ при переходе из точки t в точку $t+dt$, мы не должны ориентироваться на дифференциалы его координат $dU^{ij}_{rs}(t)$.

В самом деле, U^{ij}_{rs} и $U^{ij}_{rs}+dU^{ij}_{rs}$ — это тензоры, заданные *в разных точках, именно в точках t и $t+dt$,* а значит, отнесенные к *разным локальным реперам.* При преобразовании координатной системы x^i эти локальные реперы испытывают преобразование вида (7.85):

$$\mathbf{e}_{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_i,$$

где матрицы $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ *вычислены в разных точках и, следовательно, являются различными.* Поэтому не имеет смысла сравнивать между собой тензоры $U^{ij}_{rs}(t)$ и $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, отнесенные к различным и различно преобразующимся реперам. Другое дело, если мы предварительно перенесем параллельно тензор $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ в ту же точку t, в которой задан тензор $U^{ij}_{rs}(t)$. Тогда оба тензора будут заданы в общей точке t, а значит, отнесены к общему локальному реперу. Вычитание из первого тензора второго будет иметь инвариантный смысл и даст нам снова тензор в точке t. Главную линейную часть этого тензора мы и назовем *абсолютным дифференциалом* $DU^{ij}_{rs}(t)$ тензора $U^{ij}_{rs}(t)$. Проделаем соответствующие выкладки.

Обозначим через $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ тензор $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, параллельно перенесенный из точки $t+dt$ в точку t. Это значит, что, обратно, $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ получается параллельным перенесением $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ из точки t в точку $t+dt$. Пользуясь формулой (8.157), можно записать:

$$U^{ij}_{rs}(t+dt)\approx$$

$$\approx\tilde{U}^{ij}_{rs}+\{-\Gamma^{i}_{kp}\tilde{U}^{pj}_{rs}-\Gamma^{j}_{kp}\tilde{U}^{ip}_{rs}+\Gamma^{p}_{kr}\tilde{U}^{ij}_{ps}+\Gamma^{p}_{ks}\tilde{U}^{ij}_{rp}\}\,dx^k. \tag{8.164}$$

Мы поставили знак приближенного равенства, так как формула (8.157) дает нам лишь дифференциалы, а не приращения координат параллельно переносимого тензора, так что в равенстве допускается ошибка на бесконечно малые высшего порядка.

Как видно из (8.164), $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ отличается от $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, а следовательно, и от $U^{ij}_{rs}(t)$, на бесконечно малую величину. Поэтому с принятой степенью точности можно заменить в фигурной скобке $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ через $U^{ij}_{rs}(t)$. Действительно, фигурные скобки множатся еще на dx^k, так что ошибка получается бесконечно малой высшего порядка. По той же причине можно заменить U^{ij}_{rs} $(t+dt)$ через U^{ij}_{rs} (t) + dU^{ij}_{rs} (t). Выражая теперь $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ из (8.164), получаем

$$\tilde{U}^{ij}_{rs} \approx U^{ij}_{rs}(t) + dU^{ij}_{rs}(t) + \\ + \{\Gamma^{i}_{kp}U^{pj}_{rs}(t) + \Gamma^{j}_{kp}U^{ip}_{rs}(t) - \Gamma^{p}_{kr}U^{ij}_{ps}(t) - \Gamma^{p}_{ks}U^{ij}_{rp}(t)\}\, dx^k. \tag{8.165}$$

Мы называем абсолютным (ковариантным) дифференциалом DU^{ij}_{rs} (t) главную линейную часть разности $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ — U^{ij}_{rs} (t) между тензором U^{ij}_{rs} $(t+dt)$, параллельно перенесенным из точки $t+dt$ в точку t, и тензором U^{ij}_{rs} (t).

Очевидно, DU^{ij}_{rs} совпадает с тем выражением, которое в правой части (8.165) добавляется к $U^{ij}_{rs}(t)$. Действительно, из (8.165) видно, что это выражение лишь на бесконечно малую высшего порядка отличается от разности $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ — U^{ij}_{rs} (t) (т. е. составляет главную часть этой разности) и в то же время линейно зависит от dt (вместе с $dU^{ij}_{rs}(t)$ и $dx^k(t)$). Итак,

$$DU^{ij}_{rs}(t) = dU^{ij}_{rs}(t) + \\ + \{\Gamma^{i}_{kp}U^{pj}_{rs}(t) + \Gamma^{j}_{kp}U^{ip}_{rs}(t) - \Gamma^{p}_{kr}U^{ij}_{ps}(t) - \Gamma^{p}_{ks}U^{ij}_{rp}(t)\}\, dx^k. \tag{8.166}$$

Совершенно аналогично мы приходим к формуле абсолютного дифференциала и в случае самого общего тензора:

$$DU^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v} = dU^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v} + \{\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v} + \\ + \Gamma^{i_2}_{kp}U^{i_1p\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v} + \ldots + \Gamma^{i_u}_{kp}U^{i_1i_2\ldots p}_{r_1r_2\ldots r_v} - \Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v} - \\ - \Gamma^{p}_{kr_2}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1p\ldots r_v} - \ldots - \Gamma^{p}_{kr_v}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots p}\}\, dx^k. \tag{8.167}$$

Здесь $U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}$ — тензорное поле, заданное, по крайней мере, вдоль рассматриваемого пути. При выводе нужно воспользоваться вместо формулы параллельного пересечения (8.157) общей формулой (8.160).

Таким образом, абсолютный дифференциал тензора (тоже тензор) имеет координаты, которые вычисляются следующим образом: берутся дифференциалы координат данного тензора и к ним приписываются дополнительные члены с участием объекта связности, по одному для каждого индекса тензора. Закон составления этих членов ясен из формулы (8.167).

Он был описан словесно в предыдущем пункте в связи с формулой параллельного перенесения тензора. Это описание вполне применимо и теперь, лишь с изменением знаков всех членов на обратные.

В частном случае, когда тензор U лишен индексов и является просто инвариантом, так что вдоль пути задано скалярное поле $U(t)$, дополнительные члены в (8.167) отсутствуют, и абсолютный дифференциал совпадает с обыкновенным:

$$DU(t) = dU(t). \qquad (8.168)$$

Для тензора, один раз контравариантного, формула (8.167) принимает вид

$$DU^i(t) = dU^i(t) + \Gamma^i_{kp}U^p(t)dx^k. \qquad (8.169)$$

Аналогичным образом для тензора, один раз ковариантного:

$$DU_r(t) = dU_r(t) - \Gamma^p_{kr}U_p(t)dx^k. \qquad (8.170)$$

Можно сказать, что в общем случае формулы (8.167) для каждого верхнего индекса составляется дополнительный член по образцу (8.169) и для каждого нижнего — по образцу (8.170), причем каждый раз все остальные индексы тензора переписываются без изменений.

Параллельное перенесение векторов, а следовательно, и тензоров, имеющее место в пространстве аффинной связности L_n, обладает инвариантностью относительно выбора координатной системы. Поэтому наше построение абсолютного дифференциала $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$, проведенное с помощью параллельного перенесения тензоров, также обладает инвариантностью, т. е. приводит всегда к одному и тому же тензору, независимо от той координатной системы x^i, в которой проводились выкладки.

Но можно проверить этот факт и прямым подсчетом, исходя непосредственно из формулы (8.167).

Мы хотим, показать, что величины $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$, *составленные по формуле* (8.167), *преобразуются по тензорному закону при переходе от координатной системы* x^i *к* $x^{i'}$.

Для этой цели запишем закон преобразования тензора $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$:

$$U^{i_1 i_2\ldots i_u}_{r_1 r_2\ldots r_v} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}\cdots\frac{\partial x^{i_u}}{\partial x^{i'_u}}\frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}\frac{\partial x^{r'_2}}{\partial x^{r_2}}\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}U^{i'_1 i'_2\ldots i'_u}_{r'_1 r'_2\ldots r'_v}. \qquad (8.171)$$

Мы пишем закон преобразования для перехода от штрихованных координат к нештрихованным, что ничего не меняет по существу, а для выкладки будет удобнее.

Составим теперь $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ по формуле (8.167), причем вычисляем дифференциал $dU^{i_1 i_2\ldots i_u}_{r_1 r_2\ldots r_v}$, используя выражение (8.171).

Все полученные при этом члены разобьем на три группы. Во-первых, запишем член, полученный при дифференцировании множителя $U^{i'_1 i'_2\ldots i'_u}_{r'_1 r'_2\ldots r'_v}$ в (8.171):

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} dU^{i'_1 \dots i'_u}_{r'_1 \dots r'_v}. \qquad (8.172)$$

Во-вторых, для каждою верхнего индекса, например, i_1, мы выделяем член, полученный дифференцированием соответствующего множителя в (8.171), в данном случае $\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$, причем этот член объединяем с дополнительным членом в (8.167), отвечающим этому же индексу. Получим для i_1:

$$\left(d\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\right)\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} U^{i'_1 \dots i'_u}_{r'_1 \dots r'_v} + \Gamma^{i_1}_{kp} U^{p \dots i_u}_{r_1 \dots r_v} dx^k \qquad (8.173)$$

и аналогично для каждого верхнего индекса.

В-третьих, поступая совершенно так же и с нижними индексами, получаем, например, для r_1, выражение

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \left(d\frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}\right) \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} U^{i'_1 \dots i'_u}_{r'_1 \dots r'_v} - \Gamma^{p}_{kr_1} U^{i_1 \dots i_u}_{p \dots r_v} \qquad (8.174)$$

и аналогично для каждого нижнего индекса. Очевидно, выражение (8.172), сложенное с выражениями (8.173) для всех верхних индексов и с выражениями (8.174) для всех нижних индексов, дает нам $DU^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$. Теперь мы должны заняться преобразованием выражений (8.173) и (8.174), *пользуясь законом преобразования* $Г^k_{ij}$. В этом и будет заключаться принципиальная часть нашей выкладки.

Перепишем (8.173), заменяя в первом члене $d\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$ через $\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}\partial x^{k'}} dx^{k'}$, а во втором члене dx^k через $\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx^{k'}$.

Кроме того, заменяем $U^{p \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$ по формуле (8.171), причем индекс суммирования в первом множителе обозначаем p'. Получим:

$$\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \left(\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{p'}\partial x^{k'}} + \Gamma^{i_1}_{kp}\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right) U^{p' \dots i'_u}_{r'_1 \dots r'_v} dx^{k'}.$$

Пользуясь теперь законом преобразования $Г^k_{ij}$ в виде (8.75), мы заменяем скобку выражением $\Gamma^{i'_1}_{p'k'}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$, и окончательно (8.173) принимает вид

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \Gamma^{i'_1}_{p'k'} U^{p' \ldots i'_u}_{r'_1 \ldots r'_v} dx^{k'}.$$

(8.175)

Аналогичным образом преобразуем выражение (8.174), заменяя $d\frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}$ через $\frac{\partial^2 x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}\partial x^k} dx^k$, обозначая индекс суммирования r' через p' и выражая $U^{i_1 \ldots i_u}_{p \ldots r_v}$ согласно (8.171). Получим:

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_u}}{\partial x^{i'_u}} \frac{\partial x^{r'_2}}{\partial x^{r_2}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \left(\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^{r_1}\partial x^k} - \Gamma^p_{kr_1} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} \right) U^{i'_1 \ldots i'_u}_{p' \ldots r'_v} dx^k.$$

Множители перед скобкой те же, что и в (8.171), с пропуском лишь $\frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}$. Пользуясь законом преобразования Γ^k_{ij} в форме (8.76), мы можем заменить скобку через $-\Gamma^{p'}_{k'r'_1} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}$, после чего получаем окончательно:

$$-\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \Gamma^{p'}_{k'r'_1} U^{i'_1 \ldots i'_u}_{p' \ldots r'_v} dx^{k'}.$$

(8.176)

Здесь $dx^{k'}$ появился в результате объединения множителей dx^k и $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ с последующим суммированием по k. Множители перед $\Gamma^{p'}_{k'r'_1}$ теперь те же, что и в (8.171), так как имевшийся пробел заполнен множителем $\frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}$.

По самому ходу нашей выкладки выражение (8.172), выражения (8.175) для каждого верхнего индекса и выражения (8.176) для каждого нижнего индекса дают те слагаемые, на которые распался $DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$.

С другой стороны, вынося за скобки общие во всех этих выражениях множители $\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}$, мы получаем в скобках $DU^{i'_1 \ldots i'_u}_{r'_1 \ldots r'_v}$, составленный в точности по формуле (8.167) (только все индексы штрихованные). В результате

$$DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} DU^{i'_1 \ldots i'_u}_{r'_1 \ldots r'_v}. \qquad (8.177)$$

Это значит, что тензорный закон преобразования (8.171) в точности переносится и на абсолютный дифференциал рассматриваемого тензора. *Абсолютный дифференциал тензора представляет собой, таким образом, тензор того же строения.*

Мы рассматривали до сих пор тензорное поле, заданное вдоль некоторого пути, и абсолютный дифференциал $DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_t}$ брали вдоль этого пути. Если тензорное поле задано во всем пространстве или, по крайней мере, в некоторой *n*-мерной его области, то абсолютный дифференциал тензора можно брать вдоль любого пути в этой области. При этом, так как координаты тензора в данной координатной системе будут функциями точки

$$U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}(x^1, \ \ldots, \ x^n), \qquad (8.178)$$

то

$$dU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = \frac{\partial U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}}{\partial x^k} dx^k \qquad (8.179)$$

и основная формула (8.167) принимает вид

$$DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = \nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} dx^k, \qquad (8.180)$$

где через $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ обозначены коэффициенты при dx^k в правой части (8.167) после подстановки туда $dU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ из (8.179):

$$\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = \frac{\partial}{\partial x^k} U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + \Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} + \ldots + \Gamma^{i_u}_{kp} U^{i_1 i_2 \ldots p}_{r_1 r_2 \ldots r_v} -$$
$$- \Gamma^{p}_{k r_1} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{p r_2 \ldots r_v} - \ldots - \Gamma^{p}_{k r_v} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots p}. \qquad (8.181)$$

Эти коэффициенты образуют тензор, имеющий один дополнительный ковариантный индекс сравнительно с тензором $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ (индекс дифференцирования *k).* В самом деле, вставим в (8.177) разложение абсолютного дифференциала (8.180)) как в старой, так и в новой координатной системе. Получим:

$$\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} dx^k = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \nabla_{k'} U^{i'_1 \ldots i'_u}_{r'_1 \ldots r'_v} dx^{k'}.$$

Вставим в правую часть $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} dx^k$ вместо $dx^{k'}$ и сравним коэффициенты при dx^k в левой и правой частях. Так как dx^k сейчас у нас произвольны, то равенство должно удовлетворяться тождественно относительно dx^k, и эти коэффициенты должны быть равны. Получаем:

$$\nabla_k U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \nabla_{k'} U^{i'_1 \dots i'_u}_{r'_1 \dots r'_v} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}. \tag{8.182}$$

Легко заметить, что для $\nabla_k U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$ имеет место тензорный закон преобразования при контравариантных индексах $i_1, \dots, i_u$ и ковариантных индексах $k, r_1, \dots, r_v$. Тензор $\nabla_k U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$ называется *абсолютной (или ковариантной) производной* тензора $U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$. Мы иногда будем называть *абсолютными производными* и отдельные координаты тензора $\nabla_k U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$. Очевидно, абсолютные производные тензора $U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$ играют по отношению к его абсолютному дифференциалу ту же роль, как обыкновенные частные производные по отношению к обыкновенному полному дифференциалу.

Рассмотрим частные случаи. Если нам дано скалярное поле $U(x^1, \dots, x^n)$ (тензор лишен индексов), то в (8.181) дополнительные члены отсутствуют, и мы получаем абсолютную производную

$$\nabla_k U = \frac{\partial U}{\partial x^k}. \tag{8.183}$$

Легко проверить и непосредственно, что $\frac{\partial U}{\partial x^k}$ образуют один раз ковариантный тензор. Такой тензор мы будем называть *градиентом скалярного поля U*.

Далее, пусть дано поле один раз контравариантного тензора U^i. Тогда

$$\nabla_k U^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} U^p, \tag{8.184}$$

абсолютная производная представляет собой тензор, один раз ковариантный и один раз контравариантный.

Наконец, пусть дано поле одноковариантпого тензора U_r. Тогда

$$\nabla_k U_r = \frac{\partial U_r}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kr} U_p. \tag{8.185}$$

Мы получаем два раза ковариантный тензор. Если тензор U_r — градиент, $U_r = \nabla_r U = \frac{\partial U}{\partial x^r}$, то получаем:

$$\nabla_k \nabla_r U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^k \partial x^r} - \Gamma^p_{kr} \frac{\partial U}{\partial x^p}. \tag{8.186}$$

Если пространство аффинной связности L_n является просто аффинным пространством A_n (в частности, евклидовым пространством R_n), то *в аффинной координатной системе* все $\Gamma^k_{ij} = 0$, дополнительные члены в формулах (8.167), (8.181) пропадают, и мы имеем:

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}, \tag{8.187}$$

$$\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = \frac{\partial}{\partial x^k} U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}. \tag{8.188}$$

Другими слонами, абсолютный дифференциал тензора совпадает с обыкновенным дифференциалом, а абсолютные производные — с обыкновенными частными производными. В частности, пусть нам задано вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ поле тензора $\xi^i(t)$, а следовательно, и векторное поле $\boldsymbol{\xi}(t) = \xi^i(t)\, \mathbf{e}_i$. Тогда абсолютный дифференциал $D\xi^i$ отвечает вектору

$$D\xi^i(t)\, \mathrm{e}_i = d\xi^i(t)\, \mathrm{e}_i = d(\xi^i(t)\, \mathrm{e}_i) = d\xi(t).$$

Таким образом, *абсолютное дифференцирование тензора* ξ^i *означает дифференцирование соответствующего вектора* $\boldsymbol{\xi}$ *в прямом геометрическом смысле этого слова:*

$$d\xi(t) = \xi'(t)\, dt, \quad \text{где } \xi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi(t)}{\Delta t}.$$

Результат был выведен в аффинных координатах в A_n (или в R_n), но в силу тензорного характера абсолютного дифференциала $D\xi^i$ он дает координаты того же вектора $d\boldsymbol{\xi}$ и в любой криволинейной системе координат (в локальном репере).

Следует помнить, что упрощенные формулы (8.187), (8.188) верны лишь в аффинных координатах. Если рассматривать аффинное пространство A_n *в криволинейных координатах,* то приходится пользоваться общими формулами (8.167), (8.181), так как Γ^k_{ij} отличны от нуля.

8.11. Техника абсолютного дифференцирования

Чтобы свободно обращаться с операцией абсолютного дифференцирования, мы должны установить правила, по которым она комбинируется с операциями тензорной алгебры. Другими словами, мы должны дать правила, по которым мы сможем находить абсолютные дифференциалы от суммы тензоров, от произведения тензоров и от свернутого тензора. Говоря о тензорах, мы имеем в виду тензорные поля, заданные, по крайней мере, вдоль того пути, по которому берется абсолютный дифференциал.

Пусть тензор $W^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ представляет собой сумму двух или нескольких тензоров того же строения

$$W^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+V^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}. \tag{8.189}$$

Тогда

$$DW^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+DV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}. \tag{8.190}$$

Действительно, выпишем формулу (8.167) для тензора $U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ и совершенно такую же формулу для тензора $V^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$.

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+\left\{\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\ldots-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}-\ldots\right\}dx^k,$$

$$DV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=dV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+\left\{\Gamma^{i_1}_{kp}V^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\ldots-\Gamma^{p}_{kr_1}V^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}-\ldots\right\}dx^k.$$

Складываем эти формулы почленно, объединяя соответствующие члены их правых частей и заменяя везде сумму тензоров *U* и *V* через *W* согласно (8.189). Кроме того, учитываем, что

$$dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+dV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=dW^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}.$$

В результате в правой части мы получаем для *W* в точности такое же выражение, какие были выписаны для *U* и *V*, т. е.

$$DW^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}.$$

Итак,

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+DV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=DW^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v},$$

а это нам и требовалось доказать. Мы приходим к правилу дифференцирования суммы тензоров:

$$D\left(U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+V^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}\right)=DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+DV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}. \tag{8.191}$$

Пусть теперь тензор $W^{i_1\ldots i_u j_1\ldots j_x}_{r_1\ldots r_v s_1\ldots s_y}$ представляет собой произведение двух тензоров:

$$W^{i_1\ldots i_u j_1\ldots j_x}_{r_1\ldots r_v s_1\ldots s_y}=U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}. \tag{8.192}$$

Тогда

$$DW^{i_1\ldots i_u j_1\ldots j_x}_{r_1\ldots r_v s_1\ldots s_y}=DU^{i_1\ldots i_v}_{r_1\ldots r_v}V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}+U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}DV^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}. \tag{8.193}$$

Другими словами, *абсолютный дифференциал произведения тензоров получается по обычному правилу: абсолютный дифференциал первого множителя, умноженный на второй множитель, плюс первый множитель, умноженный на абсолютный дифференциал второго.*

При этом существен именно такой порядок перемножения. В формуле он обеспечен расстановкой индексов (в каком же порядке перемножать *координаты* тензоров, например, $DU^{i_1\dots}_{r\dots}$ и $V^{j_1\dots}_{s_1\dots}$, безразлично).

Переходим к выводу формулы (8.193). Запишем развернутое выражение абсолютного дифференциала в ее левой части. В него войдет прежде всего обыкновенный дифференциал

$$dW^{i_1\dots j_x}_{r_1\dots s_y} = dU^{i_1\dots i_u}_{r_1\dots r_v} V^{j_1\dots j_x}_{s_1\dots s_y} + U^{i_1\dots i_u}_{r_1\dots r_v} dV^{j_1\dots j_x}_{s_1\dots s_y}, \qquad (8.194)$$

а затем дополнительные члены, по одному для каждого индекса. *Объединим первый член правой части* (8.194) *с теми дополнительными членами, которые отвечают индексам* $i_1 \dots i_u$, $r_1 \dots r_v$, *т. е. индексам, «снятым» с первого множителя.* Эти дополнительные члены будут составлены по схеме (8.167). Получим:

$$dU^{i_1\dots i_u}_{r_1\dots r_v} V^{j_1\dots j_x}_{s_1\dots s_y} +$$
$$+ \left(\Gamma^{i_1}_{kp} W^{p i_2\dots i_u j_1\dots j_x}_{r_1 r_2\dots r_v s_1\dots s_y} + \dots - \Gamma^{p}_{kr_1} W^{i_1 i_2\dots i_u j_1\dots j_x}_{p r_2\dots r_v s_1\dots s_y} - \dots\right) dx^k.$$

Члены в скобке составлены по очереди для индексов $i_1 \dots i_u$, $r_1 \dots r_v$, так что индексы $j_1, \dots, j_x$, $s_1, \dots, s_y$ во всех случаях переписываются без изменения. Заменяя W произведением U на V согласно (8.192) и вынося за скобку общий для всех членов множитель $V^{j_1\dots j_x}_{s_1\dots s_y}$, получим:

$$\left\{dU^{i_1\dots i_u}_{r_1\dots r_v} + \left(\Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2\dots i_u}_{r_1 r_2\dots r_v} + \dots - \Gamma^{p}_{kr_1} U^{i_1 i_2\dots i_u}_{p r_2\dots r_v} - \dots\right) dx^k\right\} V^{j_1\dots j_x}_{s_1\dots s_y}.$$

Но в фигурной скобке стоит, очевидно, $DU^{i_1\dots i_u}_{r_1\dots r_v}$", так что мы получаем первый член правой части в (8.193).

Совершенно аналогично, *объединяя второй член правой части* (8.194) с *теми дополнительными членами, которые отвечают индексам* $j_1, \dots, j_x$, $s_1, \dots, s_y$, мы получим второй член правой части (8.193). Этим формула (8.193) доказана.

Абсолютный дифференциал произведения любого числа тензоров вычисляется следующим образом: множители этого произведения поочередно заменяются своими абсолютными дифференциалами с сохранением прежнего места в произведении, и полученные результаты складываются. Это легко доказать, переходя от N к $N+1$ (где N —число ножителей в произведении) путем применения формулы (8.193).

Теперь переходим к абсолютному дифференцированию *свернутого тензора.* Рассмотрим тензор $U^{i_2\dots i_u}_{r_2\dots r_v}$, полученный свертыванием тензора $U^{i_1 i_2\dots i_u}_{r_1 r_2\dots r_v}$, например, по первому верхнему и первому нижнему индексам:

$$U^{i_2\dots i_u}_{r_2\dots r_v} = U^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v}.$$

Запись абсолютного дифференциала от свернутого тензора $DU^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v}$ является, в сущности, двусмысленной: неясно, произведено ли здесь сначала свертывание, а от результата взят абсолютный дифференциал, или сначала взят абсолютный дифференциал $DU^{i_1 i_2\dots i_u}_{r_1 r_2\dots r_v}$, а затем произведено свертывание по индексам i_1, r_1. Мы покажем, однако, что *оба истолкования приводят к одному и тому же выражению, т. е. операция свертывания перестановочна с операцией абсолютного дифференцирования.* В этом и будет заключаться наш результат.

Начнем с вычисления $DU^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v}$, истолкованного во втором смысле. Тогда мы должны положить в формуле (8.167) $i_1 = r_1 = s$ и по s произвести суммирование. Покажем, что при этом в правой части взаимно уничтожатся дополнительные члены, отвечающие индексам i_1 и r_1. В самом деле, эти члены суть

$$\left(\Gamma^{i_1}_{kp} U^{pi_2\dots i_u}_{r_1 r_2\dots r_v} - \Gamma^{p}_{kr_1} U^{i_1 i_2\dots i_u}_{pr_2\dots r_v}\right) dx^k,$$

а после того как мы положим $i_1 = r_1 = s$, они примут вид

$$\left(\Gamma^{s}_{kp} U^{pi_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v} - \Gamma^{p}_{ks} U^{si_2\dots i_u}_{pr_2\dots r_v}\right) dx^k,$$

т. е. взаимно уничтожаются, так как в скобке уменьшаемое равно вычитаемому (разница только в обозначениях индексов суммирования: p вместо s, и наоборот).

В результате формула (8.167) принимает вид

$$DU^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v} = dU^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v} + \left\{\Gamma^{i_2}_{kp} U^{sp\dots i_u}_{sr_2\dots r_v} + \dots + \Gamma^{i_u}_{kp} U^{si_2\dots p}_{sr_2\dots r_v} - \right.$$
$$\left. - \Gamma^{p}_{kr_2} U^{si_2\dots i_u}_{sp\dots r_v} - \dots - \Gamma^{p}_{kr_v} U^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots p}\right\} dx^k.$$

В левой части мы произвели свертывание в абсолютном дифференциале $DU^{i_1 i_2\dots i_u}_{r_1 r_2\dots r_v}$. Присмотревшись же к правой части, мы замечаем, что она представляет собой абсолютный дифференциал от свернутого тензора $U^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v}$, составленный по общей схеме (8.167). При этом индекс s в счет не идет — по нему произведено суммирование — и индексами здесь служат лишь $i_2 \dots i_u$, $r_2 \dots r_v$. Им как раз и отвечают сохранившиеся дополнительные члены. Итак, полученное равенство можно переписать в виде

$$DU^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v} = D\left(U^{si_2\dots i_u}_{sr_2\dots r_v}\right), \tag{8.195}$$

где в левой части свертывание производится после дифференцирования, а в правой — до дифференцирования, что отмечено скобкой. Итак, *оба истолкования записи* $D^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$ *имеют по существу один и тот же смысл.* Мы это и хотели установить.

В технике абсолютного дифференцирования этот результат находит наибольшие применения в случае свертывания между собой двух или нескольких тензоров. Пусть, например, требуется найти $D(a_{ij}\xi^i\eta^j)$, где a_{ij}, ξ^p, η^q — некоторые тензорные ноля. Абсолютный дифференциал берется здесь от выражения $a_{ij}\xi^i\eta^j$, которое нужно понимать, как произведение наших тензоров $a_{ij}\xi^p\eta^q$, свернутое затем по индексам i и p, j и q. Но свертывание можно выполнить и после абсолютного дифференцирования. В результате мы должны продифференцировать $a_{ij}\xi^p\eta^q$, как произведение тензоров, а затем выполнить свертывание. Получаем:

$$D(a_{ij}\xi^i\eta^j) = (Da_{ij})\,\xi^i\eta^j + a_{ij}\,(D\xi^i)\,\eta^j + a_{ij}\xi^i D\eta^j. \tag{8.196}$$

Таким образом, правило дифференцирования произведения тензоров формально сохраняется и при наличии свертывания.

Заметим, что в левой части равенства, мы имеем (в нашем примере) абсолютный дифференциал от инварианта, так что с равным правом можем писать $d\,(a_{ij}\xi^i\eta^j)$.

Полученные правила абсолютного дифференцирования (8.191), (8.193), (8.195) автоматически переносятся и на абсолютные производные простой заменой знака D на знак ∇_k.

Действительно, заменяя в любой из этих формул символы абсолютного дифференциала D через $dx^k\nabla_k$ согласно (8.180) и принимая во внимание, что дифференциалы dx^k совершенно произвольны, мы имеем право приравнять коэффициенты при dx^k в правой и левой частях формулы, а это и означает замену символа D символом ∇_k.

В заключение нужно вернуться *к связи между параллельным перенесением и абсолютным дифференцированием.* Мы начали с параллельного перенесения и на его основе установили абсолютное дифференцирование. Этот путь геометрически наиболее поучителен. Однако возможен обратный, хотя и весьма формальный, но зато короткий способ изложения, а именно, задавшись объектом связности Γ^i_{jk}, можно *определить* абсолютный дифференциал непосредственно формулой (8.167), показать его тензорный характер (так, как это было у нас сделано), установить технику абсолютного дифференцирования, а затем *определить* параллельное перенесение тензора $U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ вдоль произвольного пути условием

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = 0. \tag{8.197}$$

Или подробно: *будем говорить, что тензор* $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$, *заданный в каждой точке некоторого пути, параллельно переносится вдоль него, если абсолютный дифференциал этого тензора при любом бесконечно малом смещении вдоль пути равен нулю.*

Легко видеть, что это *определение равносильно прежнему.* Действительно, приравнивая нулю абсолютный дифференциал $DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$, записанный согласно (8.167), мы возвращаемся к формуле параллельного перенесения (8.160). Этого и нужно было ожидать, так как абсолютный дифференциал есть главная линейная часть приращения тензора *по сравнению со случаем его параллельного перенесения на данном бесконечно малом участке пути.* Поэтому обращение абсолютного дифференциала в нуль означает параллельное перенесение тензора. В частности, приравнивая нулю $D\xi^i$:

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{kp}\xi^p\, dx^k,$$

мы получаем формулу параллельного перенесения вектора:

$$d\xi^i = -\Gamma^i_{kp}\xi^p\, dx^k.$$

Формальная характеристика параллельного перенесения (8.197) удобна для разного рода выкладок. Так, например, легко можно получить теорему: *при одновременном параллельном перенесении нескольких тензоров по данному пути параллельно переносятся и тензоры, полученные из них операциями тензорной алгебры.*

В самом деле, пусть, например,

$$W^{ijk}_{rs} = U^{ij}_r V^k_s, \tag{8.198}$$

причем тензоры *U, V* параллельно переносятся вдоль данного пути. Это означает, что

$$DU^{ij}_r = 0, \quad DV^k_s = 0.$$

Отсюда следует:

$$D\left(U^{ij}_r V^k_s\right) = DU^{ij}_r \cdot V^k_s + U^{ij}_r \cdot DV^k_s = 0,$$

т. е. произведение тензоров $U^{ij}{}_r V^k{}_s$ тоже переносится параллельно. Аналогичным образом легко показать, что параллельно переносятся и суммы параллельно переносимых тензоров и тензоры, полученные их свертыванием.

8.12. Абсолютное дифференцирование в римановом информационном пространстве V_n

Все сказанное в п.п. 8.10, 8.11 справедливо и для связности Γ^k_{ij} в римановом информационном пространстве. Но при этом абсолютное дифференцирование приобретает и некоторые новые свойства. Прежде всего вычислим абсолютную производную от *метрического тензора* g_{rs} *по общей схеме* (8.181):

$$\nabla_k g_{rs} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kr} g_{ps} - \Gamma^p_{ks} g_{rp}.$$

Пользуясь (8.132), мы замечаем, что

$$\nabla_k g_{rs} = 0. \tag{8.199}$$

Таким образом, абсолютная производная метрического тензора тождественно равна нулю. Тем самым тождественно равен нулю и абсолютный дифференциал метрического тензора:

$$Dg_{rs} = 0. \tag{8.200}$$

Рассмотрим теперь поле единичного тензора δ^i_j, считая, что в каждой точке *M* и в любой координатной системе x^i его координаты определены соотношениями

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}. \tag{8.201}$$

Мы знаем, что тензорный закон преобразования не меняет этих численных значений. Вычислим абсолютную производную этого тензора:

$$\nabla_k \delta^i_j = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^i_j + \Gamma^i_{kp} \delta^p_j - \Gamma^p_{kj} \delta^i_p.$$

Частная производная от константы δ^i_j дает нуль, а остальные члены в результате суммирования по *p* приводятся к виду

$$\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{kj} = 0.$$

Итак,

$$\nabla_k \delta^i_j = 0, \quad \text{и тем самым } D\delta^i_j = 0. \tag{8.202}$$

Этот результат верен не только в римановом информационном пространстве V_n, но и в любом пространстве аффинной связности L_n.

Теперь покажем, что и для контравариантного метрического тензора g^{ij} абсолютный дифференциал тождественно равен нулю:

$$Dg^{ij} = 0, \quad \text{или, что то же, } \nabla_k g^{ij} = 0. \tag{8.203}$$

Для доказательства запишем основное соотношение, выражающее, что матрицы g_{ij}, и g^{ij} взаимно обратные и при перемножении дают единичную матрицу:

$$g^{ip}g_{pj}=\delta_j^i. \tag{8.204}$$

Берем почленно абсолютные дифференциалы (от левой части — как от произведения тензоров, выполняя свертывание по *p* после дифференцирования):

$$Dg^{ip}\cdot g_{pj}+g^{ip}\cdot Dg_{pj}=D\delta_j^i.$$

В силу (8.200) и (8.202) получаем:

$$Dg^{ip}\cdot g_{pj} = 0,$$

т. е. тензор Dg^{ip} равен нулю после опускания индекса *p;* следовательно, он и сам равен нулю, и (8.203) доказано.

Пусть теперь в римановом информационном пространстве заданы два тензорных поля, например, $V^{i\cdots}{}_{rs}$ и $V^{ir.}{}_{..s}$, причем первое получается из второго опусканием индекса *r*, а следовательно, второе из первого — его поднятием (см. (7.5), (7.7)):

$$V^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}=g_{rp}V^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s},\quad V^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}=g^{rp}V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{8.205}$$

Берем почленно абсолютные дифференциалы, причем правые части диффенцируются как произведения (с выполнением свертывания после дифференцирования):

$$DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}=(Dg_{rp})V^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s}+g_{rp}DV^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s},\quad DV^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}=(Dg^{rp})\,V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}+g^{rp}DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}.$$

Так как

$$Dg_{rp} = Dg^{rh}=0,$$

то мы получаем:

$$DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}=g_{rp}DV^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s},\quad DV^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}=g^{rp}DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{8.206}$$

Формулы (8.206) показывают, что операции опускания и поднятия индексов перестановочны с операцией абсолютного дифференцирования.

Проверим еще при помощи абсолютного дифференцирования известный нам факт, что при одновременном параллельном перенесении векторов ξ^i, η^j по данному пути их скалярное произведение $g_{ij}\xi^i\eta^j$ не меняется. Очевидно,

$$D(g_{ij}\xi^i\eta^j)=(Dg_{ij})\,\xi^i\eta^j+g_{ij}\,(D\xi^i)\,\eta^j+g_{ij}\xi^iD\eta^j=0,$$

так как Dg_{ij} всегда равен нулю, а $D\xi^i$, $D\eta^j$ равны нулю в силу параллельного перенесения этих векторов. Абсолютный дифференциал от инварианта совпадает с обыкновенным, так что получаем:

$$d(g_{ij}\xi^i\eta^j)=0,\quad \text{т. е.}\quad g_{ij}\xi^i\eta^j=\text{const},$$

что мы и хотели показать. Мы видим, что геометрический смысл соотношения $Dg_{ij}=0$ — это неизменность скалярного произведения параллельно переносимых векторов.

Заметим, что в римановом информационном пространстве нетрудно ввести основные понятия векторного анализа по аналогии с обычным пространством.

Так, каждому скалярному полю

$$\varphi = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$$

отвечает поле *вектора-градиента*

$$\varphi_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

который можно задать и контравариантными координатами, подняв индекс i:

$$\varphi^i = g^{ij}\varphi_j.$$

Каждому векторному полю

$$\xi^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$$

отвечает *дивергенция* — инвариантное скалярное поле $\nabla_i \xi^i$. Дивергенция от градиента скалярного поля φ называется *оператором Лапласа* от φ:

$$\Delta\varphi = \nabla_i(g^{ij}\varphi_j) = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi.$$

Все эти понятия принимают обычный вид, если рассматривать обычное пространство в прямоугольных координатах.

Сложнее обстоит дело с *ротором* векторного поля ξ^i, который, в n-мерном случае приходится определить как *бивектор:*

$$\xi_{ij} = \nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j},$$

где ξ_i — ковариантные координаты вектора ξ^i. Инвариантное истолкование этого бивектора как вектора v^i возможно лишь *в трехмерном случае.* Оно производится по формулам

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{23}, \quad v^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{31}, \quad v^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{12},$$

причем мы ограничиваемся координатными системами некоторой данной ориентации.

Следует отметить еще, что в частном случае, *когда риманово информационное пространство является евклидовым,* абсолютный дифференциал в *криволинейных координатах* выглядит по внешнему виду не проще, чем в общем случае риманова информационного пространства. Его более простой характер, выступает явно лишь при переходе к *аффинным координатам.* Тогда коэффициенты связности обращаются в нуль, дополнительные члены пропадают и абсолютное дифференцирование дает тот же результат, как и обыкновенное. Для любого тензора, например $Z^p{}_{ij}$, мы в этом случае имеем:

$$DZ^p_{ij} = dZ^p_{ij}, \quad \nabla_k Z^p_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} Z^p_{ij}.$$

В разделе 4, рассматривая *обычное евклидово информационное пространство в прямоугольных координатах,* мы вводили абсолютное дифференцирование именно этим путем. Все полученные там тензорные соотношения с участием абсолютных дифференциалов или производных имеют место *и в любых криволинейных координатах,* если выполнять абсолютное дифференцирование так, как в этом случае полагается (с участием $\Gamma^k{}_{ij}$). При переходе к криволинейным координатам нужно произвести еще расстановку индексов у тензоров — часть их поместить наверх, — в то время как в разделе 4 мы все индексы писали внизу, пользуясь тем, что в ортонормированном репере в собственно евклидовом информационном пространстве ко- и контравариантные индексы ведут себя одинаково.

9. ЕДИНИЦЫ ИНФОРМАЦИИ

9.1. СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Любые процессы жизни человеческого общества — производственные, хозяйственные, научно-исследовательские, демографические, общественно-политические и т. п. — находят отображение в информационных процессах.

Существующие определения понятия «информация» после тщательного анализа обычно признаются неудовлетворительными. Чаще всего они рассматривают информацию в сравнительно узком контексте. Попытки дать более широкое определение содержат элементы неясности. Поэтому вряд ли возможно сформулировать одно точное определение информации. Довольно распространенным является взгляд на информацию как на ресурс, аналогичный материальным, трудовым, денежным и т. п. ресурсам. Эта точка зрения отражается в следующем определении: информация — это сведения, позволяющие отразить материальные процессы, связанные с преобразованием вещества, энергии и самой информации.

Информация неотделима от процесса информирования, поэтому необходимо рассматривать источник информации и потребителей информации. Роль потребителей информации очерчивается в следующем определении: информация — это сведения, принятые, понятые и оцененные как полезные конечным потребителем.

Информация на пути от источника к потребителю проходит через ряд преобразователей: несколько кодирующих и декодирующих устройств, переносящих знаки с одного носителя на другой; ЭВМ, обрабатывающую информацию по определенному алгоритму, и т. д. На промежуточных стадиях преобразования смысловые свойства сообщений отступают на второй план, поэтому понятие «информация» заменяется на менее ограничительное понятие «данные».

Данные представляют собой набор утверждений, фактов и/или цифр, взаимосвязанных между собой. В тех случаях, когда различие между информацией и данными не нужно подчеркивать, они употребляются как синонимы.

Под информационным пространством некоторого объекта или множества объектов будем понимать совокупность всех информационных компонентов этого объекта или множества объектов независимо от способов и средств отображения этих компонентов.

Информационное пространство неоднородно. Оно содержит устные и письменные сообщения, в том числе организационно-распорядительскую документацию, отчеты о научно-исследовательских работах, экономическую, техническую и конструкторскую документацию и др., сообщения на машинных носителях, а также такие виды представления информации, как звуковые, электромагнитные и др.

Одна из важнейших характеристик информационного пространства — степень его структурированности.

Под *структурированностью информационного пространства* понимается такое свойство информационного пространства, при котором все содержание и особенности этого пространства представляются его компонентами и взаимосвязями между ними, выраженными в явном виде.

Между структурированностью информационного пространства и энтропией можно провести аналогию. Энтропия — это некоторая мера неупорядоченности в информации; чем больше энтропия, тем меньше упорядоченность информации. В структурированности информационного пространства обратная зависимость — чем больше структурированность информационного пространства, тем больше его упорядоченность. Тем не менее аналогия между энтропией и структурированностью информационного пространства достаточно глубока и позволяет переносить некоторые закономерности определения и изучения энтропии на структурированность информационного пространства.

Обработка информации на электронной вычислительной машине определяет необходимость представления ее в структурированном виде. Если в качестве меры структурированности информационного пространства принять отношение объема структурированной информации к объему всей информации в рассматриваемом пространстве, то степень структурированности информации, обрабатываемой на электронной вычислительной машине (при условии, что эта информация представляет собой рассматриваемое информационное пространство), наибольшая.

В любой системе машинной обработки информации (СМОИ) все входные и выходные документы, все промежуточные и внутримашинные представления информации структурированы. Следовательно, для такого информационного пространства коэффициент структурированности равен или близок к максимальному значению.

В зависимости от степени структурированности информационного пространства выделим следующие пять его видов.

1. Неструктурированное информационное пространство (НИП). Для НИП характерно, что структурированность компонентов информации встречается редко. Примерами НИП являются разговорная речь или информация, которой обмениваются между собой дельфины. Некоторые элементы структурированности в этом подклассе могут присутствовать.

2. Слабо структурированное информационное пространство (ССИП) — полностью структурированы только отдельные компоненты. Типичным примером ССИП может служить письменный язык. Структурированность основного объема информации состоит в выполнении требований некоторого синтаксиса. Как правило, такие требования неоднозначны, противоречивы, имеют исключения, сохраняют омонимию и синонимию и т. п.

3. Структурированное информационное пространство (СИП) — характеризуется существенным преобладанием структурированных компонентов. В СИП информация документирована, широко используется кодирование для обеспечения однозначности трактовки тех или иных понятий. Типичный пример СИП—

автоматизированная информационная система (АИС), представляющая собой часть информационного пространства, которая отображает деятельность некоторого информационного объекта.

4. Формализованно структурированное информационное пространство (ФСИП) — для него должно существовать в явном виде такое описание информационных образований, в котором определены не только информационные структуры и связи, но и алгоритмы получения значений любого элемента данных.

Основное назначение формализованного структурированного информационного пространства в том, что представленные в явном виде описания информационных образований должны обеспечивать:

порождение (на основе формальных правил) не только блоков логико-алгебраических преобразований, но и любых операций по управлению данными (сортировка, подборка, вызов, размещение и др.);

возможность выбора оптимальной структуры автоматизированной информационной системы в соответствии с выбранной целевой функцией;

возможность реорганизации как структур, так и алгоритмов обработки информации в процессе функционирования системы на основе обработки статистических данных и накапливаемых изменений об объекте.

5. Машинно-структурированное информационное пространство (МСИП) — формализованно описаны все информационные образования, в том числе формы входных и выходных документов, запросы конечных пользователей. Типичным примером МСИП является база данных в системе машинной обработки информации. Все процессы преобразования информации в таком пространстве формализованы и представлены в виде машинных программ. Некоторые неструктурированные элементы используются при организации взаимодействия конечных пользователей и вычислительной системы на естественном (или близком к естественному) языке.

Изучение закономерностей построения и методов анализа структурированного, в том числе формализованно- и машинно-структурированных видов, информационного пространства объектов инвариантного характера, изучение абстрактно-теоретических положений и средств, обеспечивающих переход от одного вида информационного пространства к другому, и является основой настоящей работы. Процесс создания проекта системы машинной обработки данных для некоторого объекта можно представить в виде последовательного перехода от первичного описания этого объекта (некоторой информационной модели) через промежуточные модели, такие, как машинная и программно-алгоритмическая модели, к проекту системы машинной обработки данных (модель обработки данных).

Одно из свойств последовательности моделей — соблюдение семантического единства, семантическая совместимость моделей снизу вверх. Предыдущая модель связана с последующей в смысловом плане. Все сведения, имеющиеся в предыдущей модели, сохраняются в последующей. При этом последующая модель пополняется новыми (производными) сведениями, новыми информационными взаимосвязями, которых не было в предыдущей модели, за счет применения нового уровня обобщения, новых преобразований.

Другое свойство этой последовательности моделей — конструктивная полнота, заключающаяся в том, что должна обеспечиваться полнота сведений, достаточная для последующих формализованных преобразований от первичного описания информационного объекта до модели обработки данных.

Переход от предыдущей модели к последующей обеспечивается применением некоторых преобразователей. Выделим два типа преобразователей. Одни преобразователи обеспечивают собственно переход от одной модели к другой, другие позволяют анализировать синтаксическую и семантическую непротиворечивость модели, ее полноту, корректность и адекватность реальным условиям объекта управления.

На первом этапе создания последовательности моделей — информационной модели объекта — используются преобразователи первого типа — организация и корректировка информационной модели и второго типа — анализ информационной модели.

На втором этапе — создании машинной модели, по существу, являющемся машинной интерпретацией информационной модели, используются преобразователи первого типа — преобразование информационной модели в машинную и ведение и корректировка машинной модели и второго типа — синтаксический и семантический анализ машинной модели.

Третий этап — программно-алгоритмическая модель, включающая средства управления данными и структуру базы данных. На этом этапе используются преобразователи первого типа — преобразование машинной модели в программно-алгоритмическую и второго типа — анализ программно-алгоритмической модели.

На четвертом этапе — создании модели обработки данных, по существу, представляющем собой проект системы машинной обработки данных, используются преобразователи первого типа — преобразование программно-алгоритмической модели в модель обработки данных и второго типа — документирование модели обработки данных, сопровождение модели обработки данных, модернизация модели обработки данных.

В различных представлениях информации можно выделить несколько уровней единиц информации. Им соответствуют некоторые последовательности символов, для которых существует семантическая интерпретация. Выделяют следующие единицы информации (в порядке возрастания синтаксической сложности): реквизит, показатель, составная единица информации, база данных.

Реквизит является информационным отображением отдельного свойства объекта или процесса реального мира.

Составная единица информации представляет собой информационное отображение объекта или процесса в целом или их части.

Показатель — это лишь одна из разновидностей составной единицы информации, минимальная по информационному содержанию, но достаточная для образования документа.

Базой данных называется единица информации, задающая информационное отображение множества разнородных взаимодействующих объектов реального мира.

Каждая единица информации характеризуется именем, структурой, значением, методами организации значений и допустимыми операциями над именем, структурой и значениями.

Имя единицы информации — это ее уникальное наименование в процессах обработки информации.

Под *структурой единицы информации* понимается ее реквизитный состав с учетом иерархического вхождения в нее единиц информации более низкого уровня. Структурой реквизита считается описание формата, т. е. указание множества допустимых символов в каждой позиции значения.

Множество *значений единицы информации* может быть объявлено и организовано в памяти ЭВМ различными способами.

Точное описание множества значений и всех взаимосвязей, которые поддерживаются между его элементами, называется *методом организации значений.*

Допустимыми операциями над именем единицы информации являются открытие и закрытие имени, объявление синонимов для данного имени и др.

Операции над структурой единицы информации — *композиция* и *декомпозиция*. В процессе композиции различные по структуре единицы информации объединяются, получая новое имя, новую структуру и новое множество значений. Для вычисления структуры и множества значений результата должен существовать алгоритм, который в качестве входной информации использует структуру и значения исходных единиц информации. Декомпозиция представляет собой операцию разъединения единицы информации на не совпадающие по структуре части. Операции над значениями единиц информации очень разнообразны и рассматриваются в последующих разделах настоящей работы.

Сведения об имени, структуре, множестве значений и допустимых операциях над единицей информации образуют ее *модель*. Чаще всего речь идет о модели базы данных, называемой *моделью данных*. Единицы информации и их модели представляют собой важный инструмент анализа и проектирования автоматизированных информационных систем.

9.2. Реквизиты — базовые элементы информации

Каждая представляемая информацией сущность (объект, процесс, явление) имеет ряд характерных для нее свойств (черт, признаков, параметров, характеристик, моментов). Например, свойствами материала являются его вес, габариты, сорт, цена, номенклатурный номер и др. Свойствами-признаками, характеризующими такую сущность, как организация-покупатель, представляются его наименование, ведомственная принадлежность, адрес, номер расчетного счета в банке и др. Свойства физической сущности отображаются с помощью переменных величин, являющихся базовыми (элементарными) единицами информации — реквизитами.

Реквизит — это логически неделимый элемент любой сложной информационной совокупности, соотносимый с определенным свойством отображаемого информацией сущности (объекта, процесса или явления). Из реквизитов компонуются все остальные, более сложные информационные конструкции. Единицы информации любой сложности можно последовательным разложением на составляющие компоненты (декомпозицией) расчленить до таких составляющих — переменных величин, которые не поддаются дальнейшему логическому разбиению, т. е. реквизитов. Дальнейшее членение реквизита на более мелкие составляющие — символы (символы в свою очередь—на биты, биты— на последовательность электронных импульсов и т. д.) разрывает его привязку к определенному свойству объекта (процесса, явления), нарушает информативность.

В литературе по теории информации также часто используются такие синонимы понятия «реквизит», как элемент, поле, терм, признак, атрибут, переменная, элементарная единица информации и др.

Информация отражает реальный мир с характерной для него взаимосвязью и взаимообусловленностью сущностей. Поэтому одно и то же свойство может наблюдаться у нескольких разных сущностей. Например, признак «дата» необходим и при фиксации процесса труда, и при передаче сведений о выполнении работы, и при отражении поступления материальных ценностей, и во многих других случаях. Более того, одно и то же значение реквизита может быть присуще нескольким различным по характеру сообщениям. Например, признак «склад № 3» может фигурировать в сообщениях о поступлении от поставщиков сырья, передаче полуфабрикатов со склада на склад, сдаче готовой продукции, ремонте помещения, премировании работников и т. д.

Для определения понятия каждого из множества окружающих нас предметов, явлений необходимо найти то особенное, что отделяет его от других предметов или явлений, что выражает его внутреннюю суть. Это «особенное» представляется в виде качественных определенностей, присущих отдельным разновидностям или их группам. Многообразие форм движения материи обусловливает и многообразие форм качественной определенности.

Качественная определенность проявляется через совокупность всех присущих понятию свойств, каждое из которых конкретно выражает какую-либо его сторону, какой-либо один его момент. Сущости, обладающие различными свойствами (признаками), по-разному действуют на органы чувств человека и вызывают различные ощущения, благодаря чему и создается возможность их градации и индивидуализации.

Некоторые из свойств (признаков) присущи лишь единичным экземплярам и поэтому называются индивидуальными. Например, индивидуальными признаками отличаются друг от друга животные одного вида, станки одной модели, товары одного наименования. По словам К. А. Тимирязева, в природе не существует двух форм, вполне тождественных. На факте существования определенных отличительных признаков у отдельных индивидов основана вся теория

Ч. Дарвина о происхождении видов путем естественного отбора. Благодаря индивидуальным признакам, являющимся таким образом признаками различия, даже две капли воды различаются между собой.

Другие свойства (признаки) распространяются на многие экземпляры, являются общими для нескольких сущностей. Например, общие признаки имеются у материальных ценностей различных наименований, объединенных в одну группу, у сооружений одного назначения. Благодаря им можно найти сходные черты даже в самых различных вещах. Как известно, различные сущности становятся количественно сравнимыми лишь после того, как они сведены к одному и тому же единству. Только как выражения одного и того же единства они являются одноименными, а следовательно, соизмеримыми величинами.

Всякое понятие включает в себя общие и индивидуальные свойства. Как известно, у двух различных сущностей, всегда имеются известные общие качества, другие качества отличаются между собой по степени, наконец, иные качества могут совершенно отсутствовать у одной из этих сущностей.

Следовательно, **главное назначение признаков — указание тех особенностей, которыми одна сущность отличается от других**, т. е. индивидуализация сообщений, устранение возможностей смешения фактов и искажения информации и представление таких свойств, которые могут послужить в последующем основой для обобщения.

Реквизит обладает некоторой самостоятельностью и имеет особые, характерные для него черты. Так, он может входить в самые разнообразные составные единицы информации, относящиеся к различным сущностям и имеющие различную сложность, так же, как какое-либо слово может входить в состав самых различных предложений.

Это свойство реквизита находит свое отображение в его форме, всесторонне характеризующей реквизит вне зависимости от его конкретного вхождения в ту или иную составную единицу информации.

Форма реквизита включает его наименование, структуру (формат), значение или совокупность значений и некоторые другие свойства.

Наименование реквизита (имя) служит для обращения к нему и обычно представляется словом или группой слов (например, «индивидуальный код налогоплательщика»), названием определенной графы (строки) входного или выходного документа, номером, условным кодом, адресом на носителе (магнитном диске, флешке и др.) или в памяти ЭВМ. При алгоритмизации и программировании с целью компактного написания чаще используют сокращенные имена — идентификаторы. Идентификаторы обычно имеют ограничения на длину, используемый алфавит и сферу действия. В некоторых случаях допускается также употребление синонимов наименований реквизита.

Целесообразно, чтобы основное имя — идентификатор реквизита — было закреплено за ним вне зависимости от того, используется ли этот реквизит в той или иной составной единице информации, в той или другой подсистеме. В этом случае обеспечивается ряд преимуществ при создании баз данных и совместимости различных информационных систем.

Точность же обращения к конкретному реквизиту достигается применением уточняющих указателей.

Каждому реквизиту присуще некоторое множество значений в зависимости от характеристик того свойства сущности, которое информационно отображает данный реквизит. **Это множество будем называть <u>областью определения реквизита, или классом значений</u>**. Область определения, например, для параметра «температура больного» одна, для признака «пол больного» — другая, для реквизита «код цеха» — третья.

Таким образом, *значение реквизита* является одним из элементов множества значений области определения данного реквизита, отображающей соответствующее состояние (из множества состояний) того свойства сущности, которое характеризует реквизит. Так, текущим значением реквизита «температура больного» может быть «37,4^{е}», а реквизита «пол больного» — «мужской». Другими словами, значение реквизита используется для представления значения соответствующего свойства сущности.

Выбор формы представления значений некоторого свойства сущности прямо зависит от его природы и по возможности должен в максимальной мере способствовать приближению информационного отображения к естественной характеристике свойства. Так, свойству «вес груза» наиболее соответствует числовое представление определенного реквизита (в установленных единицах измерения и с заданной точностью), свойству «тип упаковки» — словесное описание, а утверждение о предъявлении документов к оплате — логическое значение истинности или ложности.

Структурой реквизита называется способ представления его значений. В структуре различают *длину, тип и формат реквизита*.

Длина реквизита есть число символов, которые образуют его значение. Длина реквизита может быть постоянной или переменной Например, значение реквизита «код цеха», как правило, является двузначным, значение реквизита «количество сданных на склад деталей» может занимать от одной до семи позиций, значение реквизита «потребность некоторого материала на годовую программу предприятия» может занимать от одной до шести позиций до запятой, отделяющей дробную часть от целой, и от одной до пяти позиций после запятой, значение реквизита «наименование материала» может занимать до 120 позиций.

Типы реквизитов зависят от видов значений. Наиболее распространены *числовой, текстовой и логический типы*.

Реквизиты числового типа характеризуют количественные свойства сущностей, полученные в результате подсчета натуральных единиц, измерения, взвешивания, вычисления на основе других количественно-суммовых данных и т. п. Значениями таких реквизитов являются числа.

Выделяется несколько типов числовых величин в зависимости от класса чисел, системы счисления, фиксации десятичной запятой, упаковки и других характеристик; накладываются ограничения на диапазон чисел, форматы их представления при вводе-выводе и на различных носителях даже в рамках одной реализации. Реквизиты числового типа активно используются в различных арифметических преобразованиях, а большинство из них создается в результате таких преобразований.

Особую роль играют реквизиты числового типа, принимающие только целочисленные значения. Такие реквизиты могут выступать в качестве реквизитов-признаков.

Реквизиты текстового типа выражают, как правило, качественные свойства сущностей и характеризуют обстоятельства, при которых имел место изучаемый процесс и были получены те или иные числовые значения. Такие реквизиты называются признаками.

Реквизиты текстового типа могут использоваться в качестве операндов в арифметических и логических выражениях. Более того, значения таких реквизитов могут быть получены в результате арифметических или логических преобразований.

Специальными свойствами реквизитов являются признаки редактирования и преобразования, замок защиты, индикация наличия значения или множества значений, даты изменения значений и др.

Реквизиты логического типа принимают только два значения: истинность или ложность. Используются они в логических выражениях.

Будем считать, что над реквизитами определены арифметические и логические операции, понимаемые в обычном математическом смысле, текстовые операции и операции отношения как операции реляционной алгебры.

Значениями реквизитов являются последовательности символов (букв, цифр, различных знаков и специальных обозначений), называемые строками или текстом.

Полный набор всевозможных попарно различимых символов данной информационной системы составляет ее алфавит. Состав алфавита зависит от применяемых технических средств обработки данных, особенностей обрабатываемой информации и других факторов. Причем на различных стадиях обработки и даже в рамках одной вычислительной системы возможно применение различных алфавитов. От размера алфавита (число разнообразных символов, которые могут быть в одном разряде величины) и его состава (набор) зависит решение проблем кодирования и декодирования, компактной записи значений единиц информации, эффективного хранения данных, ускорения их поиска, передачи, ввода и вывода из ЭВМ в наиболее удобной для пользования форме, снижения затрат на всевозможные перезаписи. Поэтому выбору алфавита придается особое значение.

В значениях реквизитов текстового типа возможное применение тех или иных символов ограничено алфавитом, используемым для данной реализации на заданной стадии обработки. При этом возможно наложение ограничений на общую длину значения реквизита (строку, текст) и на набор символов для той или иной позиции в строке. Так, допустимо ограничение текста какого-либо признака или части его символов только цифрами, либо только буквами, либо лишь двоичными цифрами — битами. Чаще всего, однако, допустимо использование в той или иной позиции текста любого символа выбранного алфавита.

Всевозможные преобразования значений текстовых единиц информации сводятся в большинстве случаев к манипулированию символами. Изучению аппарата такого манипулирования придается особое значение. Так, для алгоритмического описания процессов оперирования с символами разработан ряд специализированных алгоритмических языков, а каждый из современных развитых алгоритмических языков универсального назначения, как правило, имеет аппарат для оперирования с текстовыми величинами.

Тексты представляют собой типичные единицы данных последовательного типа, и для удобства их обработки и обращения к отдельным элементам текста — символам они последовательно нумеруются с 1 по *n*. Если длина текста фиксирована, то *n* является константой. Если же длина переменна, то *n* тоже является переменной, а конец текста определяется специальным ограничителем. Тем самым создается возможность введения индекса позиций строки и адресации к тем или иным позициям.

Ограничения на используемый алфавит в различных позициях текста достигаются с помощью *специальной маски, называемой форматом* (иногда — шаблоном) и содержащей информацию о том, для каких позиций применимы те или иные подалфавиты. Например, запись формата A(5)X(3) 9(2)1(4) означает, что в первых пяти позициях текста допустимы только буквы, в следующих трех — любые символы, в девятой и десятой позициях — только десятичные цифры и в последних четырех — лишь двоичные цифры (0 или 1).

Часто значениями признаков может быть текст, выраженный цифрами. Например, полному наименованию материала «пятижильный кабель с сечением жил 2 мм» может соответствовать условный сокращенный код — номенклатурный номер «2870520». Применение кодов существенно облегчает машинную обработку данных. Запись кодами быстрее и компактнее, их введение позволяет строго систематизировать и классифицировать объекты планирования, учета и управления, устранять омонимию и синонимию. Кодирование облегчает группировку информации в необходимых для сводки разрезах, упрощает поиск данных в больших и сложных массивах.

Значения реквизитов числового типа могут быть представлены в десятичной, шестнадцатеричной, восьмеричной, двоичной и других системах счисления. Значения реквизитов, отображенные двоичными цифрами (0 и 1), обычно называют битовыми строками, или строками бит. В некоторых алгоритмических языках введен специальный тип данных — битовый.

Цифровые коды, представленные целочисленными значениями, можно отнести к текстовому типу, т. е. ими можно оперировать, независимо от системы счисления, как с любой строкой символов; обращаться к нужной позиции; удалять некоторые цифры или цифры заданных позиций, заменять их на другие цифры; производить вставки, переиндексацию позиций, обработку строки по позициям по определенному алгоритму и т. д., считая строку одномерным массивом, значением каждой отдельной позиции которого является некоторый символ, в данном случае только из подмножества алфавита — цифрового подалфавита.

По своему характеру цифровые коды являются числами (чаще всего целыми) и могут подвергаться арифметической обработке. Поэтому необходимы преобразования типов величин — перевод кодов в числа и наоборот (перевод кодов из одной системы счисления в другую и даже перекодировка алфавитных строк в цифровые на основе цифровых эквивалентов (весов), приписанных отдельным символам алфавита, и наоборот). Подобные преобразования выполняются с помощью специальных средств в виде набора операций, функций (в том числе библиотечных), подпрограмм и т. п., при этом используются описания реквизитов. В частности, при преобразовании чисел в текст используются форматы, определяющие длину целой и дробной частей числа (его мантиссы), положение десятичной запятой, размещение операционного знака (плюса или минуса), условия гашения и замены другими обозначениями незначащих нулей и др.

С помощью форматов, указателей типов и других средств описания реквизитов ограничивается класс их значений - подмножество значений для возможного присвоения той или иной величине. Для признаков область определения значений (подалфавит) может быть, как отмечалось, определена и для любой позиции строки.

Кроме того, область определения значений может быть установлена явным перечислением всех конкретных значений — строк в одном из нескольких вариантов их возможного представления. Так, для признака «месяц» класс значений может быть явно ограничен по описанию лишь двенадцатью возможными значениями и одним из подходящих конкретных написаний: либо полными названиями месяцев (январь, февраль и т. д.), либо их сокращениями (например, янв., февр. и т. д.), либо римскими цифрами, либо арабскими и т. д.

Так как общее количество значений одного реквизита-признака конечно, область определения значений может быть представлена полным перечнем — массивом всех его значений, обычно называемым номенклатурой данного признака и создаваемым на практике для классификаторов и при кодировании значений признака. Следовательно, значение реквизита-признака есть значение одной из позиций номенклатуры. Например, признак «категория качества изделий» может принимать одно из трех значений, составляющих номенклатуру значений этого признака. Тогда одним из значений этого признака может быть, например, «высшая категория качества».

Реквизит логического типа (часто именуемый булевым) может принимать одно из двух значений: истинность или ложность. В текстовой интерпретации значению истинности могут соответствовать символы «1», «+», «И», слова «да», «истина» и т. д., значению ложности — символы «0», «—», «Л», слова «нет», «ложь» и т. д.

Переменные логического типа используются для отображения таких свойств сущностей, которые по своей характеристике можно разделить на две противоположные группы, например присутствует какой-то признак или отсутствует, наступил или нет некоторый момент, перешло или нет явление некоторую грань, выдержано определенное условие или нет, положительная величина или отрицательная и т. д. Примерами переменных логического типа могут быть знак величины (плюс или минус), признак избыточности, переполнения, завершения, годности и т. п.

Над логическими величинами осуществляются операции математической логики (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и др.); они участвуют в логических выражениях, вычисляемые значения которых (истинность или ложность) в свою очередь присваиваются реквизитам логического типа.

В практике обработки данных часто применяют также логические шкалы (векторы) — одномерные массивы логического типа, значением каждой позиции которых является истинность или ложность. Так, какому-либо основному массиву *М* длиной *Н* позиций может быть поставлен в соответствие вспомогательный массив логического типа *Л* той же длины и при изменении данных в i-й позиции массива *М* заносится 1 в ту же позицию массива *Л*. Тогда позиции, соответствующие значению истинности в массиве *Л*, будут указывать на позиции основного массива *М,* подвергшиеся изменениям. Этот пример также поясняет суть преобразования логического массива в строку бит и обратного преобразования, заключающегося в установлении соответствия между корреспондирующими позициями строки бит и логического массива.

В некоторых случаях встречается объявление специальных типов данных: географических координат (для выражения долготы и широты в градусах, минутах и секундах), времени (часы, минуты, секунды), даты (год, месяц, день) и др.

9.3. Составные единицы информации

Каждая из наблюдаемых сущностей характеризуется рядом присущих ей свойств. Но точно так же, как взятое в отдельности любое свойство еще не представляет сущность (объект, процесс) в целом, так и изолированно взятый тот или иной реквизит, характеризующий своим значением одно из свойств сущности, не может представлять законченного сообщения о наблюдаемой сущности (объекте, процессе). Требуется некоторая взаимосвязанная совокупность реквизитов для того, чтобы воспроизвести некоторое сообщение о сущности, определенную информацию о явлении. Каждое j-е свойство в сообщении C_i представлено значением определенного приписанного этому свойству реквизита R_j:

$$C_i = (R_1, R_2, ..., R_j, ... , R_m),$$

где реквизиты R_i могут быть и признаками, и числовыми переменными-основаниями.

Реквизитом-признаком называется такой реквизит, значение которого определяет некоторое обстоятельство действия (место действия, действующих лиц, предметы и продукты труда, время и др.).

Реквизит-основание — это такой реквизит, значение которого определяет некоторую меру действия (количество или стоимость предметов и продуктов труда, норму выработки или времени и др.).

Чаще реквизит-основание является реквизитом числового типа (иногда его называют количественным).

Каждый реквизит в сообщении имеет лишь одно значение (строку или число). Однако поскольку одна и та же сущность (допустим, факт отпуска изделий покупателям) фиксируется многократно с возникновением каждый раз нового сообщения, значения любого реквизита R_j меняются в зависимости от обстоятельств.

Каждое из сообщений, отображающих какой-либо один отличительный факт, глубоко индивидуально, поскольку варьируются значения по составным свойствам сущностей. Так, при отпуске готовых изделий покупателям сообщения могут фиксироваться по каждому из складов, по каждому из наименований продукции, для каждого из покупателей, каждый день и т. д. В связи с меняющимися значениями свойств этой сущности все сообщения будут отличаться друг от друга.

Так как каждый из *m* реквизитов сообщения C_i может принимать одно из K_j значений, где K_j—длина номенклатуры для реквизита-признака и диапазон значений для реквизита числового типа, то потенциально множество значений сообщения данного вида равно произведению $\prod_{j=1}^{m} K_j$.

В действительности, однако, из-за наличия определенной логической взаимосвязи реквизитов, различной вероятности появления отдельных значений реквизита и сочетаний значений разных реквизитов множество значений меньше теоретически возможного, но тем не менее, как правило, велико.

Каждое сообщение в множестве сообщений данного вида отличается от другого значением хотя бы одного из входящих в сообщение реквизитов. Все множество этих сообщений объединяется в один вид благодаря одинаковому составу свойств, отображаемых реквизитами, или структурой сообщения.

Структурой сообщения объединяется некоторая совокупность разных реквизитов, т. е. в данном случае некоторое более сложное по структуре информационное образование, состоящее из элементарных единиц информации — реквизитов.

Единицу информации, состоящую из совокупности других единиц информации, ассоциативно связанных между собой некоторыми отношениями, назовем *составной единицей информации* (СЕИ), или просто составной. Единицу информации, входящую в СЕИ, назовем составляющей единицей информации, или просто составляющей. В рассмотренном выше примере в качестве составляющих использовались реквизиты $R_1, R_2, ..., R_m$.

Составляющая единица информации может быть по положению в структуре, в свою очередь, составной единицей информации, но более низкого уровня, чем СЕИ, в состав которой входит эта составляющая. Наоборот, СЕИ может быть составляющей, если она находится в структуре не на первом (для СЕИ) уровне, а в составе другой, более укрупненной СЕИ.

Для каждой СЕИ будем различать ее наименование, структуру, значение и некоторые специальные свойства.

Наименование СЕИ (или имя) служит для обращения к ней и обычно представляется словом или группой слов, например «движение материалов за месяц». Чаще используются сокращенные названия СЕИ — идентификаторы. Для однозначной трактовки возможных употреблений синонимов СЕИ применяется тезаурус СЕИ.

Структурой СЕИ называется ее реквизитный состав с учетом иерархического вхождения СЕИ более низкого уровня в состав рассматриваемой СЕИ. Рекурсивность определения структуры СЕИ обеспечивает возможность построения весьма сложных информационных конструкций, вплоть до интегрированных баз данных.

Под *значением* СЕИ понимается некоторая конструкция, в которой каждому реквизиту, входящему в структуру СЕИ, присвоено значение или некоторое множество значений.

Для СЕИ могут быть определены арифметические, логические и текстовые операции, а также операции отношения.

При *арифметических операциях* каждый реквизит, входящий в структуру СЕИ, участвует в арифметических операциях над реквизитами, ему может быть присвоено некоторое значение или множество значений.

При *логических операциях* СЕИ рассматривается как некоторая переменная булевского типа, которой может быть присвоено значение этого же типа.

При *операциях отношения* СЕИ рассматривается как множество значений, над которыми определены операции реляционной алгебры. Естественно, что при выполнении операций СЕИ выступают в качестве операндов соответствующих выражений.

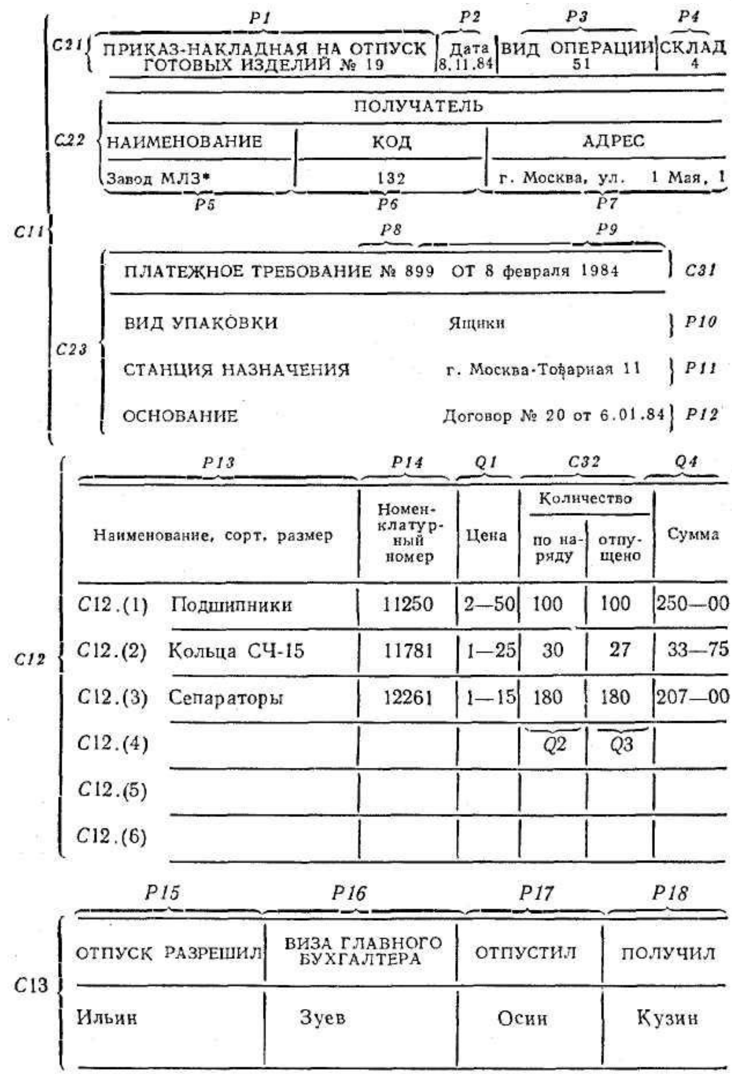
Примером составной единицы информации может быть некоторое множество документированной информации (также относимой к структурированной). Такая информация может быть представлена на любом носителе данных. Именно анализ такой информации позволяет в определенной мере изучить состав, внутреннее строение и свойства обрабатываемой информации и информации, получаемой в результате обработки.

Поскольку в теории информации документ служит основным средством регистрации отдельных факторов (признаков) сущностей, основным способом определения характера информации является анализ содержания и структуры документов.

В частности, содержание всех документов предприятия в совокупности фактически отображает всю его деятельность в том виде, в каком она была зафиксирована и зарегистрирована управленческим аппаратом, в каком весь трудовой процесс был представлен в результате определенных экономических обобщений и оперирования первоначальными данными. Многочисленные факты и операции хозяйственной жизни предприятия отражаются документами. Варианты регистрации могут быть самыми разнообразными в зависимости от объема и характера производства, количества рабочих, производственной структуры предприятия, формы бухгалтерского учета и методики планирования, технической оснащенности управленческого аппарата, методов исчисления готовой продукции и т. д. Характер документирования каждой отдельной хозяйственной операции зависит от конкретных особенностей и условий ее осуществления и в связи с этим оформление одной и той же операции не одинаково для разных предприятий и организаций. Поэтому и количество форм документов, в которых регистрируется на предприятиях даже отнотипное явление (например, расход материалов на производство), имеет много разновидностей. Так, существующие на предприятиях формы лимитной карты отличаются наличием или отсутствием некоторых реквизитов, их расположением и пр. Форма одного и того же наименования и назначения может быть в одном случае чрезвычайно сложной, другом — простой.

Рассмотрим в качестве примера информационную совокупность, отражающую информацию, которая содержится в таком распространенном документе, как приказ-накладная на отпуск готовых изделий (табл. 9.1).

Таблица 9.1



	P1	P2	P3	P4
C21	ПРИКАЗ-НАКЛАДНАЯ НА ОТПУСК ГОТОВЫХ ИЗДЕЛИЙ № 19	Дата 8.11.84	ВИД ОПЕРАЦИИ 51	СКЛАД 4

	ПОЛУЧАТЕЛЬ		
C22	НАИМЕНОВАНИЕ	КОД	АДРЕС
	Завод МЛЗ*	132	г. Москва, ул. 1 Мая, 1
	P5	P6	P7

C11

C23	ПЛАТЕЖНОЕ ТРЕБОВАНИЕ № 899 (P8) ОТ 8 февраля 1984 (P9)		C31
	ВИД УПАКОВКИ	Ящики	P10
	СТАНЦИЯ НАЗНАЧЕНИЯ	г. Москва-Тофарная 11	P11
	ОСНОВАНИЕ	Договор № 20 от 6.01.84	P12

C12	P13		P14	Q1	C32		Q4
	Наименование, сорт, размер		Номенклатурный номер	Цена	Количество		Сумма
					по наряду	отпущено	
	C12.(1)	Подшипники	11250	2—50	100	100	250—00
	C12.(2)	Кольца СЧ-15	11781	1—25	30	27	33—75
	C12.(3)	Сепараторы	12261	1—15	180	180	207—00
	C12.(4)				Q2	Q3	
	C12.(5)						
	C12.(6)						

	P15	P16	P17	P18
C13	ОТПУСК РАЗРЕШИЛ	ВИЗА ГЛАВНОГО БУХГАЛТЕРА	ОТПУСТИЛ	ПОЛУЧИЛ
	Ильин	Зуев	Осин	Кузин

Форму этого документа можно условно разбить на три части: общую, предметную и оформительную (подписи). Следовательно, представленную этим документом СЕИ *S* соответственно можно разбить на три информационные совокупности — составные единицы информации: *С*11 (общая часть), *С*12 (предметная часть) и *С*13 (оформительная часть), что можно представить записью: *S* (*С*11, *С*12, *С*13), где *S* — идентификатор СЕИ *S*, точка — знак иерархического отношения (подчинения), а (*С*11, *С*12, *С*13) - составляющие по отношению к составной *S*, запятые между ними — знаки отношения следования в рамках одного уровня. Запись можно прочитать так: «Составная *S* состоит из составляющих *С*11, *С*12 и *С*13».

Составляющая *С*11, представляющая общую часть документа, в свою очередь является СЕИ и включает три составляющих:

*С*11 (*С*21, *С*22, *С*23).

СЕИ *С*21 также является составной и включает четыре составляющие следующего уровня (*Р*1 — номер накладной на отпуск готовых изделий, *Р*2 — дата, *Р*3 — вид операции, *Р*4 — код склада), причем все они являются реквизитами-признаками:

*С*21. *(Р*1*, Р*2*, Р*3*, Р*4).

СЕИ *С*22 (данные о получателе) содержит три элемента (*Р*5, *Р*6 и *Р*7 — наименование, код и адрес получателя), являющихся реквизитами-признаками:

*С*22. (*Р*5, *Р*6, *Р*7*).*

Несколько сложнее структура информационной совокупности *С*23 из общей части документа: *С*31 —данные о платежном требовании, *Р*10 — вид упаковки, *Р*11 — станция назначения и *Р*12 — основание для сделки. Однако ее составляющий элемент *С*31 в свою очередь является СЕИ, содержащей два элемента: номер платежного требования — *Р*8 и дату выписки платежного требования — *Р*9.

Структура *С*23 может быть записана так:

*С*23.(*С*31.(*Р*8, *Р*9), *Р*10, *Р*11, *Р*12).

Рассмотрим теперь предметную часть документа — СЕИ *С*12. Это составная единица информации, поскольку содержит пять элементов: *Р*13 — наименование, сорт, размер; *Р*14 — номенклатурный номер; *Q*1 — цена; *С*32 — количество; *Q*4 — сумма. С32 состоит из двух элементов: *Q*2 — количество по наряду и *Q*3 — количество отпущенное. СЕИ *С*12 можно записать следующим образом:

*С*12. (*Р*13, *Р*14, *Q*l, *С*32. (*Q*2.*Q*3), *Q*4).

Такая формулировка была бы справедливой, если бы составная *С*12 представляла лишь одно сообщение. Однако, как видно из табл. 9.1, приводятся три сообщения (значения СЕИ), а может быть дано до шести сообщений (если заполнить все строки). Для указания такой особенности СЕИ используются специальные средства.

Единица информации одной формы, представляющая только одно значение в некоторой конструкции, называется *простой*, а представляющая несколько значений в некоторой конструкции, — *массивом*. Составная единица информации только с одним значением в некоторой конструкции называется простой составной, а СЕИ, имеющая несколько значений в некоторой конструкции, — составной-массивом.

В рассматриваемом случае к простым СЕИ относятся, например, составные $C11$, $C21$, $C22$, $C23$, $C31$. Составная $C12$ является СЕИ-массивом, и в ее описании необходимо объявить длину массива — максимально допустимое число позиций, предназначенных для значений. Как правило, указываются номер позиции (индекса) массива, с которой начинается нумерация (индексация) позиций (в большинстве случаев это 1), и номер его последней позиции, например для нашего случая 1:6, где двоеточие означает последовательную нумерацию (1, 2, ..., 6). Индекс, с помощью которого осуществляется адресация к той или иной позиции массива, может изменяться только в диапазоне этих двух чисел. Эту пару целых чисел обычно называют граничной парой, а сами числа — соответственно нижней и верхней границами массива (по данному его измерению; для матрицы, естественно, требуются две граничные пары). В качестве нижней и верхней границ допускаются и переменные, а во многих алгоритмических языках — и арифметические выражения, вычисляемые к моменту точного определения длины массива. Для массивов с переменной длиной используются также специальные указатели (отметки) конца массива.

Примерами описаний массивов разной размерности могут служить записи: $A.(1 : N)$, $B.(1 : K,\ \ 1 : N)$, $C\ (1 : 5,\ 1:8,\ 1:4)$, $D.(M : N)$, $E.(K + 1 : K + N)$.

Для составной-массива $C12$ соответственно следует записать $C12.(1 : 6)$, и с учетом этого формулировкой СЕИ-массива $C12$ будет $C12.(l:6)$. ($P13$, $P14$, Ql, $C32.(Q2$, $Q3),Q4)$.

Оформительная часть документа $C13$ состоит из четырех реквизитов: $P15$— отпуск разрешил, $P16$ — виза главного бухгалтера, $P17$ — отпустил, $P18$—получил:

$$C13.(P15,\ P16,\ P17, P18).$$

В конкретных условиях, например промышленного предприятия, приказ-накладная на отпуск готовых изделий представляется некоторым множеством документов, отражающим совокупность хозяйственных операций по отпуску готовых изделий. Следовательно, этот документ является массивом. Структура СЕИ-массива *S* из *M* позиций может быть представлена следующей записью:

S.(1 : *M*). (*C*11. (*C*21. (*P*1, *P*2, *P*3, *P*4),
*C*22. (*P*5, *P*6, *P*7),
*C*23. (*C*31.(*P*8, *P*9), *P*10, *P*11, *P*12),
*C*12. (1:6).(*P*13, *P*14, *Q*l, *C*32. (*Q*2, *Q*3), *Q*4),
*C*13. (*P*15, *P*16, *P*17, *P*18).

Графическая интерпретация структуры этой СЕИ дана на рис. 9.1, где висячие вершины дерева представляют собой реквизиты, из них реквизиты-признаки имеют идентификаторы, начинающиеся буквой *P*, а реквизиты-основания—идентификаторы, начинающиеся буквой *Q*. Остальные вершины — это СЕИ, являющиеся промежуточными и составляющими по отношению к основной составной *S*.

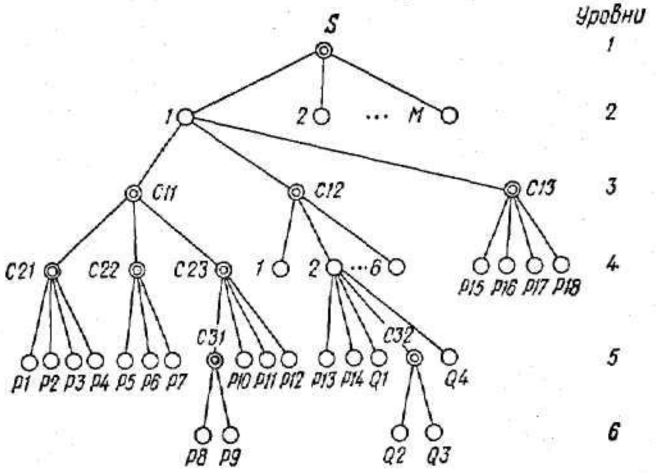


Рис. 9.1. Графическая интерпретация структуры СЕИ-массива *S* из М позиций

Вспомогательная роль таких промежуточных составных особенно выявляется при перестроении структуры СЕИ, когда каждая позиция составного массива будет иметь свой самостоятельный набор значений всех реквизитов, что позволяет обрабатывать этот массив отдельно. В полученной СЕИ будут отсутствовать промежуточные СЕИ-составляющие. Пример составного массива *S* приказов-накладных на отпуск готовых изделий с такой преобразованной структурой иллюстрирует граф этой структуры (рис. 9.2), на котором число уровней СЕИ сократилось до трех, а длина массива *N* равна 6*M*.

Такой структуре соответствуют матричная интерпретация и формулировка *S*.(1 : *N*).(*P*1, *P*2, *P*3, *P*4, *P*5, *P*6, *P*7, *P*8, *P*9, *P*10, *P*11, *P*12, *P*13, *P*14, *Q*1, *Q*2, *Q*3, *Q*4, *P*15, *P*16, *P*17, *P*18).

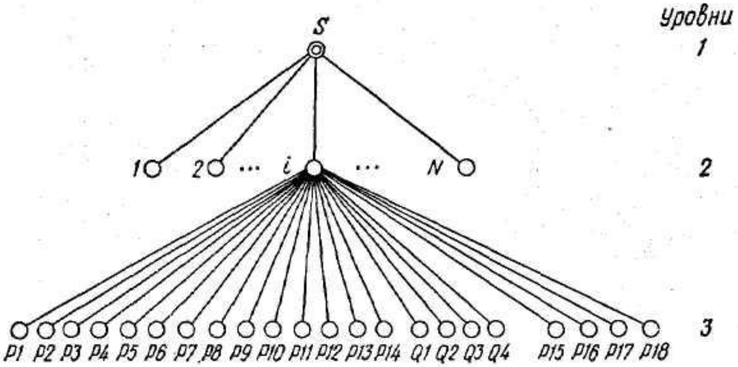


Рис. 9.2. Графическая интерпретация структуры СЕИ с преобразованной структурой

Сравнение двух структур одной и той же составной, особенно в их табличной интерпретации, показывает, что вторая более проста, но имеет увеличенный объем данных.

Структуру первого типа (рис. 9.3) называют ненормализованной, структуру второго типа (рис. 9.4) — нормализованной.

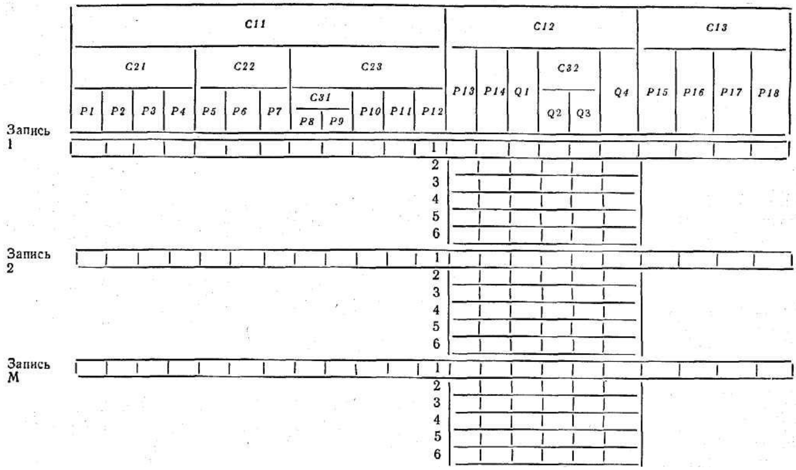


Рис. 9.3. Ненормализованная структура СЕИ *S*

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	Q1	Q2	Q3	Q4	P15	P16	P17	P18
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						
6																						
N																						

Рис. 9.4. Нормализованная структура СЕИ S

Введение промежуточных составных позволяет устранить дублирование данных и создать определенные удобства для групповой адресации. Промежуточные составные называют *группами,* причем состоящие только из реквизитов (например, C21, C22, C31, C32 и C13 в первой структуре) — простыми, а имеющие в своем составе другие составные (группы) — сложными (например, C11, C12, C23).

Примерами простых групп могут также служить:

адрес, (область, город, улица, дом, квартира)

дата, (день, месяц, год)

товар, (наименование, номер, сорт, размер)

лицо, (фамилия, имя, отчество)

книга, (автор, название, том, издательство, год).

В качестве примеров сложных групп можно назвать:

работа, (цех, дата, лицо, изделие, операция)

водитель, (лицо, автомобиль)

адресат, (адрес, лицо)

товарополучатель, (товар, адресат).

В первой группе примеров все составляющие являются реквизитами, во второй большая часть из них — группы.

Синонимами термина «группа» также являются термины «сегмент», «агрегат», «набор» и иногда — «запись». Более часто под записью понимают значение одной позиции составной-массива (см. рис. 9.3), или, другими словами, сообщение об одном из состояний наблюдаемой сущности. Сама составная-массив при этом определении —

совокупность записей о множестве состояний объекта или множестве объектов наблюдаемого процесса (явления). Запись представляет собой совокупность значений реквизитов, входящих в состав этой СЕИ. Это же справедливо в отношении групп, совокупность значений каждой из которых иногда называют статьей. В конечном итоге значение любой составной единицы информации, какой бы сложной она ни была и на каком бы уровне иерархии ни находилась, есть совокупность строк и чисел—значений составляющих реквизитов.

9.4. Показатели

Показатель — составная единица информации, состоящая из одного реквизита-основания, отражающего тот или иной факт в количественной или качественной оценке, и ряда характеризующих его и связанных с ним логическими отношениями реквизитов-признаков (времени, места, действия, действующих лиц, предметов и продуктов труда и т. д.).

Общий вид показателя может быть представлен следующим образом:

$$П.(P_1, P_2, P_3,..., P_n, Q),$$

где $P_1, P_2, P_3,..., P_n$ — реквизиты-признаки; Q — реквизит-основание показателя.

Для показателя-массива общая формулировка включает указание длины массива *(Д):*

$$П.(1{:}Д).\ (P_1, P_2, P_3,..., P_n, Q).$$

Одна из причин выделения показателей в особую разновидность составных единиц информации заключается в том, что показатель, по существу, является минимальной по составу информационной совокупностью, сохраняющей информативность, и поэтому достаточной для образования самостоятельного документа, который в дальнейшем может существовать даже изолированно от информационной системы, имея свою форму и свой алгоритм получения. Показатели представляются, с одной стороны, простейшими СЕИ, способными к документообразованию, а с другой — сложными образованиями информации, охватывающими описания многообразных качественных свойств и количественной характеристики сущности и состоящими в силу этого из совокупности реквизитов.

По аналогии с СЕИ для показателя будем различать наименование (идентификатор) показателя, его структуру или форму, значение и некоторые специальные свойства. Отметим особенности этих понятий.

Структурой показателя называется его реквизитный состав. *Значение показателя* — это некоторая конструкция, в которой каждому реквизиту, входящему в показатель, присвоено конкретное значение из соответствующей области определения.

Для показателя определим арифметические, текстовые, логические операции и операции отношения.

При *арифметических операциях* каждый реквизит, входящий в показатель, участвует в арифметических операциях над реквизитами, при этом ему может быть присвоено конкретное значение из соответствующей области определения. При *текстовых операциях* реквизиты, входящие в показатель, участвуют в текстовых преобразованиях и им может быть присвоено текстовое значение (строка). Числовое значение реквизита-основания для таких операций предварительно преобразуется в текст. При *логических операциях* показатель выступает как некоторая переменная булевского типа, которой может быть присвоено значение этого же типа. При *операциях отношения* показатель рассматривается как множество значений, над которым определены операции реляционной алгебры.

Естественно, что при выполнении операций над показателями они выступают в качестве операндов соответствующих выражений.

Определим *функцию от показателя* как некоторое выражение, включающее арифметические, логические операции и операции отношения, в результате выполнения которого каждому реквизиту, входящему в показатель, будет присвоено значение из соответствующей ему области определения.

Так, $Y = F(П)$,

где $П$ — показатель $П.(P_1, P_2, ..., P_n, Q)$;

Y — показатель $Y.\ (T_1, T_2, ..., T_n, Z)$,

означает, что заданы такие функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ и f_{m+1} над реквизитами, что

$$T_i = f_i(P_j),\ i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n};$$

$$Z = f_{m+1}(Q).$$

Для общности можно обозначить $P_{m+1} = Q$, $T_{n+1} = Z$. Тогда

$$T_i = f_i(P_j),\ i = 1, 2, \ldots, m+1;\ j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Аналогично определяется функция от нескольких показателей

$$y = f{<}(П_1, \ldots, П_k).$$

Составную единицу информации любой сложности можно свести в конечном итоге к определенной совокупности различных показателей, каждый из которых будет иметь самостоятельный алгоритм получения. Такой процесс называется *декомпозицией* СЕИ. Это одна из характерных особенностей теории информации. Обратный процесс объединения нескольких показателей в одну СЕИ называется *композицией* СЕИ. Например, СЕИ приказа-накладной на отпуск готовых изделий (см. табл. 9.1) можно представить как четыре различных по структуре показателя: цена изделия ($П_ц$), количество изделий, занаряженное на отпуск ($П_{к.н}$), количество отпущенных со склада изделий ($П_{к.о}$), сумма отпущенных со склада изделий ($П_с$). Формулировка структуры каждого из них (для упрощения опущены номера документов, подписи и т. п.) имеет вид:

$П_{ц.}$(1: K). (P 13, P 14, Q1)

$П_{к.н.}$(1:N). (P2, P3, P4, P5, P 6, P7, $P10$, P11, P 13, P 14, Q2)

$П_{к.о}$.(1: N). (P 2, P3, P 4, P5, P6, P7, P10, P 11, P 13, P 14, Q3)

$П_с$. (1:N). (P 2, P 3, P 4, P 5, P 6, P 7, P 10, P 11, P 13, P 14, Q4).

Табличная интерпретация структур показателей приведена на рис. 9.5.

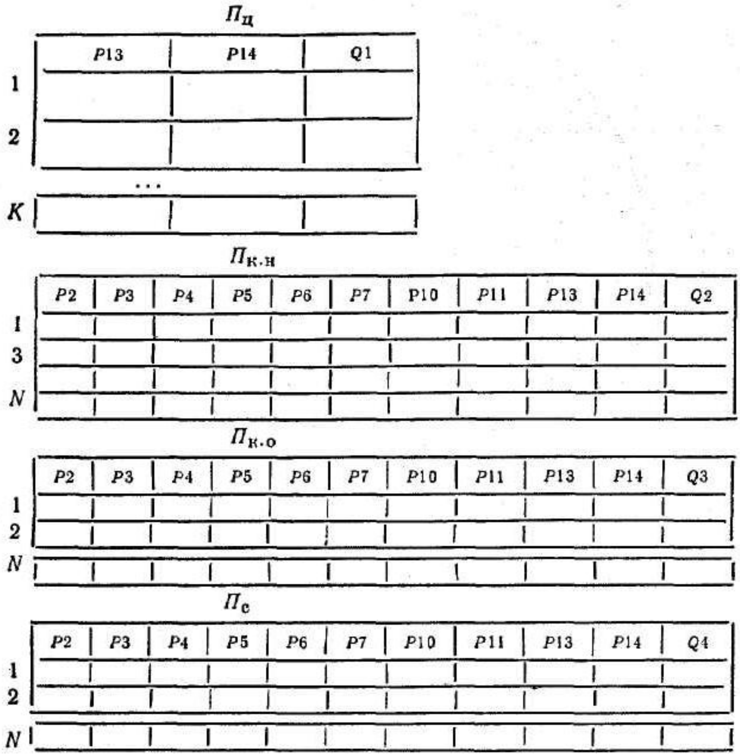


Рис. 9.5. Табличная интерпретация структур показателей

Заметим, что в обоих случаях массив показателей цен имеет длину *К,* отличную от длины составного массива приказов-накладных *N.*

Отдельно может существовать (в документе своей формы, на каком-то из носителей информации или в памяти машины) и каждый из остальных показателей. В возможности такого изолированного выделения и обособленного рассмотрения с полным при необходимости абстрагированием от документов или других аналогичных носителей данных заключается одно из важных преимуществ показателей как разновидности составных единиц информации. При этом расчленение составной единицы информации на составляющие показатели (декомпозиция) с их обособленным дальнейшим существованием не означает нарушения связи между ними и сохраняет возможность последующего объединения (композиции) при необходимости в СЕИ более сложной структуры благодаря наличию в их составах одинаковых по форме признаков (родственности по форме) и, кроме того, некоторых признаков с одинаковыми значениями (родственности по значениям). Так, все признаки $П_{к.н}$, $П_{к.о}$ и $П_{с}$ одинаковы по форме, т. е. их призначные части совпадают. Некоторые из признаков *(Р*2, *Р*3, *Р*4, *Р*5, *Р*6, *Р*10 и *Р*11) одинаковы по значению в пределах одной записи СЕИ, а другие совпадают по значениям соответствующих позиций (например, по одним и тем же номенклатурным номерам *Р*14 из показателей $П_{к.н}$, $П_{к.о}$, $П_{с}$). Между тем для объединения двух различных показателей в одну СЕИ в принципе достаточно их совпадения (родственности) по форме.

Тогда СЕИ с одинаковыми значениями этого признака будут слиты. Так, показатели *П.* (1 : *N). (а, б, в, г, д, х)* и *Р.*(1 : *N). (к, л, м, д, у),* где *х* и *у* — основания, могут быть объединены в составной массив *С.*(1 : *N).(а, б, в, г, к, л, м, д, х, у)* при условии, что реквизит-признак *д* из показателей *П* и *Р* обозначает один и тот же реквизит. При слиянии значений показателей *П* и *Р* возможны два случая. В первом случае каждому значению признака *д* из показателя *Р* соответствует одно и только одно значение этого признака из показателя *Р*. Правила образования составного объединенного показателя *С* в этом случае очевидны. Во втором случае такое соответствие значений реквизита-признака *д* не выполняется. Если некоторому значению признака *д* из показателя *П* нет соответствующего значения этого же признака из показателя *Р,* составной показатель *С* образуется следующим образом: значения реквизитов *а, б, в, г, д, х* берутся из показателя *П*, вместо значений реквизитов *к, л, м, у* используется символ «пусто». Если некоторому значению *д* из показателя *Р* нет соответствующего значения из показателя *П,* то составной показатель *С* образуется аналогично предыдущему при условии, что роли показателей *П* и *Р* изменяются.

Справедливо утверждение, что к любой составной единице информации можно применить декомпозицию. В результате получим некоторую взаимосвязанную совокупность показателей, адекватных исходной СЕИ.

Каждый показатель имеет множество значений, и получение любого из них осуществляется по алгоритму, свойственному данному показателю. Поэтому если расчленить информационную систему объекта (организации) на отдельные показатели и описать для каждого из них алгоритм получения, то при соответствующем отображении взаимосвязи между показателями и соблюдении предопределенной последовательности их образования можно иметь в совокупности общий комплексный алгоритм получения информации всей системы.

По своему составу (только одно основание и сравнительно небольшое число характеризующих его признаков, как правило, не более 20) показатели сравнительно однотипны, что позволяет эффективно использовать их в качестве единиц информации при проектировании информационного и программного обеспечения систем обработки информации.

Показатель можно применять как обобщающую единицу измерения объема данных. В роли измерителей «предметов труда» и «продуктов» обработки данных показатели более эффективны, чем такие единицы измерения, как «документ», «документострока», «документопозиция», «графо-клетка», «слово», «знак» и др.

Применение в качестве единиц измерения графо-клеткн, слова, знака, символа, байта и т. п. позволяет довольно точно определить физические объемы данных. Но эти единицы измерения информации не обладают информативностью, поэтому на их базе нельзя получить ряда важных для характеристики информационной системы группировок. Например, нельзя определить объем данных производной и постоянной информации. Поэтому целесообразно их использовать в сочетании с более укрупненными единицами информации, обладающими таким свойством.

Измерение объема данных только в составных единицах информации и их позициях (записях) или в документах и документостроках (документопозициях) может дать неточное представление об объеме информации, поскольку существенно варьируются размеры массивов СЕИ.

Кроме того, такие измерители не позволяют получить распределение объемов данных по ряду характерных для процессов обработки данных разновидностей информации, поскольку в составе СЕИ могут быть ее составляющие с различной характеристикой (например, исходные и производные, входящие и исходящие, постоянные и переменные и т. д.), что связано с разной ролью в преобразованиях входящих в них реквизитов числового типа. Поскольку у показателя только один реквизит такого типа — основание, он не имеет этого недостатка и удобен для определения объемов информации в самых разнообразных разрезах, выполнения различных группировок в зависимости от используемой классификации. В табл. 9.2 для примера приведен удельный вес выраженной в показателях информации технико-экономического планирования ряда машиностроительных предприятий по разделам техпромфинплана и некоторым разновидностям показателей.

Таблица 9.2

Наименование участка планирования	Удельный вес, %						Показатель массовости расчетов*
	по числу форм показателей			по числу значений показателей			
	постоянных нормативно-расценочных	переменных	итого	постоянных нормативно-расценочных	переменных	итого	
Планирование производства	2,5	35,4	37,9	1,9	11,6	13,5	410
Планирование использования производственных мощностей	0,4	13,8	14,2	0,1	2,9	3,0	240
Планирование технического развития предприятия	1,1	4,0	5,1	0,1	0,0	0,1	15
Планирование труда и заработной платы	0,8	21,5	22,3	1,0	1,0	2,0	90
Планирование потребности предприятия в материалах	1,5	4,2	5,7	4,1	38,0	42,1	7900
Планирование себестоимости продукции	1,3	9,6	10,9	2,9	5,2	8,1	800
Составление финансового плана предприятия	1,0	2,9	3,9	18,2	13,0	31,2	8340
Итого	8,6	91,4	100,0	28,3	71,7	100,0	1120

* Среднее число значений на одну форму показателя.

Классификация показателей по функциям управления предприятий и организаций, по внутренним разделам этих функций, подсистемам, цехам, отделам и другим подразделениям, по задачам и т. п. вполне естественна, и измерение объема данных в этом случае более удобно и точно, чем в составных единицах информации, так как входящие в последние показатели могут возникать в различных подразделениях, на разных этапах, не в рамках одних подсистем и функций управления и т. д.

При классификации показателей выделяются следующие аспекты:
объект, состояние которого отображается показателем;
состояние объекта;
единица измерения основания;
стабильность значений показателя.

К наиболее общим группировкам по признаку «объект» отнесены показатели, определяющие население, природные ресурсы, общественный продукт, структурные единицы (число предприятий, организаций, учреждений, территориальных образований и т. п.), информацию.

В этой группе особый интерес представляют показатели со значением основания, равным единице, в которых до процесса обработки наблюдается явление завуалированного основания. Такие показатели будем называть *булевскими.* Особенностью булевского показателя является альтернативность значения его основания, которое сводится к одному из двух значений: единице или нулю. При первом значении показатель как бы подлежит регистрации в связи с наличием наблюдаемого объекта и присущих ему признаков. При втором, нулевом, значении как бы устанавливается отсутствие данных признаков, а следовательно, и всей единицы наблюдения. Из этого вытекает принципиальная возможность образования показателя на базе любого характеризующего объект признака. Основание такого показателя будет указывать на наличие или отсутствие данного признака (симптома), выражая это альтернативно в двоичной системе счисления или в виде булевской переменной.

При внешней простоте булевские показатели дают возможность осуществлять обобщение, агрегацию, в результате которых создаются укрупненные показатели. Чем более обобщенным, агрегированным становится показатель, тем он менее конкретен, и, наоборот, чем больше показатель отражает условия, в которых он фиксировался, тем менее он обобщался в процессе обработки. Например, первичный показатель бланка переписи населения имеет значительно больше признаков, чем любой сводный показатель, получаемый при разработке данных переписи населения.

С видом показателя, регистрируемого в сфере первичного учета, тесно связаны вопросы углубления и упрощения учета. Для получения наиболее полной информации целесообразнее производить съем показателей с наибольшим числом сопутствующих признаков, т. е. булевских. Но регистрация булевских показателей ведет к существенному увеличению объема информационных работ. Поэтому практически целесообразнее съем показателей со значениями оснований более единицы (показателей счета). При укрупненной регистрации теряется часть признаков и, следовательно, ухудшаются возможности углубленного анализа, но зато существенно сокращаются затраты на первичный учет.

Каждая сущность обладает достаточно большим числом признаков и с нее могут быть сняты самые разнообразные показатели. Однако регистрация всех признаков невозможна и бессмысленна. Для практических целей регистрируются лишь важнейшие признаки качественного и количественного характера. Некоторые из них имеют особое значение, поскольку непосредственно участвуют в последующей обработке и выводе обобщающих показателей. Эти количественные признаки снабжаются другими сопутствующими признаками и вместе с ними образуют такие информационные совокупности, которые являются минимальными, но вполне достаточными для поставленных целей анализа. Таков процесс превращения количественных признаков в основания, анализ которого позволяет отметить наиболее существенные отличия признаков от оснований даже в момент съема показателей. По окончании же съема каждый из зарегистрированных показателей существует в самостоятельном виде.

По признаку «состояние» показатели подразделяют на статические и динамические.

К *статическим* отнесены показатели, характеризующие отображаемый объект (их группу) или его свойства на определенный момент времени (например, природные ресурсы, основные производственные фонды предприятий определенной отрасли, площадь некоторого цеха, численность работающих, цена продукции, тариф за услуги, себестоимость единицы продукции).

Показателями *динамики* (движения) характеризуются процессы деятельности или изменения состояния отображаемого объекта (их группы) в течение определенного периода, например: движения населения, включая естественное (рождаемость, смертность) и механическое (въезд, выезд) за полугодие; движения трудовых ресурсов, повышения квалификации, образования, трудового процесса, баланса рабочего времени за месяц; изменения природных ресурсов, геологоразведочных работ, охраны окружающей среды за пятилетие; движения общественного продукта (производства, обращения, распределения и перераспределения, использования) за год.

В литературе одной из наиболее распространенных является классификация показателей по характеру единиц измерения основания. Как правило, выделяются абсолютные и относительные показатели.

Абсолютными называются показатели, основания которых получаются прямым счетом, измерением и взвешиванием, алгебраическим суммированием других абсолютных показателей, а также различные средние абсолютные показатели.

В число *относительных* входят показатели, значения оснований которых получены отношением оснований двух других показателей (показатели структуры, характеризующие удельный вес части в целом; координации как отношения двух частей, из которых одна выбрана базой; интенсивности как соотношения показателей, отображающих разные, но взаимосвязанные объекты и процессы, например фондоотдачи, материалоемкости, производительности труда и т. п.), относительные средние показатели и др.

В практике машинной обработки данных по стабильности значений различают показатели переменные и постоянные.

Под *постоянными* понимаются показатели, номенклатура которых (по объему) в пределах данной формы, а также значение отдельных показателей номенклатуры остаются относительно стабильными сравнительно длительный период времени.

Количественным параметром, характеризующим постоянство показателей, служит коэффициент стабильности S. Определим этот коэффициент для любого показателя следующим образом:

$$S_{\Delta t} = \frac{V}{V_1},$$

где Δt — некоторый заданный интервал времени (t_1, t_2), причем $\Delta t = t_2 — t_1$;

V — общее число значений показателя на начало рассматриваемого интервала времени t_1;

V_1 — число значений показателя, оставшихся неизменными на всем временном интервале (t_1, t_2).

В экономике к постоянным целесообразно относить такие показатели, у которых $S_{\Delta t} \geq 0,8$ при Δt, равном одному году.

Остальные показатели относятся к *переменным,* например, показатель выработки, поскольку количество его значений меняется ежемесячно довольно резко.

В группе постоянных показателей выделяют *нормативно-расценочные,* к которым относятся нормы (нормативы), расценки, цены, постоянные коэффициенты и процентные ставки. Иногда выделяют также показатели *состава,* например вхождения деталей в узлы, другие соединения и изделия, применяемости материалов и др.

Для обеспечения единства понятий, наименований, структуры и кодов технико-экономических и социальных показателей, применяемых в статистических и других документах, а также для обеспечения возможности эффективной организации обработки, хранения и поиска данных с применением современной вычислительной техники разработан классификатор технико-экономических и социальных показателей (КТЭСП).

В КТЭСП осуществлена систематизация показателей по основным областям измерений в экономике; выделены типы показателей и признаки, по которым могут осуществляться группировка, сводка и анализ взаимосвязей показателей при решении задач статистики; даны средства терминологической нормализации наименований показателей и система классификационного кодирования типов показателей и классификационных группировок.

В КТЭСП принята следующая структуризация показателя: формальная и содержательная характеристика (объект), основные классификационные признаки для данного типа показателей, дополнительные признаки показателя, единица измерения.

По формальной характеристике различаются:
- основные формы показателя (в качестве которых приняты, как правило, абсолютные показатели, а также относительные показатели интенсивности и некоторые средние показатели);
- производные показатели (абсолютные разностные и итоговые показатели, относительные показатели динамики, структуры, а также средние по временным интервалам и средние по однородным объектам).

По содержательной (социально-экономической) характеристике показатели разделяются на следующие типы: численность наличного населения, численность постоянного населения, численность работников, численность рабочих, основные фонды, ввод в действие основных фондов, капитальные вложения, нормативная чистая продукция и т. п.

Для каждого типа показателей в КТЭСП даны наборы основных классификационных признаков, конкретизирующих социально-экономическую характеристику показателей. Например, для показателей типа «основные фонды» выделяются признаки «виды основных фондов», «виды оценки основных фондов», «возрастные группы» и др.; для показателей типа «численность рабочих» — признаки «пол», «возраст», «образование», «профессия», «тарифные разряды» и т. д.

К дополнительным признакам показателей отнесены время, функция управления, хозяйственный объект. Признаку «время» соответствует, например, список, включающий такие позиции, как «за отчетный период», «на начало планового периода», «за 2010 г.», «на 1 января 2010 г.» и т. д. Признаку «функция управления» соответствует список, содержащий позиции «план», «фактически», «ожидаемое выполнение», «норматив» и т. п. Признаку «хозяйственный объект» соответствует ряд классификаторов, характеризующих территориальные и организационно-хозяйственные единицы и их совокупности. Среди них классификатор отраслей (КО), классификатор предприятий и организаций (КПО), система обозначений объектов административно-территориального деления и населенных пунктов (СОАТО) и др.

КТЭСП включает следующие компоненты:
- рубрикатор (общую классификационную схему показателей);
- систематический перечень типов и классификационных группировок показателей (перечень вариантов структуры показателей, упорядоченный в соответствии с рубрикатором);
- перечень списков, классификаций и номенклатур, входящих в уже разработанные республиканские, межведомственные и ведомственные классификаторы, а также списки, специально разработанные в рамках КТЭСП.

Рубрикатор КТЭСП включает укрупненную классификационную схему, содержащую 13 рубрик, и развернутую классификационную схему, включающую дополнительно около 200 подрубрик. Рубрикатор имеет нестрогую иерархию, т. е. допускается включение отдельных подрубрик более чем в одну рубрику, что позволяет полнее отобразить взаимосвязи показателей и возможности их использования в разных областях статистической работы. В рубрикаторе нашли отражение также наиболее важные деления в унифицированных системах статистической документации и в структурах статистических органов.

Систематический перечень типов и классификационных группировок показателей включает более 4 тыс. позиций, распределенных по подрубрикам нижнего уровня.

Нормализованное наименование показателя получается путем перечисления наименований признаков, взятых из систематического перечня, например «Численность наличного населения, мужчин, в возрасте 18 лет и старше». Классификационный код показателя записывается путем указания кодов наименований признаков и кодов значений каждого признака. Рассмотренному выше показателю соответствует классификационный код 1001.2521—1.3000—104, в котором 1001 — код наименования «Численность наличного населения», 2521 — код наименования «Пол», 1 — код значения «Пол = мужской», 3000 — код наименования «Возраст», 104 — код значения «Возраст» $\geq$ 18.

Внедрение наименований и кодов показателей, регламентированных в КТЭСП, позволяет систематизировать и унифицировать обработку информации.

10. Информационные отношения

10.1. Основные понятия и свойства информационных отношений

Между различными объектами (явлениями), свойствами объектов и объектами и их свойствами существуют всевозможные объективные, определяемые предметной областью *отношения,* которые при информационном отображении объектов и присущих им свойств переносятся на отношения между СЕИ и реквизитами, отображающими объекты с разных сторон, и реквизитами, отображающими отдельные свойства объектов.

Для отображения объективных взаимосвязей между объектами реального мира, свойствами объектов, процессами с их участием и т. п. используется аппарат дискретной математики.

Фундаментальным понятием общей теории информации есть понятие *отношение*, которое используется для определения связей между объектами или понятиями.

В информациологии, как и в жизни, разные объекты могут иметь какое-то отношение к другим объектам или не иметь. Например, родственные отношения, дружеские отношения, дипломатические отношения, равноправные отношения.

Отношение можно задать в виде неполных предложений - предикатов, например, „менше чем ...”, „больше чем ...”, „еквивалентно”, „конгруэнтно” и т.п.

Рассматривая многочисленные примеры, мы делаем вывод, что отношения отличаются от соответствий тем, что определяются на одном множестве. Без толку было бы говорить об отношении между студентами и оценками. О дипломатических, родственных или любых других отношениях между должностью и зарплатой. Для определения конкретного отношения требуется определить множество, и пары, для которых имеет место данное отношение. Например, на множестве людей отношения "быть братом", "учиться в одной группе" или "быть выше ростом".

Естественно, что при соответствующем выборе отношения его аргументы могут быть связаны довольно просто. Они не обязательно должны быть связаны какой-нибудь простой или очевидной формулой, хотя в ситуациях, когда нужно осуществить некоторые вычисления, иногда можно найти удачное описание отношений.

Прежде с тем как подойти к этому вопросу с математической точки зрения, рассмотрим несколько случаев, которые возникают из рассмотрения следующей простой ситуации (которая также приводит к возникновению понятия отношения). Предположим, что для некоторой конечной вычислительной машины мы имеем множество программ P, конечное множество значений данных D и множество результатов R. Если мы выберем конкретное значение из D, то оно может использоваться в некоторых программах по P, и для каждой программы по P существует совокупность значений из D, которая в ней используются. Таким образом, мы имеем соответствие между значениями данных и программами, и, следовательно, существуют элементы в $D\times P$, которые представляют интерес. Аналогично, если мы сведем рассмотрение к $p\in P$, то p связывает соответствующие значения данных из D с результатами из R. Можно рассмотреть данные, что приводят p к остановке, или результаты, которые не могут быть получены из r. Следовательно, мы приходим к подмножеству $D\times R$. (При переработке данных от D к R возникают некоторые ассоциации, которые могут оказаться полезными для запоминания терминологии.)

Перейдем теперь к формальным описаниям отношений.

1. Бинарные отношения Многие информационные задачи получают удобную интерпретацию на языке теории отношений. Все арифметические операции - это по существу некоторые отношения между числовыми множествами. Множество деталей остается складским имуществом до тех пор, пока между ними не реализуются определенные отношения, которые превращают эти детали в какой-нибудь механизм или устройство (телевизор, станок, дом, мост и т.п.).

Разнообразные отношения складываются между людьми — родители и дети, начальники и подчинены, учителе и ученике.

Отношения между элементами двух множеств, *т.е. бинарные отношения* устанавливают соответствие элементов одного множества X элементам другого множества Y. Ясно, что такое отношение может быть задано некоторой совокупностью *упорядоченных пар* (x, y), которые являются элементами множества $X\times Y$. Это совсем не значит, что всегда нужно перечислять все такие пары. Часто отношение задается некоторым свойством, выраженным в словесной или символической форме.

Если A — отношение, то *соотношение* xAy можно записать также в виде $(x, y)\in A$, где $A\subset X \times Y$. Например, выражение $3 < 7$ и $(3,7) \in <$ обозначает одно и тоже, но первое из них обычнее. В то же время $(7,3)\in <$ означало бы $7<3$, что неверно. Таким образом, в общем случае переставлять элементы в паре (x, y) нельзя, что и подчеркивается названием этой пары — *упорядоченной*. Элемент x называют *первой координатой,* а элемент y - второй *координатой* упорядоченной пары.

2. Области определения и значений. Множество первых координат x является *областью определения (левой областью)* $D_o(A)$, а множество вторых координат — *областью значений (правой областью)* $D_З(A)$ отношения A. Если $x\in X$ и $y\in Y$, то $D_o(A)\subset X$ и $D_З(A)\subset Y$. В таких случаях говорят, что A есть *отношение от* X *к* Y. Его называют также *соответствием* и обозначают $X\rightarrow Y$. Если $Y=X$, то любое отношение xAy является подмножеством множества $X \times X$ и называется *отношением в* X.

Пусть, например, $X = \{2, 3\}$ и $Y = \{3, 4, 5, 6\}$. Произведение этих множеств $X\times Y =\{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5),(3, 6)\}$. Отношение «быть делителем» есть множество $A = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$, отношение = есть множество $B = \{(3, 3)\}$, а отношение > есть пустое множество Ø. Области определения и значений отношения A — это соответственно множества $D_o(A)=\{2, 3\}=X$ и
$D_З(A) = \{3, 4, 6\}\subset Y$.

Если область определения отношения совпадает с некоторым множеством X, то говорят, что отношение *определено на* X. Подобный случай имеет место в приведенном выше примере отношения A «быть делителем». Очевидно, для отношения включения $\subset$ подмножеств универсума U областью определения и областью значений служит множество подмножеств $P(U)$ этого универсума.

Заслуживают внимания три частичных случая отношений в X:

1) *полное (универсальное) отношение* $P=X\times X$, которое имеет место для каждой пары (x_1, x_2) элементов из X (например, отношение «работать в одном отделе» на множестве сотрудников данного отдела);

2) *тождественное (диагональное) отношение* E, равносильно $x=x$ (например, равенство на множестве действительных чисел);

3) *пустое отношение*, которому не удовлетворяет ни одна пара элементов из X (например, отношение «быть братом» на множестве женщин). Очевидно, для любого отношения A в X справедливо $\varnothing\subset A\subset P$.

3. Сечение. Рассмотрим отношение $A\subset X\times Y$; если $x_i\in X$, то *сечение* по x_i отношения A, обозначаемое $A(x_i)$, есть множество $y\in Y$ таких, что $(x_i, y)\in A$. Множество всех сечений отношения A *называют фактором-множеством* Y по отношению A и обозначают Y/A. Оно полностью определяет отношение A.

Пусть например, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ и $A = \{(x_1\ y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2\ y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1, (x_3, y_2), (x_3, y_2), (x_4, y_3), (x_5,y_2), (x_5, y_4)\}$. Очевидно, $A(x_1)= \{y_1, y_3\}$; $A(x_2) = \{y_1, y_3, y_4\}$ и т.п. Если записать под каждым элементом с X соответствующее сечение отношения A, то элементы второй строки образуют фактор-множество Y/A:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \{y_1, y_3\} & \{y_1, y_3, y_4\} & \{y_1, y_2, y_4\} & \{y_3\} & \{y_2, y_4\} \end{pmatrix}.$$

Объединение отношений по элементам некоторого подмножества $B\subset X$ является сечением $A(Y)$ этого подмножества, т.е. $A(B)=\bigcup\limits_{x\in B} A(x)$. Так, $A = (x_2, x_3)= A(x_2)\cup A(x_3)= \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

4. Матрица отношения. Из предыдущего ясно, что конечное отношение можно представить с помощью фактор-множества. Другой способ — *матричный* — основан на представлении отношения соответствующей ему прямоугольной таблицей (матрицей). Ее столбцы отвечают первым координатам, а строки — вторым координатам. На пересечении i-го столбца и j-й строки ставится единица, если выполнено соотношения x_iAy_j, и нуль, если это соотношение не выполняется (нулевые клетки можно оставлять пустыми). Эта матрица содержит всю информацию об отношении A. Например, для отношения, рассмотренного в (3), матрица имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	1		
y_2			1		1
y_3	1	1		1	
y_4		1	1		1

Ненулевые элементы i-го столбца указывают на совокупность элементов $y\in Y$, представляющую собой сечение $A(x_i)$, например,

$$A(x_5) = \{y_2, y_4\}.$$

Полному отношению отвечает матрица, все клетки которой заполненные единицами, тождественному — единичная матрица, а пустому — нулевая матрица.

5. Симметризация отношения. Так как отношение — это множества, то над ними можно выполнять все теоретико-множественные операции. Кроме этого, определяются специфические для отношений операции: *обращение (симметризация)* и *композиция.*

Отношения, *симметричное (обратное)* некоторому отношению $A\subset X\times Y$, обозначается через A^{-1} и представляет собой подмножество множества $Y\times X$, образованное теми парами $(y, x)\in Y\times X$, для которых $(x, y)\in A$. Переход от A до A^{-1} осуществляется взаимной перестановкой координат каждой упорядоченной пары. Так, обратное отношение для *«x* есть делитель *y»* будет «*y* делится на *x»* и для приведенного в (2) примера выражается множеством $\{(4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3)\}$.

При переходе от A до A^{-1} область определения становится областью значений, и наоборот. Матрица обратного отношения выходит транспонированием исходной матрицы.

6. Композиция отношений. Пусть даны три множества X, Y, Z и два отношения $A\subset X\times Y$ и $B\subset Y\times Z$. *Композиция отношений A* и *B*

есть отношение C, состоящее из всех тех пар $(x, z)\subset X\times Z$, для которых существует такое $y\in Y$, что $(x, y)\in A$ и $(y, z)\in B$.

Сечение отношения C по x совпадает с сечением отношения B по подмножеству $A(x)\subset Y$, т.е. $C(x)=B(A(x))$.

Рассмотрим, например, два отношения: A из примера (3) и

$$B=\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3), (y_4, z_3)\}.$$

Очевидно,

$C=\{(x_1, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1),(x_3, z_2), (x_3, z_3), (x_4, z_4), (x_5, z_1), (x_5, z_3)\}$

Сечение

$$C(x_3)=\{z_1, z_2, z_3\}.$$

С другой стороны

$$B(A(x_3))=B(\{y_1, y_2, y_4\})=\{z_2\}\cup\{z_1, z_2\}\cup\{z_3\}=\{z_1, z_2, z_3\}.$$

Теперь нужно решить вопрос, как записать композицию отношений A и B. Если исходить из соотношений xAy и yBz, то естественно записать $xCz=xABz$, т.е. $C=AB$. Но при этом соотношение $C(x)=Y(A(x))$ приняло бы неудобную форму $(AB)(x)=Y(A(x))$. Поэтому композицию C отношений A и B по обыкновению записывают как $C=BA$ (или $C=B^{o}A$) тогда

$$(BA)(x)= B(A(x)).$$

Как увидим дальше, такая запись имеет и другие преимущества.

Композиция отношений обладает ассоциативным законом, т.е.

$$D(BA)=(DB)A=DBA,$$

но не коммутативна

$$(BA\neq AB).$$

Можно также показать, что

$$(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}.$$

7. Представление композиции отношений матрицами. Композиция отношений

$$A\subset X\times Y \text{ и } B\subset Y\times Z$$

наглядно представляется с помощью матриц. Прежде всего необходимо к матрице отношения A достроить матрицу отношения B.

Матрица композиции $C=BA$ представляется как произведение матриц отношений B и A (в порядке их следования), которое выполняется по обычному правилу умножения прямоугольных матриц с последующей заменой отличного от нуля элемента результирующей матрицы единицей. Так, для рассмотренного примера имеем:

	y_1	y_2	y_3	y_4
z_1		1		
z_2	1	1		
z_3			1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	1		
y_2			1		1
y_3	1	1		1	
y_4		1	1		1

=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z_1			1		1
z_2	1	1	2		1
z_3	1	2	1	1	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z_1			1		1
z_2	1	1	1		1
z_3	1	1	1	1	1

Приведенное выше правило легко доказывается на основе выражения для элемента

$$c_{ik}=b_{i1}a_{1k}+ b_{i2}a_{2k}+\ldots+b_{in}a_{nk}=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{jk}$$

произведения матриц, соответствующих отношениям B и A. В этом выражении слагаемое $b_{ij}a_{jk}$ равняется единице при условии, что $a_{jk}=b_{jk}=1$, а это возможно только, если имеют место соотношения x_iAy_j и y_jBz_k, т.е. x_iBAz_k. Если в выражении для c_{ik} не одно, а несколько единичных слагаемых, то каждое из них соответствует одному и тому же соотношению x_iBAz_k и их сумма должна быть заменена единицей.

8. Общие свойства отношений.

Рассмотрим некоторые из основных свойств, которыми могут быть наделенные отношения. Говорят, что свойство имеет место, если выполняется соответствующее условие.

Пусть A — бинарное отношение в множестве X. Определим общие свойства таких отношений, которые должны выполняться для всех $(x_i, x_j)\in A$. Говорят, что $A\subset X\times X$:

1) *рефлексивно,* если $A\supset E$ (E — тождественное отношение), т.е. оно всегда выполняется между объектом и им самым: xAx (равенство, самообслуживание);

2) *антирефлексивно,* если $A\cap E=\varnothing$, т.е. может выполняться только для несовпадающих объектов: из $x_i\ A\ x_j$ следует $x_i\neq x_j$ (строгое неравенство, «быть старше»);

3) *симметрично,* если $A=A^{-1}$, т.е. при выполнении соотношения x_iAx_j выполняется и соотношение x_jAx_i (расстояние между двумя точками, «быть братом»);

4) *асимметрично,* если $A \cap A^{-1} = \varnothing$, т.е. из двух соотношений x_iAx_j и x_jAx_i по меньшей мере одно не выполняется (строгое включение, «быть отцом»); если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно;

5) *антисимметрично,* если $A \cap A^{-1} \subset Э$, т.е. оба соотношения x_iAx_j и x_jAx_i выполняются одновременно только тогда, когда $x_i = x_j$ (нестрогое неравенство $\leq$, включение);

6) *транзитивно,* если $AA \subset A$, т.е. из x_iAx_j и x_jAx_k следует x_iAx_k («быть делителем», «быть родственником»).

Для рефлексивного отношения все элементы матрицы на главной диагонали — единицы, а для антирефлексивного — нули. Симметричность отношения влечет и симметричность матрицы, асимметричность отношения — несимметричность матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали, антисимметричность отношения — только несимметричность матриц. В матрице транзитивного отношения для каждой пары единичных элементов, один из которых расположен в i-м столбце и j-й строке, а другой в j-м столбце и k-й строке, обязательно существует единичный элемент, расположенный в клетке на пересечении i-го столбца и k-й строки (наличие единичных элементов на главной диагонали не нарушает транзитивности) .

В приведенной ниже таблице, отдельные классы отношений определяются перечислением присущих им свойств.

Класс отношения	Рефлексивность	Антирефлексивность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность
Эквивалентность	+		+			+
Толерантность	+		+			
Квазипорядок	+					+
Строгий порядок		+		+		+
Нестрогий порядок	+				+	

Существует много других свойств отношений, которые можно было бы рассмотреть. Однако рассмотренные выше свойства являются наиболее важными в теории информации и будут часто использоваться в данной теории.

9. Многоместные отношения. Отношение может быть определено не только для пар объектов, но и для троек, четверок и т.д.

Отношение n объектов *(n-местное отношение)* определяется как множество n-мерных векторов $(x_1, x_2, ..., x_n)$, являющееся подмножеством произведения

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n,$$

причем

$$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n.$$

Многомерные векторы можно определить в терминах упорядоченных пар, например тройка (x_1, x_2, x_3) рассматривается как упорядоченная пара $((x_1, x_2), x_3)$, где первая координата (x_1, x_2) сама является упорядоченной парой, причем

$$(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

Вообще, n-мерный вектор выражается как упорядоченная пара через $((x_1, x_2, ..., x_{n-1}), x_n)$, если определено $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.

Примером трехместных (тернарних) отношений есть: арифметические операции над числами, отношение между родителями и детьми (отец, мать, ребенок) и т.п. Пропорция $x : y = z : u$ иллюстрирует четырехместное отношение. Множество, которое задается с помощью общего свойства элементов из некоторого универсума, можно рассматривать как *одноместное (унарне)* отношение в этом универсууме.

10.2. Виды и типы множественных отношений

Изучение информационных отношений, их разновидностей и механизма весьма важно для анализа информации. Отношения выступают в качестве важнейших компонентов описания данных.

Рассмотрим основные виды отношений - эквивалентности, порядка, доминирование, толерантности и др.

10.2.1. Разбиения и отношения эквивалентности

Во многих информационных задачах берутся большие множества и разбиваются таким образом, чтобы все информационные ситуации можно было исследовать на нескольких правильно выбранных примерах. Например, один с путей получения качественной оценки информационных характеристик языка программирования — это посмотреть конкретные программы, написанные на этом языке. Однако каждый язык, включая язык высокого уровня, порождает бесконечное множество программ, и, следовательно, мы должны выбирать программы так, чтобы они правильно отражали достоинства и недостатки языка. Чтобы быть более конкретными, будем в дальнейшем предполагать, что язык имеет три основные управляющие структуры и четыре метода доступа и более у него нет никаких особых свойств. Мы могли бы в качестве примера взять семь программ, каждая из которых включает только одну информационную характеристику языка (хотя, вообще говоря, каждая программа может использовать более чем одну информационную характеристику языка). Исследование этих программ тогда могло бы покрыть большую часть информационных свойств языка. Математически это можно определить следующим образом.

Определение. Пусть A — непустое множество и $\{A_i\}$ — совокупность подмножеств (n = 1, ..., n, $n \in N$) таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

Совокупность этих подмножеств называется *покрытием А.*

Пример 1.

$\{A, B\}$ — покрытие $A \bigcup B$,

$\{A, A \bigcup B, B, C)$ — покрытие $A \bigcup B \bigcup C$.

Используя понятие покрытия, можно обеспечить, что бы ни одно из свойств не было пропущенно, так как каждый элемент включен по крайней мере в одно из подмножеств покрытия. Однако в общем случае могут встречаться случаи дублирования. Если в дальнейшем потребовать, чтобы элементы покрытия попарно не пересекались, то дублирования не будет. Отсюда возникает понятие разбиения.

Определение. *Разбиением* непустого множества A называется совокупность подмножеств $\mathcal{P}(A)$ таких, что объединение всех элементов $\mathcal{P}(A)$ совпадает с A и все элементы $\mathcal{P}(A)$ взаимно не пересекаются, т.е. A разбито таким образом, что каждый элемент A содержится только в одном подмножестве разбиения

Пример 2.

$\{A, A'\}$ — разбиение $\mathcal{E}$,

$\{A \bigcap B, A \bigcap B', A' \bigcap B, A' \bigcap B'\}$ - разбиение $\mathcal{E}$,

$\{A \backslash B, A \bigcap B, B \backslash A\}$ - разбиение $A \bigcup B$.

Разбиение определяется однозначно, и части разбиения индуцируют особый род отношения, который называют отношением *эквивалентности*. Эти отношения ведут себя подобно отношению «=»

между числами или множествами. Выделяя основные свойства равенства, мы приходим к следующему определению.

Определение. Бинарным отношением на множестве называют *отношением эквивалентности,* если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение эквивалентности представляет собой экспликацию (перевод интуитивных представлений в ранг строгих математических понятий) таких повседневных слов как «одинаковость», «неотличимость», «взаимозаменяемость».

Примерами отношений эквивалентности есть отношения параллельности на множестве прямых некоторой плоскости; подобия на множестве треугольников; принадлежности к одной функциональной группе объектов или к одному классу типоразмеров и т.д.

Выражение „*отношение эквивалентности"* будем использовать при выполненные следующих условий (свойств):

1) каждый элемент эквивалентен сам себе;

2) выражение, что два элемента являются эквивалентными, не нуждается в уточнении того, какой из элементов рассматривается первым, а какой вторым;

3) два элемента, которые эквивалентны третьему, эквивалентны между собой.

Эквивалентность, как уже было сказано, удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и, по обыкновению, обозначается знаком ~. При этом $x \sim y$ означает, что упорядоченная пара (x, y) принадлежит множеству $A \subset M \times M$, что является отношением эквивалентности в множестве M.

Свойства эквивалентности записываются таким образом:

1) $x \sim x$ (рефлексивность);

2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность);

3) из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$ (транзитивность).

Таким образом, отношение A называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Пример.

а) На множестве всех треугольников отношение, которое определяется как $\{(x,y)$: x и y имеют одинаковую площадь$\}$, является отношением эквивалентности.

б) Имеет место следующее отношение, которое определено на множестве всех программ: $\{(a,b)$: a и b вычисляют одну и ту же функцию на определенной машине}. Это отношение является отношением эквивалентности.

Классы эквивалентности. Важнейшее значение эквивалентности состоит в том, что это отношение определяет информационный признак, который допускает *разбиение* множества M на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности.* Наоборот, всякое разбиение множества M на непересекающиеся подмножества определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности.

Например, отношение «проживать в одном доме» в множестве жителей города является эквивалентностью и разбивает это множество на непересекающиеся подмножества людей, являющихся соседями по дому.

Пример. Пусть s фиксированный элемент N; определим отношение A_s на Z:

$$A_s = \{(x,y): x\text{-}y=ns, \text{ где } n\in Z\}.$$

Рассмотрим случай s=10. Тогда

$$[1]=\{11, 21, -9, 10976631,...\},$$
$$[1066]=\{66, 226, -24,...\}$$

и т.д.

В действительности есть только десять разных классов эквивалентности. Целые 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 приналежат разным классам. Поэтому мы можем использовать их в качестве представителей этих классов.

Система представителей. Все элементы, которые принадлежат некоторому классу M_i разбения $\{M_1, M_2, ...\}$ множества M, связанны отношениям эквивалентности. Они взаимозаменяемые в том смысле, что любой из этих элементов определяет данный класс, т.е. может служить его *представителем (эталоном).* Подмножество из M, содержащее по одному и только по одному элементу из каждого класса некоторого разбиения, называют *системой представителей* соответствующего отношения эквивалентности. Множество всех классов разбиения множества M, определенного отношением эквивалентности A, образовывает фактор-множество M/A.

Например, отношение параллельности определяет разбиение множества прямых на плоскости на классы, каждый из которых образован множеством параллельных между собой прямых и характеризуется некоторым направлением (следует также считать, что прямая параллельна сама себе). Каждая из параллельных прямых может служить представителем данного класса, а само направление есть класс эквивалентности. Множество всех направлений составляет фактор-множество множества всех прямых по отношению параллельности.

Классы вычетов по модулю *m*. Рассмотрим отношение сравнения по модулю m на множестве натуральных чисел, что записывается как $x=y \pmod m$ и означает: x сравнимо с y по модулю m (m — целое положительное число, не равное нулю), если $x–y$ делится на m. Целые числа, которые сравнимы по модулю m, связанны соотношениям $x=y+km$ (k — целое число) и образовывают подмножество целых чисел, которые имеют одинаковый остаток j при делении на m. Так как эти подмножества не пересекаются, они являются классами эквивалентности, а в качестве представителя каждого из них естественно выбрать остаток $j = 0, 1, 2, ..., m—1$. Таким образом, *отношение сравнения по модулю* m определяет разбиение множества натуральных чисел на m классов $M_0, M_1, M_2,..., M_{m—1}$, где $M_j=\{j, j+m, j+2m, ...\}$ — счетное множество, которое называют *классом вычетов по модулю* m.

Например, при $m=4$ имеем

$$M_0 =\{0, 4, 8, 12, ...\}; \quad M_1 = \{1, 5, 9, 13, ...\};$$
$$M_2 = \{2, 6, 10, 14, ...\}; \; M_3 = \{3, 7, 11, 15, ...\}.$$

Представителями классов эквивалентности есть числа 0, 1, 2 и 3, так как

$$0 = 4(\mathrm{mod}4) = 8(\mathrm{mod}4) = ...; \; 1 = 5(\mathrm{mod}4) = 9(\mathrm{mod}4) = ...;$$
$$2 = 6(\mathrm{mod}4) = 10 (\mathrm{mod}4) =... \text{ и } 3 = 7(\mathrm{mod}4) = 11 (\mathrm{mod}4) = ...$$

Таким образом, множество целых чисел разбивается отношением сравнения по модулю 4 на четыре класса эквивалентности. Внутри каждого класса эти числа неразличимы ($4 \sim 0$, $5 \sim 1$, $6 \sim 2$, $7 \sim 3$ и т.д.).

При $m = 1$ разбение состоит из единого класса, который совпадает с исходным множеством, т.е. имеем *полное отношение эквивалентности,* при котором любые два элемента эквивалентны (все целые числа делятся на единицу). Отношение $x = y \pmod 2$ разбивает множество целых чисел на классы четных и нечетных чисел.

Значение рассмотренного примера настолько большое, что много авторов принимают для отношения эквивалентности A обозначение $a = b \pmod A$.

Идентификация элементов. Произвольное отношение эквивалентности определяет на некотором множестве обобщенную форму равенства. Классы эквивалентности состоят из всех тех элементов, которые неразличимы с точки зрения данного отношения эквивалентности. Разбиение множества на классы означает *идентификацию* эквивалентных между собой элементов. При этом каждый класс определяется его представителем (эталоном) и отождествляется с некоторым общим свойством или совокупностью свойств (параметров) входящих в него элементов (направления по отношению параллельности, остаток относительно сравнения по модулю m и т. д.).

Предельным случаем отношения эквивалентности есть *тождественное равенство.* Единственный элемент, равный какому-нибудь данному элементу, есть этот самый элемент. Следовательно, имеем самую полную разбивку, при которой классы эквивалентности содержат только по одному элементу исходного множества.

Классы номинальных значений. В условиях массового производства стандартной детали (или компонента) определяется *ряд номинальных значений* характеризующей ее величины (емкость конденсатора, диаметр и твердость шарикоподшипника, чистота поверхности детали, содержание примесей вещества и т.п.). Например, для постоянных резисторов с допустимым отклонением сопротивления +20% задается ряд: 1,0; 1,5; 2,2; 3,3; 4,7; 6,8. Величины номинальных сопротивлений должны отвечать числам, которые получаются умножением этих значений на 10^k, где k — целое положительное или отрицательное число (1,5 кОм; 4,7 Ом; 0,68 Ом; 1,0 МОм и т.п.). Этими указаниями руководствуются при проектировании изделий с резисторами и при их сортировке в процессе производства.

Задание ряда номинальных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ с допустимым отклонением Δx можно рассматривать как определение отношения эквивалентности в множестве M значений параметров x некоторых объектов. Неравенства $(x_i — \Delta x) \leq x < (x_i + \Delta x)$, $i = 1, 2.....n$ определяют n классов эквивалентности в множестве возможных значений x. Семейство представителей образуется совокупностью всех номинальных значений $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Объекты, параметры которых принимают эти значения, взаимозаменяемы (возможность замены любого объекта эквивалентным) и неразличимы (все эквивалентные объекты маркируются номинальным значением).

Матрица отношения эквивалентности. Элементы, которые принадлежат некоторому классу эквивалентности, попарно эквивалентны между собой, а их сечения совпадают. Итак, столбцы матрицы отношения эквивалентности для элементов одного класса одинаковы и содержат единицы во всех строках, которые соответствуют этим элементам. Так как классы эквивалентности не пересекаются, то в столбцах разных классов не будет единиц в одинаковых строках.

Расположим элементы множества так, чтобы в каждом классе эквивалентности принадлежащие ему элементы стояли рядом. Тогда единичные элементы матрицы отношения эквивалентности образуют непересекающиеся квадраты, диагонали которых располагаются по главной диагонали матрицы. Например, для разбиения на классы эквивалентности

$$M_1 = \{x_1, x_2, x_3\}; \; M_2 = \{x_4\}; \; M_3 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

имеем:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	1					
x_2	1	1	1					
x_3	1	1	1					
x_4				1				
x_5					1	1	1	1
x_6					1	1	1	1
x_7					1	1	1	1
x_8					1	1	1	1

Разбиение и отображение. Разбиение множества на классы можно связать с отображением $f : X \to Y$, которое ставит каждому элементу из X в соответствие один и только один элемент из Y (рис. 10.1). Собирая в один класс все те элементы из X, образы которых в Y совпадают, приходим к некоторому разбиению на непересекающиеся подмножества $\{X_1, X_2, ...\}$.

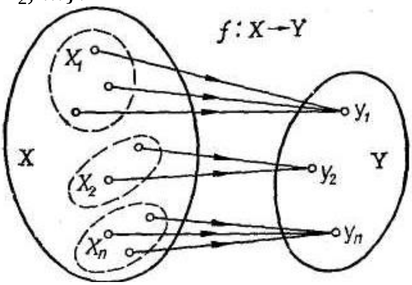


Рис. 10.1. Отображение $f : X \to Y$, порождающее отношение эквивалентности на X.

Каждое подмножество X_i характеризуется соответствующим ему образом $y_i \in Y$ и является классом эквивалентности. Обратно, если задана некоторая совокупность классов эквивалентности $\{X_1, X_2, ...\}$ множества X, то каждому элементу $x \in X$ можно поставить в соответствие тот класс X_i к которому принадлежит x. В результате получаем отображение множества X на множество классов $\{X_1, X_2, ...\}$.

Пусть, например, задано отображения

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_4, y_2), (x_5, y_1), (x_6, y_3)\}.$$

Тогда классы эквивалентности, которые отвечают образам y_1, y_2 и y_3, будут:

$$X_1=\{x_1, x_3, x_5\}; X_2=\{x_4\}; X_3=\{x_2, x_6\}.$$

Отображение X на $\{X_1, X_2, X_3\}$ выразится множеством упорядоченных пар

$$\{(x_1, X_1), (x_2, X_3), (x_3, X_1), (x_4, X_2), (x_5, X_1), (x_6, X_3),\}.$$

Итак, любое отображение $f : X \rightarrow Y$ порождает отношение эквивалентности на множестве X, причем $x_i \sim x_j$ если и только если $f(x_i)= f(x_j)$. Образы y_i классов эквивалентности X_1, X_2, ... могут служить эталонами и образовывают в совокупности систему представителей.

Измерения. Измерительное средство можно рассматривать как устройство, отображающее множества возможных значений измеренных величин x в множество элементов *функциональной шкалы* измерительного средства. При использовании цифровых измерительных средств *результат измерения* получается в виде некоторого n-разрядного числа $\alpha \in Y$, которое соответствует измеряемой величине x, заключенной в интервале $(\alpha_u -0,5) \leq x < (\alpha_u+0,5)$. Множество возможных значений x разбивается на 10^n классов эквивалентности, каждый из которых характеризуется соответствующим ему образом α_i, из множества чисел

$$\{0,1,2,...,10^n—1\}.$$

В аналоговых приборах функциональная шкала значений α_i по обыкновению наносится в виде меток на отрезок дуги или прямой, а результат измерения α_i определяется положением подвижного указателя относительно шкалы (иногда таким указателем является сам объект измерения, например, при измерении длины с помощью линейки или рулетки). Множество классов эквивалентности определяется соотношениями $(\alpha_u -\Delta\alpha) \leq x < (\alpha_u+\Delta\alpha)$, где $\Delta\alpha$ равно половине расстояния между соседними метками шкалы (предполагается, что шкала равномерная).

При разных измерениях, а также для градуировки приборов используют также *натуральные шкалы.* Например, шкала твердости минералов задается системой неравенств

$$x<\beta_0;\ \beta_0\leq x<\beta_1;\ \ldots;x<\beta_9\leq x<\beta_{10};\ \beta_{10}\leq x,$$

соответствующих 0, 1, 2, ..., 9, 10 баллам, причем β_i — твердости некоторых минералов (тальк, гипс, известковый шпат, ..., корунд, алмаз). Каждое неравенство определяет класс эквивалентности для твердости, а представителями этих классов является твердость β_i выраженная в баллах (β_i= 0, 1, ..., 10). Аналогично строятся натуральные шкалы температур, двенадцатибальная шкала скорости ветра, шкала чувствительности фотопленок и т.п.

10.2.2. Отношение порядка

Упорядоченность. *Отношение порядка* обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Его принято обозначать символом $\leq$. Запись $x \leq y$ означает, что пара (x, y) принадлежит множеству $A\subset M\times M$, являющемуся отношением порядка в множестве M, причем x *предшествует* y (или y идет за x). В принятых обозначениях свойства отношения порядка запишутся следующим образом:

1) $x \leq x$ (рефлексивность);

2) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (транзитивность);

3) из $x\leq y$ и $y\leq x$ следует $x = y$ (антисимметричность).

Множество, на котором определено отношение порядка, называют *упорядоченным,* и говорят, что *порядок введен* этим отношением. Множество *совершенно (линейно, просто), упорядочено,* если для любых двух его элементов имеет место, по крайней мере, $x \leq y$ или $y \leq x$ (его называют также *цепью).* Например, множество натуральных или вещественных чисел с естественным отношением порядка $\leq$, множество значений длин волн на шкале радиоприемника и т. д.

В общем случае может оказаться, что для некоторых пар (x, y) ни одно с соотношений $x \leq y$ и $y \leq x$ не имеет места (такие элементы называют *несравнимыми).* Тогда говорят, что множество *частично упорядочено.* Типичными примерами частичного порядка являются включение, отношение «быть делителем» и т.п. Так, отношение включения на множестве подмножеств некоторого универсума рефлексивно ($X\subset X$), транзитивно (если $X\subset Y$ и $B\subset Z$, то $X\subset Z$) и антисимметрично (из $X\subset Y$ и $Y\subset X$ следует $X=Y$), но среди всевозможных подмножеств имеются такие, что ни одно из соотношений $X\subset Y$ и $Y\subset X$ для них не имеет места. Аналогично не все пары элементов из множества целых чисел находятся в отношении «быть делителем».

Отношение строгого порядка. Отношения, которое наделено свойствами транзитивности и антирефлексивности (следствиями этих двух свойств есть также ассиметричность и антисимметричность), называют *отношением строгого порядка* и обозначают символом <. Свойство антирефлексивности означает, что элемент множества не может сравниваться сам с собой (как в случае строгого неравенства или строгого включения). Между отношениями строгого и нестрогого порядка имеют место соотношения: $(\leq) = (<) \bigcup E$ и $(<) = (\leq) \setminus E$, где E — тождественное отношение.

Отношение строгого порядка характерно для разного рода *иерархий* с подчинением одного объекта другому (или другим). Если для некоторой совокупности элементов из X справедливо соотношение $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, то в соответствии со свойством транзитивности $x_i < x_j$ $(i<j\leq n)$, т.е. отношение строгого порядка обуславливает как прямое, так и косвенное подчинение по старшинству. Говорят, что x_{i+j} покрывает x_i, если $x_i < x_j$, и не существует такого промежуточного элемента x, что $x_i < x < x_j$.

Последовательности. Элементы любого конечного множества M можно пронумеровать порядковыми числами 1, 2, 3, ..., n. Для счетного множества нумерацию следует понимать как взаимнооднозначное отображение множества натуральных чисел N на M, которое каждому числу i ставит в соответствие некоторый элемент x_i из M. Упорядоченное таким отображением множество $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ называется *последовательностью* (конечной или бесконечной). Элемент x_i из M называют *членом последовательности* с индексом i.

Если отношение строгого порядка на конечном множестве совершенно, то на этом множестве всегда можно выбрать такую последовательность всех его элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, что соотношение $x_i<x_j$ будет выполняться в том и только в том случае, когда $i < j < n$. Другими словами, любой совершенно строгий порядок на конечном множестве равносильен естественному порядку следования натуральных чисел. Если же порядок на конечном множестве не является совершенным, то элементы этого множества нельзя пронумеровать так, чтобы большим номерам отвечали старшие элементы.

Нумерация элементов множества устанавливает совершенно строгий порядок на этом множестве. Например, на спортивных соревнованиях жеребьевкой каждому спортсмену ставится в соответствие номер; термины в предметном указателе располагаются в соответствии с порядком следования букв алфавита (здесь предполагается соответствие между последовательностью букв и отрезком натурального ряда чисел).

Весовые функции. Пусть на множестве M определено отображения $f : M \to R$ (R — множество вещественных чисел), ставящее в соответствие каждому объекту x из M некоторое вещественное число $f(x)$. Это число называют *весом,* а отображение f — *весовой функцией.* Иногда понятие веса совпадает с буквальным смыслом этого слова (вес детали какого-нибудь механизма, атомный вес химического элемента, полезный груз автомашины в колонне и т.п.). Но весом может служить любая числовая характеристика объекта (сопротивление резистора, объем тела, площадь участка, число баллов спортсмена и т.п.).

Если отображение f однозначное, то на множестве M можно определить совершенно строгий порядок условием: $x<y$, если $f(x)<f(y)$. Действительно, поскольку не существует объектов с равными весовыми функциями, то для любой пары (x, y) справедливо или $f(x)<f(y)$, или $f(y)<f(x)$, т.е. все элементы сравнимы, и отношение антирефлексивно. В то же время оно транзитивно, так как для элементов $x, y, z \in M$ из $f(x)<f(y)$ и $f(y)<f(z)$ следует $f(x)<f(z)$.

Примерами совеошенно строгого упорядочения множества, на котором определено инъективное отображение (весовая функция) являются: периодическая система Менделеєва, расположение спортсменов по совокупности полученных баллов при условии, что нет одинаковых результатов и т.п.

Квазипорядок. Если отображение $f : M \to R$ не инъективно, т.е. два разных объекта x и y из M могут иметь равные веса $f(x)=f(y)$, то отношение между ними не является антисимметричным и, следовательно, не удовлетворяет определению порядка. В то же время, как известно, с отображением f можно связать разбивку множества M на классы эквивалентности $\{M_1, M_2, ..., M_j, ...\}$. Каждый из них объединяет разные элементы из M с равными весами, причем этот вес служит представителем соответствующего класса.

Теперь можно говорить об упорядочении совокупности классов эквивалентности $\{M_1, M_2, ... \}$ некоторого множества M по их представителям α_1, α_2, ... Так как система представителей $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$

не содержит одинаковых элементов (в противном случае соответствующие им классы объединились бы в общий класс эквивалентности), то на этой системе как на множестве можно определить строгий порядок. Такое упорядочение отождествляет элементы множества *М,* принадлежащие к тому самому классу эквивалентности, и определяет на этом множестве *квазипорядок (предпорядок).* Говорят также, что строгий порядок на множестве классов эквивалентности $\{M_1, M_2, ...\}$ множества *М* *индуцируется* квазипорядком.

Квазипорядок удовлетворяет условиям рефлексивности и транзитивности. Он является обобщением эквивалентности (в определение не входит свойство симметричности) и нестрогого порядка (не обязательно свойство антисимметричности). Отношение, являющееся одновременно эквивалентностью и нестрогим порядком, есть *тождественное равенство.* Можно также показать, что если *А* — квазипорядок, то $A \cap A^{-1}$ — эквивалентность. Совершенный квазипорядок индуцирует и совершенно строгий порядок на множестве классов эквивалентности.

Рассмотренный раньше ряд номинальных значений можно рассматривать как строго упорядоченное множество, а упорядоченное множество объектов, приведенных в соответствие этому ряду, вводится квазипорядком. Аналогично можно говорить, что квазипорядок на множестве возможных значений измеренных величин индуцирует строгий порядок на функциональной шкале (множества реперных точек) измерительного средства.

Области уровня. Классы эквивалентности множества *М* с квазипорядком, представляющие собой такие множества, где весовая функция f принимает фиксированные значения, по обыкновению называются *областями уровня.* Например, в множестве конденсаторов, которые характеризуются номинальными значениями емкости, области уровня — это подмножества конденсаторов с одинаковыми номинальными емкостями. Другим примером служит квазипорядок *А* на множестве комплексных чисел $z=a+bi$ такой, что z_iAz_k, если $a_i \le a_k$. При этом разные комплексные числа с одинаковыми действительными частями объединяются в классы эквивалентности, множество которых может быть упорядочено по их представителям.

Пусть *М* — множество точек на топографической карте и $h(a)$ высота точки a над уровнем моря. Отношение $a \le b$, если $h(a) \le h(b)$, определяет квазипорядок на множестве *М.* Областями уровня служат *горизонтали (изолинии)* — геометрические места разных точек, высота которых над уровнем моря одинакова. Обычно такие горизонтали строят для некоторых фиксированных уровней $h_1, h_2, ..., h_n$ и по ним судят о характере изображаемого рельефа (рис. 10.2).

Аналогичный прием используется для представления на плоскости функций двух переменных $\varphi(x, y)=z$. Полагая $z = h_1, h_2,..,h_n,$ строят кривые (изолинии), соответствующие $\varphi_i(x, y) = h_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

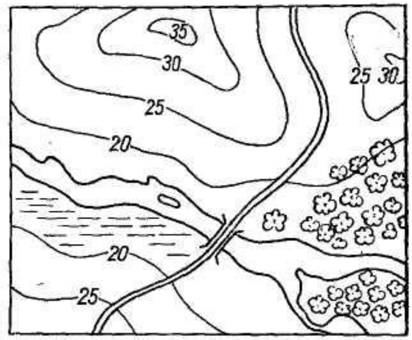


Рис. 10.2. Линии уровня (горизонтали) на топографической карте.

В теории информации в такой форме по обыкновению представляют рассчитанные или полученные экспериментально значения разных величин, которые характеризуют точки плоскости (или земной поверхности), температуры (изотермы), потенциала (эквипотенциальные линии) и т.п.

Комплексный показатель качества. Сравнение различных сущностей по некоторой числовой характеристике сводится, как об этом уже говорилось, к упорядочению множества соответствующих им весов, которые можно рассматривать как некоторый показатель качества. Сущность характеризуется несколькими показателями качества $x_1, x_2, ..., x_n$ (стоимость, надежность, габаритные размеры, масса и т.п.).

Для оценки разных типов сущностей одинакового назначения используется *комплексный показатель качества,* который выражается некоторым числом $x=f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Простейший способ определения этого числа основан на соотношении $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где α_i — *коэффициент весомости* показателя x_i. Обычно под $x_1, x_2, ..., x_n$ понимают *относительные показатели* в сравнении с соответствующими показателями некоторой сущности, принятой в качестве базисной. Коэффициенты весомости α_i являются численными выражениями значимости показателей и их определение находится в компетенции специалистов.

Определив комплексные показатели качества некоторой совокупности сущностей одинакового назначения и упорядочив множество этих показателей, можно судить о качестве сущностей и сравнивать их между собой. Сущности с одинаковыми показателями качества являются в этом отношении эквивалентныи. Необходимо, однако, отметить, что порядок или квазипорядок на множестве сущностей зависит от того, как определенны коэффициенты весомости α_i, что составляет основные трудности при оценке качества.

Матрицы отношений порядка. Отношению порядка отвечает матрица, у которой главная диагональ заполнена единицами (рефлексивность). Для каждой пары единичных элементов, один из которых расположен в i-м столбце и j-й строке, а второй — в j-м столбце и k-й строке, обязательно существует единичный элемент в i-м столбце и k-й строке (транзитивность). Кроме того, ни один единичный элемент не имеет симметричного относительно главной диагонали (антисимметричность). Например, матрица отношения «быть делителем» на множестве $\{1,2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$ имеет вид:

	1	2	3	4	6	7	12	14	21	28	42	84
1	1											
2	1	1										
3	1		1									
4	1	1		1								
6	1	1	1		1							
7	1					1						
12	1	1	1	1	1		1					
14	1	1				1		1				
21	1		1			1			1			
28	1	1		1		1		1		1		
42	1	1	1		1	1		1	1		1	
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Матрица отношений строгого порядка отличается тем, что все элементы главной диагонали нулевые (антирефлексивность), а квазипорядка — допустимостью симметричных единичных элементов.

10.2.3. Отношение толерантности

1. Толерантность. *Отношение толерантности* τ на множестве M удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Упорядоченная пара (x, y) принадлежит множеству $\tau \subset M \times M$, если: 1) $x\tau x$ и 2) из $x\tau y$ следует $y\tau x$. Для этого отношения, в отличие от эквивалентности, транзитивность не обязательна, и значит эквивалентность есть частичный случай толерантности.

Отношение толерантности представляет собой экспликацию интуитивных представлений о сходстве и неразличимости. Каждая сущность неразличима сама с собой (рефлексивнисть), а сходство двух сущностей не зависит от того, в каком порядке они сравниваются (симметричность). В то же время, если одна сущность сходна с другой, а другая похожа из третью, то это совсем не означает, что все они обязательно сходны между собой, т.е. свойство транзитивности может не выполняться.

Например, толерантность на множестве точек плоскости может быть задана свойством: расстояние между любой парой точек не превышает величины a. С этим свойством обычно связывается моделирование зрительного органа. Очевидно, толерантностью может быть острота зрения, т.е. условие того, что любые пары точек неразличимы для глаза в его поле зрения.

Развлекательным примером толерантности является популярная задача «превращение мухи в слона» (муха-мура-тура-тара-кара-каре-кафе-кафр-каюр-каюк-крюк-крок-срок-сток-стон-слон). Здесь отношение толерантности определяется сходством между чотырехбуквенными словами, если они отличаются только одной буквой. Если определить отношение между словами как наличие хотя бы одной общей буквы, то толерантными будут пересекающиеся слова кросворда.

2. **Толерантность кортежей.** На множестве кортежей (векторов) $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ толерантность можно задать разными способами, например, обусловить наличие в паре кортежей хотя бы одной общей компоненты x_i.

Компонентами кортежа могут быть любые сущности. Если они принимают целочисленные значения от 0 до $m - 1$, то кортеж можно рассматривать как n-разрядное число, записанное в позиционной системе счисления с основанием m. Например, кортеж x = (7, 0, 4, 9, 2) отвечает десятичному числу 70492. Количество всех таких кортежей, наверное, равно m^n.

При m = 2 имеем двоичный кортеж, его компоненты принимают значение 0 или 1. Для каждого $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ существует только один не толерантный к нему кортеж $x' = (1 — x_1, 1 — x_2,..., 1\text{-}x_n)$.

Двоичный кортеж можно трактовать также как содержимое n-разрядного регистра вычислительной машины. Состояние машины определяется содержимым всех его регистров, т.е. множеством двоичных кортежей. Если два состояния машины различаются содержимым некоторого ограниченного числа регистров, то говорят, что эти состояния толерантны, а машину называют *толерантным автоматом.*

3. Толерантность числовых функций. Каждый кортеж $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ компоненты которого — некоторые действительные числа x_i, можно считать числовой функцией, заданной на множестве (1, 2, ..., n). Каждому числу $i(1 \leq i \leq n)$ эта функция сопоставляет число x_i. Толерантность двух функций означает, что хотя бы в одной точке они принимают одинаковые значения (точка A на рис. 10.3).

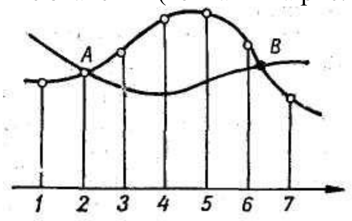


Рис. 10.3. Толерантность функций.

Если функции определены на некотором отрезке действительных чисел, то толерантность на множестве таких функций означает совпадение хотя бы одного из значений двух функций, соответствующих одному и тому же аргументу. Другими словами, толерантными есть функции, графики которых пересекаются (точки пересечения A и B на рис. 10.3).

4. Многомерный симплекс. Рассмотрим совокупность S_q всех непустых подмножеств множества q + 1 натуральных чисел

$H = \{1, 2, ..., q+1\}$. Определим на этой совокупности отношение толерантности: два подмножества толерантны если они содержат хотя бы один общий элемент.

При q=0,1,2,3 множество S_q можно представить соответственно точкой, отрезком, треугольником и тетраэдром (рис. 10.4), отображая одноэлементные подмножества вершинами, двухэлементные — ребрами, трехэлементные — гранями и четырехэлементные-геометрическим телом (тетраэдром).

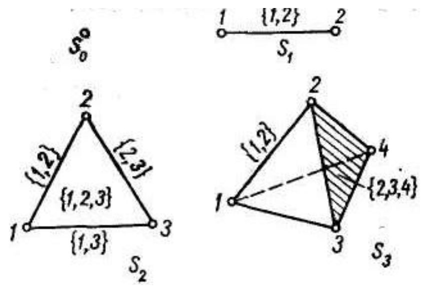


Рис. 10.4. Многомерные симплексы (q = 0, 1, 2, 3).

Если q>3, то геометрическое представление множества S_q в обычном трехмерном пространстве теряет наглядность, но может быть формально продолженное в абстрактном пространстве, имеющем q измерений.

Множество S_q называют *q-мерным симплексом.* Симплекс обобщает понятие отрезка, треугольника и тетраэдра на многомерный случай. Подмножества, которые содержат k+1 элемент, рассматриваются как *k-мерные грани.* Толерантность граней симплекса (наличие общих вершин) означает их *геометрическую инцидентность.*

5. Толерантность в множестве подмножеств. Пусть H— произвольное конечное множество, элементами которого могут быть сущности любой природы (предметы, числа, фигуры, свойства и т.п.), и $S_н$ — множество всех его непустых подмножеств. Если H содержит q элементов, количество элементов в $S_н$ равняется $2^q — 1$ (вычитаемая единица соответствует пустому подмножеству универсуума H).

Толерантность в множестве $S_н$ можно задать условием: два подмножества $X, Y\in S_н$ $(X\subset H$ и $Y\subset H)$ толерантны, если они содержат хотя бы один общий элемент. Это значит, что $X\tau Y$ при условии

$$X \cap Y \neq \varnothing .$$

Пусть, например, $H=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ и заданны подмножества $X=\{\alpha_1,\alpha_2\}$; $Y=\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$; $Z=\{\alpha_4\}$; согласно определению $X\tau Y$ и $X\tau Z$, но X и Z не толерантны, так как ни один из элементов из X не содержится в Z.

6. Сходство как толерантность. Сходство между разными сущностями имеет точный смысл только тогда, когда указана совокупность признаков, относительно которой это сходство устанавливается. Две сущности считаются *сходными (толерантными)*, если они обладают хотя бы одним общим признаком.

Пусть $M=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ множество сущностей и $H=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_г\}$ – множество признаков. Каждому элементу x_i из M отвечает некоторое подмножество H_i признаков ($H_i \subset H$). Следовательно, сходство между сущностями x_i и x_j определяется толерантностью соответствующих им подмножеств H_i и H_j из H, т.е. условием
$H_i \cap H_j \neq \varnothing$.

Если рассматривать соответствие между сущностями и признаками как бинарное отношение A между множеством сущностей M и множеством признаков H, то элементами A будут упорядоченные пары $(x,\alpha)\in A$, в каждой из которых первая координата является сущностью, а вторая — признаком. Очевидно, множество H_i признаков сущности x_i является пересечением $A(x_i)$ этого отношения, т.е. $H_i=A(x_i)$. Все такие пересечения целиком определяют бинарное отношение A.

Итак, толерантность τ на множестве сущностей M можно задать с помощью некоторого всюду определенного бинарного отношения A от M к H следующим образом: для любой пары сущностей x_i и x_j из M имеет место $x_i\tau x_j$, если и только если $A(x_i)\cap A(x_j) \neq \varnothing$.

Действительно, отношение τ симметрично, ибо из $x_i\tau x_j$ следует $A(x_i)\cap A(x_j) \neq \varnothing$, но $A(x_i)\cap A(x_j) = A(x_j)\cap A(x_i)$, следовательно, $x_j\tau x_i$. Оно также рефлексивно, поскольку отношение A определено на всем M. В этом и только в этом случае множество $A(x_i)\cap A(x_i)=A(x_i)$ не пусто для любого $x_i\in M$. Следовательно, τ — отношение толерантности.

7. Классы толерантности. Множество $L\subset M$, любые два элемента которого толерантны, называют *предклассом толерантности.*

Если толерантность связана с отношением A, то обратное отношение A^{-1} устанавливает соответствие между признаками и сущностями. Каждому признаку $\alpha_i\in H$ отвечает некоторая совокупность сущностей из M, которые обладают этим признаком. Такая совокупность определяется сечением $A^{-1}(\alpha_i)$ и является предклассом. Следовательно, множество всех разных сечений $A^{-1}(\alpha_i)=L_i$ образует некоторое множество предклассов, причем каждая сущность из M входит хотя бы в один предкласс.

Некоторые из предклассов могут быть связаны отношениям включения $L_i \subset L_j$. Если некоторый предкласс не является подмножеством никакого другого предкласса, то он является максимальным предклассом и называется *классом толерантности.*

Чтобы выделить из множества предклассов L_i классы толерантности, необходимо попарно сравнить все предклассы относительно включения. При этом, если $L_i \subset L_j$, то L_i отбрасывается и продолжается сравнение L_j с другими предклассами до тех пор, пока не останутся только предклассы, кторые не связаны отношением включения. Они и образуют совокупность классов толерантности $\{K_1, K_2, \ldots, K_P\}$

Разные классы толерантности могут содержать одинаковые элементы и, следовательно, являются пересекающимися множествами. В то же время их объединение равно множеству M, т.е. $K_1 \bigcup K_2 \bigcup \ldots \bigcup K_p = M$. Говорят, что классы толерантности образовывают *покрытие* множества M.

Пусть, например, $M=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$ и $H=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$, причем сущность x_1 наделена признаками α_3 и α_5, т.е. $H_1 = \{\alpha_3, \alpha_5\}$ и аналогично

$H_2 = \{\alpha_2, \alpha_4\}$; $H_3 = \{\alpha_3, \alpha_5\}$; $H_4 = \{\alpha_3, \alpha_4\}$; $H_5 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$; $H_6 = \{\alpha_3, \alpha_5\}$; $H_7 = \{\alpha_4\}$.

Соответствующее отношение выражается матрицей

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
α_1					1		
α_2		1		1	1		
α_3	1		1		1	1	
α_4		1		1	1		1
α_5	1		1			1	

Отсюда определяем предклассы как сечения обратного отношения:
$L_1 = \{x_5\}$, $L_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$, $L_3 = \{ x_1, x_3, x_5, x_6\}$; $L_4 = \{x_2, x_4, x_5, x_7\}$;
$L_5 = \{x_1, x_3, x_6\}$.

Так как $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset L_4$ и $L_5 \subset L_3$, то классами толерантности являются L_3 и L_4, т.е. $K_1=L_3=\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$ и $K_2=L_4= \{x_2,x_4,x_5, x_7\}$

8. Толерантность и эквивалентность. Изложенный способ образования классов толерантности подсказывает связь между толерантностью и эквивалентностью.

В частном случае, когда каждая сущность характеризуется только одним признаком (отношение A от M к H есть отображение или функция), классы толерантности объединяют только те сущности, которые имеют данный признак. При этом толерантность переходит в эквивалентность, а классы толерантности — в классы эквивалентности. Другая формулировка условия совпадения толерантности с эквивалентностью требуют, чтобы классы толерантности не пересекались друг с другом.

Более глубокая связь между отношениями толерантности и эквивалентности устанавливается при рассмотрении подмножеств $H_i = A(x_i)$ признаков, соответствующих сущности $x_i \in M$.

Разобьем M на непересекающиеся классы, поместив в каждый класс все сущности x_i из M, для которых H_i совпадают. Тогда это разбиение $\{M_1, M_2, ...\}$ определит на множестве M отношение эквивалентности. Так, для примера из (п.7) имеем

$$M_1 = \{x_1\, x_3, x_6\};\ M_2 = \{x_2, x_4\};\ M_3 = \{x_5\}, M_4 = \{x_7\}.$$

Так как эквивалентность является частичным случаем толерантности, то каждый класс эквивалентности является подмножеством какого-либо класса толерантности или совпадает с ним. Значит классы эквивалентности являются предклассами или классами толерантности (в нашем примере

$$M_1 \subset K_1, M_2 \subset K_2, M_3 \subset K_1, M_3 \subset K_2, M_4 \subset K_2).$$

Отсюда также следует, что класс эквивалентности связан отношениям включение с пересечением классов толерантности, подмножествами которых он является ($M_3 \subset K_1 \bigcap K_2$). Если классы толерантности не пересекаются, то толерантность переходит в эквивалентность. Ясно также, что класс толерантности выражается через объединение входящих у него классов эквивалентности

$$(K_1 = M_1 \bigcup M_3;\ K_2 = M_2 \bigcup M_3 \bigcup M_4).$$

9. Матрица толерантности. Пусть толерантность определена как совокупность классов толерантности $\{K_1, K_2, ... \}$. Внутри каждого такого класса любые два элемента толерантны, следовательно, кроме рефлексивности и симметричности имеет место и транзитивность. Поэтому подобно эквивалентности, классу толерантности отвечает заполненный единичными элементами квадрат, диагональ которого располагается по главной диагонали матрицы. Но в отличие от эквивалентности эти квадраты пересекаются, так что в целом толерантность не транзитивна.

Если при записи матрицы расположить элементы множества совокупностями, которые отвечают классам эквивалентности и толерантности, то для примера из (п.7) имеем:

	x_1	x_3	x_6	x_5	x_2	x_4	x_7
x_1	1	1	1	1			
x_3	1	1	1	1			
x_6	1	1	1	1			
x_5	1	1	1	1	1	1	1
x_2				1	1	1	1
x_4				1	1	1	1
x_7				1	1	1	1

M_1, M_3, M_2, M_4, K_1, K_2

Отношение толерантности полностью определяется его *картой*, на которой изображаются классы эквивалентности (или любое другое покрытие) и классы толерантности (рис. 10.5).

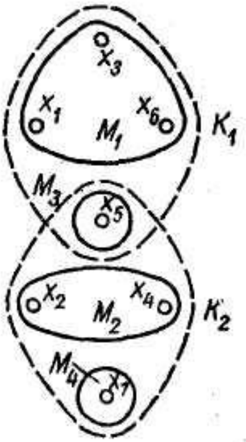


Рис. 10.5. Карта отношения толерантности.

10.2.4. Законы композиции

Композиция сущностей. В теории информации большое значение имеют отношения, ставящие в соответствие паре каких-нибудь сущностей *(a, b)* третью сущность *c*. Примерами таких отношений являются действия над числами. В общем случае отношение может представлять собой некоторую *операцию* не только между числами, но и между сущностями любой природы. При этом запись $a\top b=c$, или $a\perp b=c$, обозначает, что *a* в композиции с *b* дает *c*. Символ $\top$ (или $\perp$) обозначает операцию, сущности *a* и *b называются операндами,* а сущность *c* - *результатом операции или композицией сущностей a* и *b*.

Обозначим множества операндов соответственно через *A* и *B* ($a\in A$ и $b\in B$), а множество результатов операции — через *C* ($c\in C$). Так как множество всех пар *(a, b)* есть прямое произведение $A\times B$, то операцию определяют как отображение множества $A\times B$ в *C*, т.е. $A\times B\to C$, и часто называют *законом композиции.*

Таблица Кели. Любой закон композиции $A\times B\to C$ над конечными множествами можно задавать прямоугольной матрицей *(таблицей Кели).* Строки таблицы отвечают элементам множества *A,* столбцы — элементам множества *B.* На пересечении строки и столбца, соответствующих паре *(a, b),* располагается элемент $c=a\top b$.

Хорошо известными примерами являются таблицы сложения и умножение одноразрядных чисел. В общем случае таблица, которая определяет бинарную операцию, имеет вид:

$\top$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...
a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	...
a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	...
a_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	...
a_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	...
...	...	...	...	...	...	...

Законы композиции на множестве. Множества *A, B, C,* участвующие в операции $A \times B \to C$, не обязательно должны быть разными. Если $B=C=S$, то говорят, что закон композиции *определен на множестве S.*

Различают *внутренний* закон композиции $S \times S \to S$ и *внешний* закон композиции $\Omega \times S \to S$, где Ω и S — разные множества. В случае внутреннего закона говорят, что множество образует *группоид* относительно операции $\top$. В случае внешнего закона композиции элементы $\alpha \in \Omega$ называют *операторами,* а Ω — *множеством операторов* на множестве S.

Примерами внутреннего закона композиции являются сложение $a+b=c$ и умножение $ab=c$ на множестве вещественных чисел, а также геометрическое суммирование векторов на плоскости. Умножение вектора на скаляр может быть примером внешнего закона композиции на множестве векторов, причем операторами являются скаляры — элементы множества действительных чисел.

Пусть S — множество диференцируемых функций $f_i(x_l, x_2, ... x_n)$ и Ω - множество операторов дифференцирования $\partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2, ..., n$). Тогда паре $(\partial/\partial x_j, f_i)$ можно поставить в соответствие частную производную df_i/dx_j, т.е. имеем внешний закон композиции на множестве диференцируемых функций.

Матрица группоида. Конечный группоид S относительно закона $\top$ определяется квадратной матрицей n-го порядка (n — число элементов группоида), например,

$\top$	a	b	c	d
a	b	c	a	b
b	a	b	c	a
c	b	a	d	d
d	d	b	d	b

Свойства внутреннего закона композиции. Операции на множестве S могут обладать некоторыми общими свойствами, которые обычно выражаются соотношениями между элементами из S:

коммутативность $a \top b = b \top a$;

ассоциативность $a \top (b \top c) = (a \top b) \top c$;

дистрибутивность слева $(a \top b) \perp c=(a \perp c) \top (b \perp c)$
и справа $c \perp (a \top b)=(c \perp a) \top (c \perp b)$.

На множестве вещественных чисел сложение и умножение ассоциативны и коммутативны. Умножение дистрибутивно (слева и справа) относительно сложения, но сложение не дистрибутивно относительно умножение, так как вообще $a+bc \neq (a+b)(a+c)$.

Возведение в степень не ассоциативно $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$, не коммутативно $a^b \neq b^a$, но дистрибутивно справа относительно умножения, так как $(ab)^c=a^cb^c$.

Пересечение и объединение множеств взаимно дистрибутивны относительно друг друга. Если в множестве $F \subset S$ композиция любых двух элементов из F также принадлежит F, то F называется *замкнутым* относительно рассмотренного закона композиции (подмножество четных чисел есть замкнутым относительно сложения и умножение).

Регулярный, нейтральный и симметричный элементы. Закон композиции наделяет элементы множества некоторыми общими свойствами. При разных законах одни и те же элементы могут иметь разные свойства. Поэтому имеет смысл говорить о свойствах элементов множества S относительно заданного на нем закона композиции $\top$.

Элемент a называется *регулярным,* если из соотношений $a \top x=a \top y$ и $x \top a=y$ следует $x = y$ (*сокращение* на регулярный элемент). Всякое число регулярно относительно сложения, а для умножения регулярно всякое число, кроме нуля ($0x = 0y$ не влечет $x= y$).

Нейтральным элементом $e \in S$ называют такой элемент, что для всех элементов x из S справедливо $e \top x=x \top e= x$ (если нейтральный элемент существует, то он единственен и регулярен). Среди чисел нуль — нейтральный элемент относительно сложения, а единица — относительно умножения. Пустое множество является нейтральным элементом относительно объединения, а основное множество (универсум) — относительно пересечения. На множестве всех квадратных матриц n-го порядка с числовыми элементами нулевая и единичная матрицы служат соответственно нейтральными элементами относительно сложения и умножение.

Если множество содержит нейтральный элемент e относительно закона композиции $\top$, то элемент b называется *симметричным (обратным, противоположным)* элементу a, если $a \top b=b \top a=e$; при этом a называют *симметризуемым* элементом и b обозначается через $\bar{a}$, т.е. $b=\bar{a}$. Относительно ассоциативного закона $\top$ элемент $\bar{a}$, симметричный элементу a (если он существует), единственен и регулярен.

При сложении симметричным некоторому числу x будет $-x$, а при умножении x^{-1}. Например, симметричными элементами на множестве квадратных матриц n-го порядка относительно умножения есть взаимно-обратные матрицы. Множество всех собственных подмножеств относительно объединения или пересечение не содержит симметричных элементов. Множество, в котором всякий элемент имеет симметричный, называется *симметризуемым.*

Аддитивные и мультипликативные обозначения. Свойства законов композиции можно представить в двух формах. В аддитивных обозначениях операция $\top$ записывается символом сложения (+), а в мультипликативных — символом умножения (•). Если множество наделено двумя законами композиции, то чаще всего первый из них $\top$ считается *аддитивным,* а второй $\perp$ — *мультипликативным.* В аддитивной записи нейтральный элемент обозначается через 0 и называется *нулем,* а симметричный элементу a — через $(-a)$. В мультипликативной записи нейтральный элемент обозначается через 1 и называется *единицей,* а симметричный элементу a — через a^{-1}.

Если закон композиции ассоциативный и коммутативный, а элементы множества $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ отмечены *операторным индексом* i, то в аддитивной записи

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

и в мультипликативной записи

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n=\prod_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Следует подчеркнуть, что здесь, в отличие от элементарной алгебры, знаки (+) и (•) не обязательно означают сложение и умножение чисел. Они просто заменяют в разных соотношениях символы $\top$ и $\perp$, указывая на то, что над элементами множества (не обязательно числами) выполняются некоторые операции. Эти операции могут лишь внешне напоминать обычные операции сложения или умножение чисел, но по существу в общем случае — это другие операции. Удобство аддитивных и мультипликативных обозначений состоит в том, что при операциях над числами разлчные соотношения совпадают с общепринятой формой записи.

10.2.5. Информационная модель и отношения

Одним из основных в теории информации есть понятия информационной модели. *Информационной моделею* Ψ будем называть совокупность множества M с заданными на нем отношениями

$$S = \{R_{11}, R_{12},..., R_{1n_1}, R_{21}, R_{22},..., R_{2n_2},...R_{m1}, R_{m2},..., R_{mn_m}\},$$

где множество M — *носитель информационной модели,* а заданные отношения R_{ia}, $R_{ia} \subset M^i$ образуют *сигнатуру информационной модели*

$$\Psi = \langle M, S\rangle.$$

Степень носителя определяет *арность отношения.* Два отношения R_α и R_β, имеющие одну и ту же степень, называются *совместимыми по объединению* или просто *совместимыми.*

Очевидно, что n-местную операцию $f_n(m_1,m_1,...,m_n)=m_{n+1}$ можно рассматривать как $(n+1)$-арне отношение R_{n+1}.

Совокупность множества M с заданными в нем операциями и отношениями, будем называть *алгебраической системой.*

Частным случаем алгебраической системы есть *алгебра отношений* и ее расширение — *реляционная алгебра.*

Рассмотрим алгебру отношений, носитель которой — множество отношений, а сигнатура - операции объединения, пересечение, разности и расширенного декартова произведения отношений.

Объединением $R_\alpha \bigcup R_\beta$ *двух совместимых отношений* R_α и R_β есть множество всех кортежей, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих отношений. Объединением отношений

$$R_\alpha=\{(a,b,c),(a,b,d),(b,c,e)\} \text{ i } R_\beta=\{(a,b,d),(b,d,e),(c,d,e)\}$$

является

$$R_\alpha \bigcup R_\beta =\{(a,b,c),(a,b,d),(b,c,e),(b,d,e),(c,d,e)\}.$$

Рассмотренные отношения являются совместимыми, так как их степени равны:

$$s(R_a)=s(R_b) =3,\ R_a, R_b \subset M^3,\ M=\{a,b,c,d,e\}.$$

Пересечением $R_\alpha \cap R_\beta$ *двух совместимых отношений* R_α и R_β есть множество всех кортежей, которые принадлежат как отношению R_α, так и отношению R_β. Пересечением отношений R_α и R_β является

$$R_\alpha \bigcap R_\beta =\{(a,b,c),(a,b,d),(b,c,e)\} \bigcap \{(a,b,d),(b,d,e),(c,d,e)\}= \{(a,b,d)\}.$$

Разностью $R_\alpha \backslash R_\beta$ *двух совместимых отношений* R_a и R_β является множество всех кортежей, которые принадлежат отношению R_a и не приналежать отношению R_β . Так, например,

$$R_\alpha \backslash R_\beta =\{(a,b,c),(a,b,d),(b,c,e)\}/ \{(a,b,d),(b,d,e),(c,d,e)\}= \{(a,b,c),(b,c,e)\}.$$

Расширенным декартовим произведением $R_a \times R_\beta$ *двух отношений*

R_a и R_β является множество всех кортежей π таких, что π — конкатенация кортежа $a\in R_a$ и кортежа $b\in R_\beta$ *(конкатенация* кортежей $(a_1, a_2,...,a_n)$ и $(b_1, b_2,...,b_m)$ - кортеж $(a_1, a_2,...,a_n, b_1, b_2,...,b_m)$). Например, для рассмотренных отношений R_a и R_β расширенное декартово произведение

$R_a\times R_\beta=\{(a,b),(c,d),(a,e)\} \times \{(a,b,c),(b,d,e)\}= \{(a,b,a,b,c),(a,b,b,d,e),$
$(c,d,a,b,c),(c,d,b,d,e),(a,e,a,b,c),(a,e,b,d,e)\}.$

Понятие информационной модели и алгебры отношений находят широкое применение при формализации реальных сущностей. Рассмотрим, как используется алгебра отношений при создании информационного обеспечения — разработке реляцонной базы данных.

Основой построения реляционной базы данных есть двумерная таблица, каждый столбец которой отвечает домену (или атрибуту, который отвечает части домена), строка - кортежу значений атрибутов, которые находятся в отношении *R*.

Рассмотрим 5-арне отношение R_5 (экзамены) (табл. 10.1).

Таблица 10.1.

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	К5-01	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	03.ЯНВ.	АУД. 210
2	К5-02	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО	03.ЯНВ.	АУД. 211
3	К5-03	ФИЗИКА	ПРОФ. КРАВЧЕНКО	03.ЯНВ.	АУД. 211
4	К5-04	АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО	05.ЯНВ.	АУД. 210
5	К5-01	ФИЗИКА	ПРОФ. КРАВЧЕНКО	09.ЯНВ.	АУД. 210
6	К5-02	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	09.ЯНВ.	АУД. 211
7	К5-03	АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО	10.ЯНВ.	АУД. 211
8	К5-04	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	10.ЯНВ.	АУД. 210

Таблица 10.1 определяет отношение реляционной модели данных. Отношение R_5 является подмножеством декартова произведения

$D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \times D_5$, в котором сомножитель является доменом D_i. Элементами домена D_i служат значение атрибутов.

Домен D_1 (группа) содержит значения К5-01, К5-02, К5-03, К5-04:

$$D_1 = \{К5\text{-}01, К5\text{-}02, К5\text{-}03, К5\text{-}04\};$$

аналогично имеем домены:

D_2 (дисциплина):

D_2={ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА, ФИЗИКА, АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКИ};

D_3 (экзаменатор):

D_3={ПРОФ. ПЕТРЕНКО, ПРОФ. ИВЧЕНКО, ПРОФ. КРАВЧЕНКО};

D_4 (дата):

D_4 = {03 ЯНВ., 05 ЯНВ., 09 ЯНВ., 10 ЯНВ.};

D_5 (аудитория):

D_5 = {АУД. 210, АУД. 211}.

Порядок столбцов в таблице фиксирован, строки в общем случае могут располагаться произвольно. Цифры первого столбца 1, 2,..., 8 идентифицируют элементы отношения D_5.

Для преобразования отношений определим *реляционную алгебру.* Носителем реляционной алгебры есть множество отношений, сигнатура кроме введенных операций (объединение, пересечение, разность и расширенное декартово произведение отношений) включает специальные операции над отношениями: выбор, проекцию и соединение.

Операция *выбора* представляет собой процедуру построения «горизонтального» подмножества отношений, т.е. подмножества кортежей, обладающих заданным свойством.

Пример 2. С помощью операции выбора построить отношение R'_5 (расписание экзаменов проф. Петренка). Результатом операции выбора являются строки, у которых домен D_3 представлен значениям, ПРОФ. ПЕТРЕНКО; это 1, 6, 8-и строки (табл. 10.2).

Таблица 10.2.

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	К5-01	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	03.ЯНВ.	АУД. 210
6	К5-02	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	09.ЯНВ.	АУД. 211
8	К5-04	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	10.ЯНВ.	АУД. 210

Для определения проекций отношений множество в реляционной алгебре разбивается на два подмножества в случае бинарного отношения и на n подмножеств в случае n-арного отношения:

$$R_2 \subset M^2,\ M=A \bigcup B,\ A \bigcap B=\varnothing,\ R_2 \subset A \times B;$$

$$R_n \subset M^2,\ M=\bigcup_{i=1}^{n} A_i;\ A_{i_a} \bigcap A_{i_b} = \varnothing,$$

$$i_a,\ i_b\ (i_a \neq i_b) \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}, R_n \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \ldots$$

Проекцией Пр(R_2/A) *бинарного отношения* R_2, $R_2 \subset A \times B$ на A называется множество элементов $\{a_i/(a_i,b_i) \in R_2\}$.

Проекцией Пр$(R_n/ A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m})$ *n-арного* отношение $R_n \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, $r \geq m$, на $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ называется множество кортежей $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$, где $a_{i_1} \in A_{i_1}, a_{i_2} \in A_{i_1}, \ldots, a_{i_m} \in A_{i_m}$, каждый из которых является частью элемента n-арного отношения R_n.

Операция проекции определяет построение «вертикального» подмножества отношения, т.е. множества подмножества кортежей, получаемого выбором одних и исключением других доменов.

Пример 3. Проекция Пр $(R_5/D_2,\ D_3)$ порождает множество пар**,** каждая из которых определяет дисциплину и экзаменатора (табл. 10.3).

Таблица 10.3

R_2	D_2	D_3
	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО
	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО
	ФИЗИКА	ПРОФ. КРАВЧЕНКО
	АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО
	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ПЕТРЕНКО

Одинаковые строки в табл. 10.3 объединены в одну.

Операция соединения по двум таблицам, имеющим общий домен, разрешает построить одну таблицу, каждая строка которой образуется соединением двух строк исходных таблиц. Из заданных таблиц берут строки, содержащие одно и то же значение из общего домена; общему домену сопоставляется один столбец.

Пример 4. Найдем по двум заданным таблицам (табл. 10.4,*а*, 10.4,*б*) результат операции соединения по домену D_1 (табл. 10.4,*а*).

Таблица 10.4, *а*

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	K5-01	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	03.ЯНВ.	АУД. 210
	K5-02	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО	03.ЯНВ.	АУД. 211
	K5-03	ФИЗИКА	ПРОФ. КРАВЧЕНКО	05.ЯНВ.	АУД. 211
	K5-04	АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО	05.ЯНВ.	АУД. 210
	K5-01	ФИЗИКА	ПРОФ. КРАВЧЕНКО	09.ЯНВ.	АУД. 210

Таблица 10.4, *б*

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	K5-04	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	10 ЯНВ.	АУД. 210
	K5-02	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	09 ЯНВ.	АУД. 211
	K5-03	АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО	10 ЯНВ.	АУД. 211

Таблица 10.4, *в*

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D'_2	D'_3	D'_4	D'_5
	K5-04	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	03 ЯНВ.	АУД. 210	ФИЗИКА	ПРОФ. КРАВЧЕНКО	09 ЯНВ.	АУД. 210
	K5-02	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ИВЧЕНКО	03 ЯНВ.	АУД. 211	ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	09 ЯНВ.	АУД. 211
	K5-03	ФИЗИКА	ПРОФ. КРАВЧЕНКО	05 ЯНВ.	АУД. 211	АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКИ	ПРОФ. ИВЧЕНКО	10 ЯНВ.	АУД. 211
	K5-04	АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКИ	ПРОФ. ИВЧЕНКО	05 ЯНВ.	АУД. 210	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА	ПРОФ. ПЕТРЕНКО	10 ЯНВ.	АУД. 210

Аналогично можно определить операцию соединения не только по условию «равенства», но и по другим условиям сравнения: $>$, $\geqslant$, $\neq$, $<$, $\leqslant$.

Определим, например, операцию соединения по условию «больше, чем» (>).

Соединением по условию «больше, чем» отношения R_a по атрибуту X и отношения R_b по атрибуту Y (атрибуты X и Y являются атрибутами одного и того же домена, общего для отношений R_a и R_b), $X > Y$, называется множество всех кортежей π_i таких, что π_i —

конкатенация кортежа a_i, принадлежащего R_a, и кортежа b_i принадлежащего R_b, где X — часть a_i, Y — часть b_i и $X > Y$.

Запрос в реляционной базе данных будет выполнен тем быстрее, чем меньше операций над отношениями он содержит.

10.2.6. Составные отношения

Часто приходится связывать бинарные отношения друг с другом. Руководствуясь предыдущими соображениями, можно определить это понятие следующим образом.

Определение. Пусть заданы множества A, B и C и отношение σ между A и B и ρ между B и C. Определим отношение между A и C следующим образом: оно действует из A в B посредством σ, а потом из B в C посредством ρ. Такое отношение называют *составным* и обозначают $\rho \circ \sigma$, т.е.

$$(\rho \circ \sigma)(a)=\rho(\sigma(a)).$$

Следовательно, $(x, y)\in (\rho \circ \sigma)$, если существует $z\in B$ такое, что $(x, z)\in\sigma$ и $(z, y)\in\rho$. Отсюда следует, что $\mathcal{D}_{\rho\circ\sigma}=\sigma^{-1}\mathcal{D}_\rho$. Чтобы проиллюстрировать ситуацию, рассмотрим рис. 10.6.

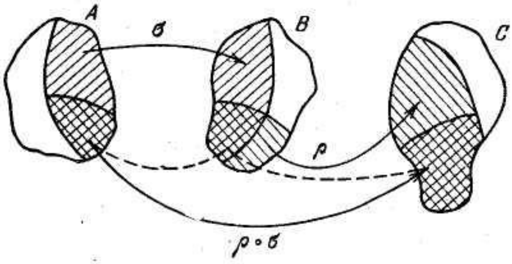


Рис. 10.6.

Области определения и значений σ и ρ заштрихованы в разных направлениях. Следовательно, сегменты с двойной штриховкой на A, B и C представляют собой $\mathcal{D}_{\rho\circ\sigma}$, $\mathcal{D}_\rho \bigcap \mathcal{R}_\sigma$ и $\mathcal{R}_{\rho\circ\sigma}$, соответственно.

Замечание. Из записи отношений σ и ρ следует, что они применяются справа налево. Следовательно, $(\rho\circ\sigma)(a)$ означает, что сначала берется a и преобразуется посредством σ, а затем преобразуется посредством ρ. В алгебре это иногда записывают в виде $a\sigma\rho$.

Пример 4. Пусть σ и ρ — отношения на N такие, что

$$\sigma = \{(x, x+1): x\in N\}, \quad \rho = \{(x^2, x): x\in N\}.$$

Тогда

$$\mathcal{D}_\rho = \{x^2: x\in N, \quad \mathcal{D}_\sigma = \{x: x, x + 1\ x\in N = N,$$

$$\mathcal{D}_{\rho\circ\sigma}=\sigma^{-1}\mathcal{D}_\rho=\{x: x\in N \text{ и } x + 1 = в^2\}, \text{ где } в\in N = \{3, 8, 15, 24, ...\}$$

(рис. 10.7).

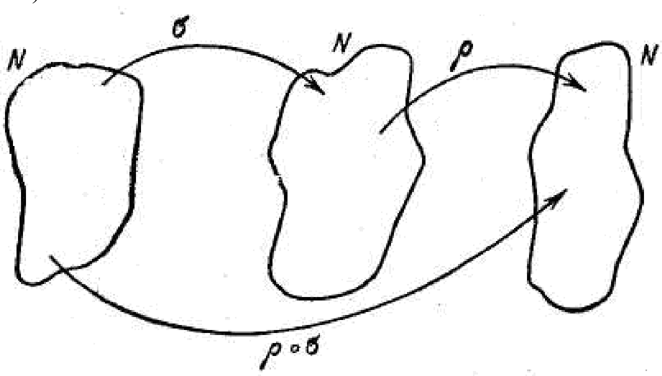


Рис. 10.7.

В случае, когда мы рассматриваем отношение на множестве, оно может быть скомбинировано само с собой.

Например, используя отношения из примера 4, имеем

$$\sigma\circ\sigma = \{(x, x + 2): x\in N\} \text{ и } \rho\circ\rho = \{(x^4, x): x \in N \}.$$

Эти отношения можно также обозначать соответственно σ^2 и $\rho^{2.}$ В общем-то эти обозначения не совсем законны для множеств, однако их легко можно обосновать, поскольку если $(x, y)\in\sigma\circ\sigma$, то $((x, z), (z, y))\in\sigma\times\sigma$ при некотором z; никакого недоразумения при этом не возникает, поскольку известна структура получаемого результата.

Используя это обозначение, мы можем определить $\sigma^г$ для любого $n\in N$, $n > 1$, следующим образом:

$$\Sigma^n = \{(x, y): x\sigma z \text{ и } z\sigma^{n-l}y \text{ для некоторого } z\}.$$

Если мы снова возьмем отношение σ и ρ из примера 4, то получим

$$\sigma^n = \{(x, x + n), x\in N\} \text{ и } \rho^n = \{\{x^{2^n}, x): x\in N\}.$$

Хотелось бы рассмотреть вопрос о том, насколько в этих случаях может быть применена аналогия с умножением. Пусть A — множество, а R — отношение на A. Тогда отношение $I_A\circ R$, R и $R\circ I_A$ эквивалентны; поэтому I_A является тождественным отношением на A, которое ведет себя подобно числу 1 по отношению умножения чисел. Чтобы дополнить аналогию, желательно было бы иметь возможность писать $R^{-1}\circ R=I_A=R\circ R^{-1}$. Однако в общем случае этого делать нельзя. Для того чтобы иметь такую возможность, необходимо наложить дополнительные условия.

Замыкание отношений.

Понятие замыкания есть важным информационным понятием и используется в большинстве разделов теории информации. Чтобы проиллюстрировать это понятие, рассмотрим следующий пример.

Возьмем объект x_0 и процесс p, который порождает множество и определяет последовательность $x_1, x_2, \dots \dots, x_n, \dots$ такую, что

$$x_1 \in p(x_0),$$

$$x_2 \in p(x_1),$$

....

$$x_n \in p(x_{n-1}),$$

....

Множество, содержащее все элементы всех последовательностей, которые могут быть выведены с помощью p, и начинающиеся с x_0, называется *замыканием процесса р* относительно x_0. Поэтому «ответ» будет содержаться в $p^n(x_0)$ при некотором n. Однако мы не знаем заранее значения n. Более того, если мы возьмем произвольный элемент y из этого замыкания и выполним процесс p, начиная с y, то не получим ничего нового. Результат уже содержится в замыкании. Множество не может быть расширено таким путем (оно замкнуто).

Пример 5. Возьмем квадрат S, размеченный, как это показано на рис. 10.8, и определим процесс r следующим образом. Из заданного положения S процесс r порождает множество всех положений, получаемых в результате поворота по часовой стрелке на прямой угол.

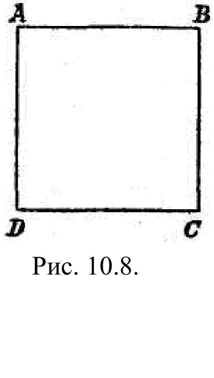


Рис. 10.8.

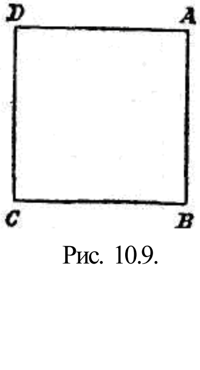
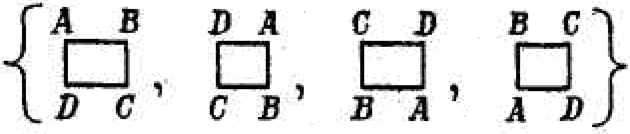


Рис. 10.9.

Таким образом, $r(S)$ дает конфигурацию, которая изображена на рис. 10.9. После применения r четыре раза, мы вернемся к положению, с которого начали, и, следовательно, замыкание в данном случае есть множество из четырех позиций.



Рассмотрим теперь, что произойдет, если процесс определить при помощи отношения. (В действительности это всегда возможно, так как мы можем определить подходящее отношение при помощи множества $\{(x, y): y \in p(x)$, где p — исследуемый процесс).) Для построения замыкания отношения A довольно иметь составные отношения A, A^2, ..., A^n, ..., которые затем комбинируются обычным теоретико-множественным путем.

Определение. *Транзитивным замыканием* (или просто *замыканием)* отношения A на множестве называется бесконечное объединение

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

Транзитивность замыкания отношения следует, очевидно, из его определение, однако слово «транзитивное» часто включают, чтобы подчеркнуть различие между этой и подобной ей операцией, которая вскоре будет определена. Транзитивное замыкание отношения A обозначают A^+.

Пример 6.

1. Пусть R— отношение на N такое, что

$$R = \{(x, y): y = x+1\}.$$

Тогда

$$R^+ = \{(x, y): x < y\}.$$

2. Пусть σ — отношение на Q такое, что

$$\sigma == \{(x, y): x<y\}.$$

Тогда

$$\sigma^+ = \sigma.$$

3. Пусть ρ — отношение на Q такое, что

$$\rho =\{(x, y): x * y = 1\}.$$

Тогда

$$\rho^{+}\{(x, x): x \neq 0\} \bigcup \rho.$$

4. Пусть L — множество станций Киевского метро и a, b и c - последовательные станции. Если отношение N на L определено как $N=\{(x, y)$: x есть следующей за y станцией), то (a, b) и $(b, c) \in N$ и $(a, a), (b, b)$, (c, c) и $(a, c) \in N^2$. Следовательно $N^{+}=U_L=L\times L$.

Из этих примеров легко видеть, что замыкание отношения в общем случае не является рефлексивным. Однако иногда удобно сделать его таким. Это можно легко сделать. Вначале мы примем удобное допущение, что тождественное отношение на X, $I = \{(x, x): x\in X\}$ является нулевой степенью произвольного отношения на X. Таким образом, $A^0=I$ для любого A.

Определение. *Рефлексивным замыканием* A^* отношения A называют множество

$$A^*=\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

Замыкания отношений связаны между собой очевидным соотношением

$$A^* = A^{+} \bigcup I.$$

Пример 7. Используя отношения, которые определены в предыдущих примерах, получаем

$$R^*=\{(x, y): x\leq y\},\ \sigma^* = \{(x, y): x\leq y),$$

$$\rho^* = \rho^{+} \bigcup \{(0, 0)\},\quad N^*=N^*.$$

10.2.6. Матрицы и бинарные отношения на конечных множествах

Формально *матрицей* над множеством S называется отображение

$$M: N_P \times N_q \to S,\qquad p, q\in N.$$

Обычно образ (i, j) обозначают через M_{ij} и изображают всю функцию массивом элементов на S, т.е.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1q} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{p1} & M_{p2} & \dots & M_{pq} \end{bmatrix}.$$

Говорят, что эта матрица имеет *p строк* и *q столбцов* и имеет *размер* $p\times q$. Матрица размера $p\times q$ имеет $p*q$ элементов. Когда $p=q$, матрицу называют *квадратной.* Множество всех матриц $p \times q$ над S обозначают через $\mathcal{M}(p, q, S)$. Множество $\mathcal{M}((p, p, S)$ будем обозначать через $\mathcal{M}(p, S)$.

Рассмотрим бинарное отношение ρ между множествами A и B, где

$$A = \{a_1, a_2, ..., ap\}, \quad B = \{b_1, b_2, ..., b_q\},$$

т.е. $|A|=p$, $|B|=q$.

Упорядочение элементов в этих множествах выбрано произвольно, однако, однажды выбранное, оно далее остается фиксированным. Пусть это отношение ρ определенно посредством выбора пар (a, b), где $a\in A$, $b\in B$.

Рассмотрим матрицу M над $\{0, 1\}$, т.е. $M: N_P \times N_q \to \{0, 1\}$, и свяжем элементы M с отношением ρ биекцией

$$\varphi: \mathcal{P}(A\times B) \to \mathcal{M}(p, q, \mathrm{Z}_2)$$

(φ отображает *произвольное* отношение между A и B в матрицу $p \times q$ над $\{0, 1\}$);

$$\varphi: \rho\to M,$$

причем

$$(\varphi(\rho))_{ij} = M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (a_i, b_j)\in\rho, \\ 0, & \text{если} \quad (a_i, b_j)\notin\rho. \end{cases}$$

В случае, когда полезно подчеркнуть, что матрица M была получена из отношения ρ, мы будем обозначать ее через $M(\rho)$.

Пример 1. Возьмем случай $|A|=4$, $|B|=3$ и

$$\rho =\{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_4, b_2)\}.$$

Тогда соответствующая матрица M имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы имеем способ табулирования или кодирования отношения и можем закодировать отношение посредством φ или декодировать посредством φ^{-1}. Этот процесс является отображением (i, j) в $A\times B$ или M соответственно. Такое представление более удобно, чем теоретико-множественный способ определения отношений, поскольку с ним можно обращаться формальным образом. Оно становится даже более пригодным для вычислений, если наложить некоторую структуру на множество, из которого получается матрица. Возьмем опять {0, 1} и определим на этом множестве логическое сложение (**или**) и умножение (**и**). Тогда, если M и N — матрицы $p \times q$, соответствующие отношениям ρ и σ, то матрица Q, представляющая отношение τ, где

$$\tau = \{(a, b): \ (a, b) \in \rho \text{ или } (a, b) \in \sigma\},$$

определяется следующим $Q_{ij}=(M_{ij}$ или $N_{ij})=M_{ij}+N_{ij}$ (логическое сложение). Следовательно, имеет смысл называть Q *суммой* матриц M и N и писать

$$Q=M + N,$$

подразумевая, что Q, M и N имеют один и тот же размер и Q вычисляется по правилу покомпонентного сложения

$$Q_{ij}= M_{ij}+N_{ij}.$$

Это - пример использования коммутативной диаграммы, которая изображена на рис. 10.10, где производится операция на одном множестве с использованием операции на другом множестве посредством подходящего отображения φ.

$$\begin{tikzcd}
(\rho,\sigma) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \rho \cup \sigma \arrow[d, "\varphi"] \\
(M,N) \arrow[r, "+"'] & M+N
\end{tikzcd}$$

Рис. 10.10.

С этой диаграммой обычно связывается тождество

$$\varphi(\rho \cup \sigma) = \varphi(\rho) + \varphi(\sigma).$$

С помощью этого тождества можно дать более точное определение сложения матриц:

$$M+N=\varphi(\rho)+\varphi(\sigma)=\varphi(\rho \cup \sigma)=\varphi(\varphi^{-1}(M) \cup \varphi^{-1}(N)).$$

Пример 1. (продолжение). Пусть A и B те же, что и раньше, и пусть

$$\sigma =\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}.$$

Тогда

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дальше будет видно, что

$$\rho \cup \sigma = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_2)\}$$

и, что эквивалентно,

$$M + N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Более того, если мы возьмем множество $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ и рассмотрим отображение π между B и C, определенное следующим образом:

$$\pi = \{(b_1, c_1), (b_1, c_5), (b_2, c_2), (b_3, c_4), (b_3, c_5)\},$$

то оно может быть представлено в виде матрицы P, где

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что отношение $\pi \circ \rho$ между A и C корректно определено и, следовательно, будет отвечать матрице 4 × 5. Обозначим эту матрицу через S. Как ее можно вычислить? Для этого надо вычислить S_{ij} для всех i, j, где $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$. В силу биекции $S_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $(a_i, c_j) \in \pi \circ \rho$. Однако это так, если только существует некоторое $b \in B$ такое, что $(a_i, b) \in \rho$ и $(b, c_j) \in \pi$, т.е.

$$(a_i, c_j) \in \pi \circ \rho \equiv (a_i, b_1) \in \rho \text{ и } (b_1, c_j) \in \pi$$
$$\text{или } (a_i, b_2) \in \rho \text{ и } (b_2, c_j) \in \pi,$$
$$\text{или } (a_i, b_3) \in \rho \text{ и } (b_3, c_j) \in \pi;$$

или же, что эквивалентно,

$$S_{ij} = M_{i1} * P_{1j} + M_{i2} * P_{2j} + M_{i3} * P_{3j} = \sum_{k=1}^{3} M_{ik} * P_{kj}.$$

Матрица S, вычисленная по такому правилу, называется *произведением* M и P и обозначается через $M * P$ или просто MP.

Рассмотрим опять естественное (коммутативное) отношение между двумя рассматриваемыми операторами (рис. 10.11).

$$\begin{tikzcd}
(\rho,\pi) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi\circ\rho \arrow[d, "\varphi"] \\
(M,P) \arrow[r, "*"'] & M*P
\end{tikzcd}$$

Рис.10.11.

Тогда

$$M * P = \varphi(\varphi^{-1}(P)\circ\varphi^{-1}(M)).$$

Замечание. Изменение порядка φ зависят от способа определения матрицы отношения; если (вместо этого) мы определим матрицу отношения следующим образом:

M_{ij}= 1 тогда и только тогда, когда $(a_j, b_i) \in \rho$,

то изменения порядка не будет.

Пример 1 (продолжение). Выполним вычисления, соответствующие определенным выше отношениям. Получаем

$$MP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если матрицы M и N имеют одинаковый размер, то их сумма существует и определяется формулой

$$(M+N)_{ij}=M_{ij}+N_{ij}$$

а если матрицы P и M согласованны (M имеет размерность $p\times q$, а P — размерность $q\times r$), то умножение матрицы M на P возможно и определяется следующим образом:

$$(MP)_{ij} = \sum_{k=1}^{q} M_{ik} * P_{kj}.$$

Хотя матрицы рассматриваются над (Z_2, $\wedge$, $\vee$), мы используем символы * и + для того, чтобы иметь возможность обобщения введенных выше операций. С этого момента обозначения $\wedge$ и $\vee$ будут использоваться лишь в тех случаях, когда общие операции им неадекватны.

В заключительной части этого пункта ограничимся рассмотрением матриц, которые представляются отношениями на конечном множестве A, где $|A| = n$. Тогда все матрицы согласованы и их сумма и произведение всегда определены.

Из покомпонентного определения сложения следует, что сложение матриц коммутативно и существует *нулевая* $(n\times n)$*-матрица* 0: $0_{ij} = 0$ для всех i, j; $1\le i, j\le n$. С другой стороны, умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно, однако существует единица, которая называется *единичной $(n\times n)$-матрицей* и определяется следующим образом: I: $I_{ij}=1$, если $i=j$, и $I_{ij}=0$, если $i\neq j$. Так, если X — матрица $n\times n$ и $Y=XI$, то

$$Y_{ij}=\sum_{p=1}^{n}X_{ip}*I_{pj}=\sum_{\substack{p=1\\(p\neq j)}}^{n}X_{ip}*I_{pj}+X_{ij}*I_{jj}.$$

Так как все $I_{pj}=0$, за исключением случая $p=j$, то в сумме все члены, исключая те, где $p=j$, равны нулю. Кроме того, $I_{jj}=1$. Поэтому

$$Y_{ij}=X_{ij},\quad \text{т.е.}\quad Y=X.$$

Следовательно, $X=XI$. Аналогично $IX=X$; поэтому

$$IX=X=XI.$$

Обратная по умножению матрица может не существовать; однако если она существует, то она единственная. Если матрица имеет обратную, то она называется обратимой.

Пример 2. Не существует матрицы X такой, что

$$X\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=I.$$

Доказательство. Вычисление произведения дает

$$\begin{bmatrix}0&X_{12}\\0&X_{22}\end{bmatrix}.$$

Следовательно, какие бы значения компонент матрицы X не рассматривались, элемент (1, 1) произведения никогда не будет равен 1, откуда и следует требуемый результат.

Таким образом, множество квадратных матриц заданного размера с определенными на нем операциями умножения и сложения образует кольцо.

Используя дальше связь между бинарными отношениями на множестве и матрицами над $(Z_2, \wedge, \vee)$, дадим следующие определения.

Транспонированной матрицей M называется матрица M^{T} такая, что

$$M_{ij}^{T}=M_{ji}$$

(поэтому, если M получена из отношения σ, то M^{T} может быть получена из отношения σ^{-1}); *транзитивное замыкание* M^{+} и *рефлексивное замыкание* M^{*} (изоморфны соответственно σ^{+} и σ^{*}) определяются следующим образом:

$$M^{+}=\sum_{n=1}^{\infty}M^{n},\quad M^{*}=\sum_{n=0}^{\infty}M^{n},$$

где $M^0 = I$, $M^1 = M$ i $M^{n+1} = MM^n$ ($n \in$ N). (В некоторых случаях эти замыкания нельзя определить корректно (чтобы соответствующие ряды сходились), однако над (Z_2, $\wedge$, $\vee$) определение корректно, поскольку это — замкнутое полукольцо.)

В заключение заметим, что матрицы могут быть частично упорядочены путем поэлементного сравнения, а именно

$M \le N$ тогда и только тогда, когда $M_{ij} \le N_{ij}$ для всех i, j.

Из данного определения следует, что

$M \le N$ тогда и только тогда, когда $M + N = N$,

при условии что + является операцией «максимум», подобной **или**.

10.3. Логические отношения

Логические отношения объединяют отношение логической эквивалентности, понимаемое как взаимозаменяемость СЕИ, и отношение причинно-следственной связи СЕИ в процессе их обработки.

Две СЕИ называются логически эквивалентными, если одна из них может заменить другую в процессах расчета выходных показателей, причем замена не приведет к потере информации.

Рассмотрим структуру составной единицы информации как некоторое множество A_m, элементами которого являются составляющие реквизиты $a_1, a_2, ..., a_n$ ($a_i \in A_m$). Из этих элементов их различными сочетаниями без повторений по 1,2, ..., n элементам можно образовать некоторые множества $A_1, A_2, ..., A_m$, в число которых входит и множество A_m.

Пусть объединение $\bigcup\limits_i A_i$ образует множество X ($A_i \in X$).

Произведем разбиение множества X на два подмножества: M и $M' = X \backslash M$ (множество M содержит все СЕИ, эквивалентные исходной СЕИ A_m). Обозначим подмножества $A_i \in M$ через B_j и $A_i \in M'$ —через C_k : $M = \bigcup\limits_j B_j$ и $M' = \bigcup\limits_k C_k$. Из условия следует, что $M \cap M' = \varnothing$;

$$M \bigcup M' = X;\ A_m \in M.$$

Задача состоит в том, чтобы для данной совокупности составляющих сформулировать такую логическую функцию $\Phi(a_1, a_2, ..., a_n)$, которая была бы истинной для множества M и ложной для множества M'. Практически это означает отбор такой совокупности различных СЕИ A_i, когда каждая будет эквивалентна рассматриваемой СЕИ A_m,

Рассмотрим, например, СЕИ приходного ордера и введем следующие обозначения:
A_1 — предприятие; a_2 — номер приходного ордера; a_3 — дата, число; a_4 — дата, месяц; a_5 — дата, год; a_6 — склад, название;. a_7 — склад, код; a_8 — вид операции; a_9— поставщик, название; a_{10} — поставщик, код; a_{11} — наименование материала, сорт, размер; a_{12} — номенклатурный номер; a_{13} — единица измерения; a_{14} — количество по документу; a_{15} — количество принято; a_{16} — цена; a_{17} — сумма; a_{18} — подписи.
Тогда лишь некоторыми из возможных структур СЕИ, эквивалентных приведенной, могут быть, например, следующие:

$B_1.(a_1, a_5, a_3, a_4, a_2, a_7, a_6, a_8, a_{10}, a_9, a_{12}, a_{11}, a_{13}, a_{15}, a_{14}, a_{16}, a_{17}, a_{18})$,
$B_2.(a_2, a_3, a_4, a_7, a_8, a_{10}, u_{12}, a_{15})$,
$B_3.(a_2, a_{11}, \ldots, a_{17}, a_3, \ldots, a_{10}, a_{18})$,
$B_4.(a_9, a_6, a_2, a_{11}, a_{16}, a_{14}, a_{15}, a_{17}, a_3, a_4, a_5, a_{18})$,
$B_5.(a_{18}, a_3, a_4, a_5, a_8, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{13}, a_{15}, a_{16})$.

Общее количество (h_1) различных по структуре СЕИ, эквивалентных исходной, может быть довольно большим и равным числу наборов значений аргументов, для которых функция $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{18})$ вырабатывает значение истинности.

В то же время можно указать множество СЕИ, состоящих из тех же элементов, что и структура исходной СЕИ, но не эквивалентных ей, например:

$C_1.(a_1, a_2)$,
$C_2.(a_1, \ldots, a_{10}, a_{13}, \ldots, a_{18})$,
$C_3.(a_1, \ldots, a_{13}, a_{16}, a_{17}, a_{18})$,
$C_4.(a_1, \ldots, a_5, a_{11}, \ldots, a_{16})$,
$C_5.(a_{12}, \ldots, a_{17})$.

Общее число (h_0) таких СЕИ, не эквивалентных исходной, равно числу наборов значений аргументов, для которых функция $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{18})$ вырабатывает значение ложности. Очевидно, что $2^{18} = h_1 + h_0$.
При известных значениях функции для каждого набора значений аргументов с целью определения функции в виде логического выражения, операндами которого являются аргументы функции, строится таблица, где построчно записываются все наборы значений аргументов и против каждого из наборов указывается соответствующее значение функции. По каждому из наборов, для которых значение функции равно истинности, выписываются конъюнктивные суждения (причем аргументы, имеющие в данном наборе значение ложности, даются с логическим отрицанием), которые затем связывают

дизъюнкцией, задавая функцию выражением в нормальной дизъюнктивной форме. А можно, наоборот, обратить внимание на те наборы, для которых значение функции ложно, и по ним выписывать дизъюнктивные суждения (с логическим отрицанием аргументов со значением истинности в наборе), связав их конъюнкцией в нормальную конъюнктивную форму.

Так, для составной, имеющей реквизиты *А, В* и *С* и определенную логическую функцию возможного состава других структур аналогичного назначения, таблица для определения функции может быть следующей:

Номер набора	Значение аргумента			Значение функции $\Phi(A,B,C)$
	A	B	C	
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Функция *Ф (А, В, С)* для указанного случая определяется логическим выражением

$$\bar{A}\wedge\bar{B}\wedge C\vee\bar{A}\wedge B\wedge C\vee A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\vee A\wedge\bar{B}\wedge C$$

или

$$(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee\bar{B}\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C}).$$

Первое из них после упрощения преобразуется в выражение $\bar{A}\wedge C\vee A\wedge\bar{B}$, а второе — в выражение $(A\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B})$. Оба эти выражения эквивалентны, что доказывается также тождественными преобразованиями.

Метод определения функции через логическое выражение, включающее логические операции, на полном наборе значений аргументов практически приемлем лишь при незначительном числе аргументов ($n\leq 6$—7). Однако для случая СЕИ приходного ордера, когда $n = 18$, применение этого метода в таком виде затруднено. На промышленных предприятиях СЕИ в среднем состоит из 26 реквизитов. Таблица для определения функции логической связи составляющих СЕИ в этом случае будет иметь около 67 млн. строк.

В связи с этим наиболее приемлемым представляется такой подход, при котором все СЕИ разбиваются на небольшие группы с явным наличием некоторой логической связи. С помощью таблицы наборов значений аргументов, или каким-либо другим способом формулируется логическое выражение, связывающее члены этой группы. Затем первоначальные группы (*А*-группы) аналогичным образом группируются в более укрупненные группы (*В*-группы) и для каждой из них определяется логическая функция. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена логическая функция для всей СЕИ. Так, СЕИ рассматриваемого приходного ордера при таком подходе с учетом наличия групповых логических связей реквизитов может быть разбита на следующие группы:

$$b_1.(a_2,\ a_8);\ b_2.(a_3,\ a_4,\ a_5);\ b_3.(a_6,\ a_7);$$
$$b_4.(a_9,\ a_{10});\ b_5.(a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{16});$$
$$b_6.(a_{14},\ a_{15},\ a_{16},\ a_{17});\ b_7.(a_1,\ a_{18});$$
$$b_8.(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6);\ S.(b_8,\ b_7).$$

С учетом построенных групп структура СЕИ могла бы быть задана в следующем виде:

$$\begin{aligned} S.(b_8.\ (b_1.\ &(a_2,\ a_8), \\ &b_2.(a_3,\ a_4,\ a_5), \\ &b_3.(a_6,\ a_7), \\ &b_4.(a_9,\ a_{10}), \\ &b_5.(a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{16}), \\ &b_6.(a_{14},\ a_{15},\ a_{16},\ a_{17})) \\ &b_7.(a_1,\ a_{18})). \end{aligned}$$

В результате построения таблиц наборов значений аргументов и функций для каждой из групп получаем для них следующие логические выражения:

Группа	Логическое выражение
b_1	$a_2 \vee a_8$
b_2	$a_3 \wedge a_4 \wedge \bar{a}_5 \vee a_3 \wedge a_4 \wedge a_5$
b_3	$a_6 \vee a_7$
b_4	$a_9 \vee a_{10}$
b_5	$a_{11} \wedge a_{12} \wedge a_{13} \wedge a_{16} \vee a_{11} \wedge a_{12} \wedge a_{13} \wedge \bar{a}_{16} \vee$ $\vee a_{11} \wedge a_{12} \wedge \bar{a}_{13} \wedge a_{16}$
b_6	$\bar{a}_{14} \wedge a_{15} \wedge \bar{a}_{16} \wedge a_{17} \vee \bar{a}_{14} \wedge a_{15} \wedge a_{16} \wedge \bar{a}_{17}$ $\vee a_{14} \wedge a_{15} \wedge \bar{a}_{16} \wedge \bar{a}_{17} \vee a_{14} \wedge a_{15} \wedge a_{16} \wedge \bar{a}_{17}$ $\vee a_{14} \wedge a_{15} \wedge a_{16} \wedge a_{17}$
b_7	$\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_{18} \vee \bar{a}_1 \wedge a_{18} \vee a_1 \wedge \bar{a}_{18} \vee a_1 \wedge a_{18}$
b_8	$b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 \wedge b_4 \wedge b_5 \wedge b_6$
S	$b_8 \wedge \bar{b}_7 \vee b_8 \wedge b_7$

В логических выражениях каждый операнд рассматривается как имеющий значение истинности при его наличии в структуре СЕИ или имеющий значение ложности при его отсутствии в структуре.

Подстановкой логических выражений групп b_7 и b_8 в логическое выражение для группы S и логических выражений групп b_1, ..., b_6 в логическое выражение для группы b_8 получаем общее логическое выражение взаимосвязи элементов в структуре СЕИ S:

$$\begin{gathered}
\Phi = (a_2 \vee a_8) \wedge (a_3 \wedge a_4 \wedge \bar{a}_5 \vee a_3 \wedge a_4 \wedge a_5) \wedge \\
\wedge (a_6 \vee a_7) \wedge (a_9 \vee a_{10}) \wedge \\
\wedge (a_{11} \wedge a_{12} \wedge a_{13} \wedge a_{16} \vee a_{11} \wedge a_{12} \wedge a_{13} \wedge \bar{a}_{16} \vee \\
\vee a_{11} \wedge a_{12} \wedge \bar{a}_{13} \wedge a_{16}) \vee \\
(\bar{a}_{14} \wedge a_{15} \wedge \bar{a}_{16} \wedge a_{17} \vee \bar{a}_{14} \wedge a_{15} \wedge a_{16} \wedge \bar{a}_{17} \vee \\
\vee a_{14} \wedge a_{15} \wedge \bar{a}_{16} \wedge \bar{a}_{17} \vee \\
\vee a_{14} \wedge a_{15} \wedge a_{16} \wedge \bar{a}_{17} \vee a_{14} \wedge a_{15} \wedge a_{16} \wedge a_{17}).
\end{gathered}$$

Формулировка взаимосвязи элементов структуры СЕИ в виде логического выражения, задающего функцию этой взаимосвязи Φ (a_1, ..., a_n), необходима прежде всего в связи с тем, что выведенное логическое выражение может быть определенным образом преобразовано и упрощено в соответствии с существующим аппаратом математической логики. Следовательно, может быть упрощена и структура СЕИ, отображенная логическим выражением.

При рассмотрении структуры СЕИ как множества A и анализа множества M множеств B_j при $B_j \subset A$ исходным служит предположение, что если логическое выражение L_A, определяющее логическую функцию $\Phi\ (a_1, ..., a_n)$, истинно, то логические выражения L_B для каждого из подмножеств B_j также истинны. Так как каждое L_{B_j} выводимо из L_A, то правомерна, постановка задачи: из заданного для данной структуры СЕИ множества L_B найти такое L_{B_j}, которое имело бы минимальную возможную сложность в отношении суммарного количества входящих в него операндов. Другими словами, требуется минимизировать исходные логическое выражение и структуру рассматриваемой СЕИ.

После преобразований рассматриваемое логическое выражение примет следующий вид:

$$\Phi = a_3 \wedge a_4 \wedge a_{15} \wedge (a_2 \vee a_8) \wedge (a_6 \vee a_7) \wedge (a_9 \vee a_{10}) \wedge$$
$$\wedge\ (a_{11} \vee a_{12}) \wedge (a_{17} \vee a_{16}).$$

На основе этого логического выражения может быть построена СЕИ приходного ордера со структурой, содержащей восемь реквизитов вместо 18 в первоначальном варианте, т. е. достигнуто существенное упрощение структуры.

Учитывая, что код всегда содержит меньше символов, чем полное наименование, следует выбрать a_7 вместо a_6, a_{10} вместо a_9, a_{12} вместо a_{11}. Длина реквизита a_8 обычно меньше, чем длина a_2, длина a_{16} меньше, чем длина a_{17}. Поэтому СЕИ, эквивалентная приходному ордеру и имеющая минимальную длину значения, содержит реквизиты: a_3—дата, число; a_4 — дата, месяц; a_7 — склад, код; a_8 — вид операции; a_{10} —поставщик, код; a_{12} — номенклатурный номер материала;a_{15} — количество принято; a_{16} — цена.

Метод отображения структур СЕИ через логические выражения с их последующим преобразованием и минимизацией является теоретической основой упрощения документов и минимизации объема данных на основе упрощения структур. В результате применения этого метода может быть достигнуто значительное сокращение объема первичных данных.

Существуют также основанные на этом же принципе методики, позволяющие анализировать и упрощать структуры СЕИ с помощью средств вычислительной техники. А поскольку принципиально возможно автоматическое определение логической взаимосвязи реквизитов формы документа на основе машинного анализа фактического содержания массива документов заданной формы, то и проектирование минимального состава исходных СЕИ на основе изучения существующей инфомационной системы поддается формализации.

Рассмотрение логической взаимосвязи составляющих СЕИ позволяет ввести некоторые новые определения по признанному составу показателей.

Пусть даны показатель $П_1$ $(q_1, q_2, q_3, q_4, P_1)$, где q_i — признак, а P_1 — основание, и логическая функция F_1, значение истинности (1) которой соответствует наборам значений аргументов (соответствующих утверждениям о наличии определенных реквизитов в форме показателя), обусловливающим возможность существования показателя:

Номер набора	q_1	q_2	q_3	q_4	P_1	F_1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	0
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	0
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	0
13	0	1	1	0	1	0
14	0	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0
18	1	0	0	1	0	0
19	1	0	0	1	1	0
20	1	0	1	0	0	0
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	0
23	1	0	1	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	0
27	1	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	0
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	0
31	1	1	1	1	1	1

Для этого примера показатель может существовать лишь в случае, если его форма отвечает комбинациям реквизитов, соответствующим наборам 15 и 31, т.е. функции F_1, выраженной в форме дизъюнкции:

$$F_1 = \bar{q}_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \wedge q_4 \wedge P_1 \vee q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \wedge q_4 \wedge P_1.$$

В результате преобразования имеем:

$$F_1 = q_2 \wedge q_3 \wedge q_4 \wedge P_1 \wedge (q_1 \vee q_1) = q_2 \wedge q_3 \wedge q_4 \wedge P_1.$$

Следовательно, данный показатель может существовать только в случае, если в его структуру будут обязательно входить реквизиты

$$q_2, q_3, q_4, P_1.$$

Реквизиты показателя, связанные конъюнкцией, назовем обязательными. Такие реквизиты образуют так называемый реквизитный минимум показателя. Как правило, к числу обязательных реквизитов относится основание (исключение составляют лишь основания булевых показателей — единицы). Поэтому для показателей чаще используют обязательные признаки и призначный минимум. Минимумом признаков следует считать такое их число, сокращение которого (хотя бы на один признак) приводит к возможности подмены одного факта другим, к полному искажению показателя.

Одно из основных назначений признаков — конкретизация изучаемого факта, такая индивидуализация показателя, при которой его нельзя спутать, смешать с другим фактом, подменить другим показателем. Следовательно, индивидуализация легче достигается при большом числе признаков и затрудняется при малом их числе. Другими словами, с уменьшением числа признаков возрастает энтропия. Минимум признаков — это предел, после которого наступает относительно полная энтропия. В связи с этим возникает вопрос, следует ли в этих условиях стремиться к минимуму признаков, если возрастает энтропия и ограничиваются возможности анализа изучаемого явления, поскольку уменьшается информационная ценность показателя. Правильный ответ на этот вопрос можно получить, лишь проанализировав взаимосвязь реквизитов и раскрыв соотношение между механизмами минимизации объемов информации и восстановления информационной ценности данных.

Рассмотрим некоторые примеры взаимосвязи реквизитов.

Пусть для показателя $П_2.(q_1, q_2, q_3, q_4, P_1)$ возможность существования выражается значениями истинности логической функции F_3 при наборах аргументов 11, 13, 15, 27, 29 и 31, т. е. когда функция F_2 имеет дизъюнктивную нормальную форму:

$$F_2=\bar{q}_1\wedge q_2\wedge\bar{q}_3\wedge q_4\wedge P_1\vee\bar{q}_1\wedge q_2\wedge q_3\wedge\bar{q}_4\wedge P_1\vee$$
$$\vee\bar{q}_1\wedge q_2\wedge q_3\wedge q_4\wedge P_1\vee q_1\wedge q_2\wedge\bar{q}_3\wedge q_4\wedge P_1\vee$$
$$\vee q_1\wedge q_2\wedge q_3\wedge\bar{q}_4\wedge P_1\vee q_1\wedge q_2\wedge q_3\wedge q_4\wedge P_1.$$

После преобразований

$$F_2=(\bar{q}_1\vee q_1)\wedge q_2\wedge(q_3\vee q_4)\wedge P_1=q_2\wedge(q_3\vee q_4)\wedge P_1.$$

Здесь возможно превращение показателя $П_2$ в информационное образование $S.(q_2, C_1.(q_3, q_4), P_1)$, в котором все три элемента q_2, C_1, P_1 связаны конъюнкцией и поэтому являются обязательными. Однако признаки q_3 и q_4 в функции F_2 связаны дизъюнкцией, что выражает возможность существования в форме показателя $П_2$ как каждого из них в отдельности, так и вместе (невозможен лишь случай отсутствия в форме сразу и q_3 и q_4). Отсюда правомерно наличие двух наборов реквизитных минимумов для данного показателя q_2, q_3, P_1 и q_2, q_4, P_1. Реквизиты такого типа называются тождественными, и при их наличии в форме СЕИ один из них может быть аннулирован с целью достижения реквизитного минимума. Примерами таких признаков являются наименование материала и его номенклатурный номер, фамилия рабочего и его табельный номер, номер автомашины и табельный номер шофера (если машина закреплена постоянно за одним и тем же водителем) и др.

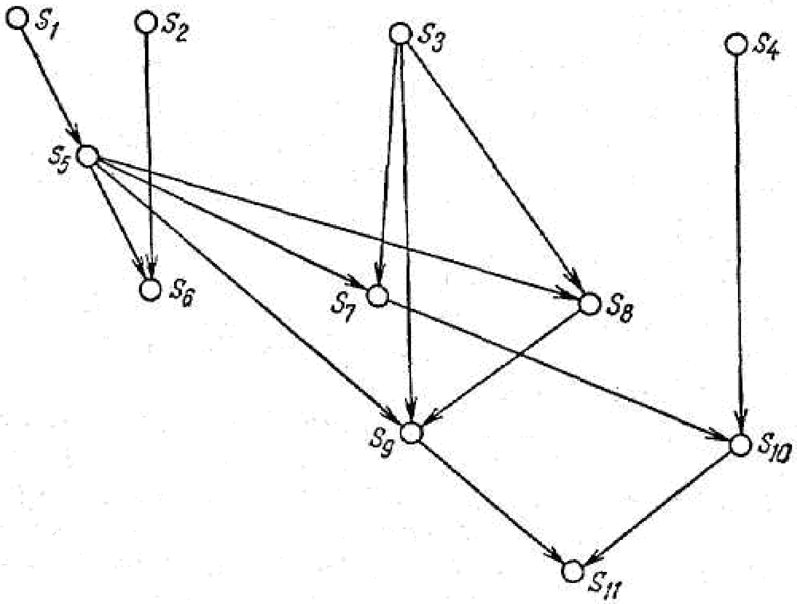


Рис. 10.12. Ориентированный граф отношения причинно-следственной связи для СЕИ, используемых в задачах учета

На множестве СЕИ можно определить отношение причинно-следственной связи, которое является строгим порядком. Две СЕИ S_j и S_k образуют элемент отношения, если S_j используется при расчете значений S_k. Антирефлексивность означает, что S_j не используется при расчете самой себя. Свойство транзитивности фиксирует, что S_m используется при расчете S_k, если пары (S_m, S_j) и (S_j, S_k) принадлежат отношению.

Ориентированный граф отношения причинно-следственной связи для СЕИ, используемых в задачах ежемесячного учета основных фондов на промышленном предприятии, приведен на рис. 10.12. Элемент отношения (S_j, S_k) обозначается на графе стрелкой от S_j к S_k.

Вершины графа соответствуют следующим СЕИ: S_1 — инвентарные данные по учету основных средств; S_2—движение готовой продукции; S_3 — движение основных средств; S_4 — бухгалтерские проводки; S_5 — сводные данные по основным фондам; S_6 — ведомость использования основных средств; S_7 — данные по амортизационным отчислениям; S_8—оборотная ведомость основных средств; S_9— движение основных фондов; S_{10} — отчет по капитальным ремонтам; S_{11} — использование основных фондов по цехам предприятия.

Взаимосвязь СЕИ в процессе их обработки, представляемая отношением причинно-следственной связи, характеризуется рядом параметров.

Число дуг, входящих в вершину S_i, определяет количество СЕИ, участвующих в создании данной СЕИ. Назовем такое число параметром спроса СЕИ S_i и обозначим его через $p^+(i)$. Параметр спроса СЕИ характеризует в определенной мере сложность образования СЕИ. Например, на приведенном графе $p^+(i) = 3$ имеет СЕИ S_9, $p^+(i) = 2$ имеют СЕИ $S_6, S_7, S_8, S_{10}, S_{11}$.

СЕИ, для которых $p^+(i) = 0$, назовем входящими, поскольку они содержат первичную информацию. На рис. 10.12 входящими СЕИ являются S_1—S_4. Все СЕИ с $p^+(i) > 0$ называются производными.

Число дуг, исходящих из вершин S_i, определяет, сколько раз данная СЕИ участвует в создании других СЕИ, точнее, сколько раз она используется. Назовем такое число параметром использования СЕИ и обозначим его через $p^-(i)$. Параметр использования СЕИ в известной мере характеризует ее полезность. Например, на приведенном графе $p^-(i) = 4$ имеет СЕИ S_5. На практике к СЕИ, имеющим высокое значение параметра использования, должны предъявляться повышенные требования в отношении достоверности данных и соблюдения сроков их формирования.

СЕИ, для которых $p^-(i) = 0$, назовем исходящими (в нашем примере — это СЕИ S_6 и S_{11}).

Следует, однако, отметить, что для рассматриваемого графа параметры использования являются неполными, поскольку не отражают всех направлений использования СЕИ за пределами задачи учета основных фондов. Поэтому параметры использования производных СЕИ занижены. Для рассматриваемого графа также занижены и параметры спроса СЕИ, поскольку каждая из входящих СЕИ может поступать из нескольких внешних источников. Например, инвентарные данные по учету основных средств (S_1) фактически поступают от многих подразделений предприятия в виде отдельных СЕИ.

Для получения более точных значений параметров спроса и использования СЕИ необходимо рассматривать каждую задачу в полном взаимодействии со всей АИС, внешними источниками и потребителями данных АИС, со всей внешней средой.

Введем для СЕИ S_i параметр полного спроса $q^+(i)$, равный числу СЕИ S_i, таких, что на графе существует путь от S_i к S_i. Аналогичный параметр полного использования $q^-(i)$ равен числу СЕИ S_p, таких, что на графе существует путь от S_i к S_p. Параметры $q^+(i)$ и $q^-(i)$ для всех СЕИ, приведенных на рис. 10.12, даны в табл. 10.5.

Таблица 10.5

Имя СЕИ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q^+	0	0	0	0	1	3	3	3	4	4	8
q^-	7	1	5	2	5	0	2	2	1	1	0

Применение параметра полного использования СЕИ дает некоторый объективный критерий для установления приоритета тщательности контроля этой СЕИ. Ведь при значении $q^-(i)$ n ошибка в значениях СЕИ S_i отразится на точности n получаемых на ее основе СЕИ.

Отношение строгого порядка, подобное рассмотренному выше, можно определить и на множестве показателей. Использование показателей вместо СЕИ позволяет дать более точные значения параметров спроса и использования, поскольку в составе СЕИ могут быть показатели с различной характеристикой (например, входящие и производные, постоянные и переменные).

10.3. Арифметические отношения

Арифметическим называется бинарное однородное отношение между двумя отдельными значениями совпадающих по структуре СЕИ и, в частности, одной и той же СЕИ.

При изучении отношений информационных единиц на уровне их значений рассматриваемые совокупности чаще выступают в виде кортежей — специальных конечных множеств, в которых имеет существенное значение порядок элементов и допустимо их повторение. В кортеже (его также называют вектором или набором) фиксировано местоположение каждой его компоненты, причем четко определено, что компонента a_i предшествует компоненте a_{i+1} или $a_i < a_{i+1}$. Поэтому кортежи $< a, b > \neq < b, a >$, тогда как для множеств $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Допустимость повторения элементов, в частности, означает, что для кортежей $<c> \neq <c, c>$, в то время как для множеств $\{c\} = \{c, c\}$.

Такой подход позволяет ввести в рассмотрение соответствие между элементами двух множеств, в том числе взаимнооднозначное соответствие, когда каждому элементу множества A поставлен в соответствие один и только один элемент множества B, разным элементам множества A поставлены в соответствие разные элементы множества B и каждый элемент множества B поставлен в соответствие хотя бы одному элементу множества A. Сформулированные правила находят широкое применение при кодировании информации.

Взаимно-однозначные и многозначные соответствия между элементами множества (множеств) нашли свое выражение в самых разнообразных формах представления и преобразования информации: кодировании и декодировании, группировках, классификационных построениях, сортировке, выборке, подборке, поиске и др. В практике создания систем машинной обработки данных отношение соответствия элементов в большинстве случаев сводится к арифметическому отношению.

Для элементов со значениями числового типа арифметические отношения ($=, \neq, <, \leq, >, \geq$) вполне естественны вне зависимости от их кодового представления. У элементов текстового типа старшинство отдельных символов устанавливается согласно их взаимному расположению в алфавите либо символ кодируется набором цифр из множества $\{0, 1\}$ и арифметические отношения между символами отождествляются с отношениями между их кодами.

Для значений, принадлежащих разным реквизитам, может быть определено арифметическое отношение строгого порядка.

Рассмотрим пример. Пусть дан массив сообщений $C_a.(1{:}n).\ (r_1, r_2, r_3, r_4)$, такой, что каждому значению реквизита r_1 соответствует класс значений реквизитов r_2, каждому значению последнего — класс значений реквизита r_3, а каждому значению реквизита r_3 — класс значений реквизита r_4. Эти условия характерны, например, для случая, когда r_1 — код министерства, r_2 — код предприятия, r_3 — код цеха, r_4 — код бригады. Значения реквизитов r_1, r_2, r_3, r_4 будем обозначать $r_{1,i}$, $r_{2,j}$, $r_{3,k}$, $r_{4,m}$. Класс значений, связанных со значением $r_{t,s}$ реквизита r_t, будем обозначать $R_{t,s}$.

Из приведенного на рис. 10.13 примера содержания массива видно, что

$$R_{3,1} = \{r_{4,1}, r_{4,2}, r_{4,3}\},\ R_{3,2} = \{r_{4,4}, r_{4,5}\},\ R_{3,3} = \{r_{4,6}, r_{4,7}, r_{4,8}, r_{4,9}\},\ R_{3,4} = \{r_{4,10}, r_{4,11}, r_{4,12}\},\ R_{3,5} = \{r_{4,13}, r_{4,14}\},\ R_{3,6} = \{r_{4,15}, \ldots\},\ R_{2,1} = \{r_{3,1}, r_{3,2}\},$$

$R_{2,2} = \{r_{3,3},\ r_{3,4},\ r_{3,5}\},\ R_{2,3} = \{r_{3,6},\ \ldots\},\ R_{1,1} = \{r_{2,1},\ r_{2,2},\ r_{2,3},\ \ldots\}.$

Классы не пересекаются, т. е.

$$R_{3,i} \cap R_{3,j} = \varnothing,\ R_{2,i} \cap R_{2,j} = \varnothing \text{ для } i \neq j.$$

Это свойство показывает, что, зная значение реквизита $r_{4,m}$, можно всегда определить значение реквизита $r_{3,n}$, по нему — значение реквизита $r_{2,j}$ и по последнему — значение реквизита $r_{1,i}$.

r_1	r_2	r_3	r_4
$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{3,1}$	$r_{4,1}$
$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{3,1}$	$r_{4,2}$
$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{3,1}$	$r_{4,3}$
$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{3,2}$	$r_{4,4}$
$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{3,2}$	$r_{4,5}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,3}$	$r_{4,6}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,3}$	$r_{4,7}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,3}$	$r_{4,8}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,3}$	$r_{4,9}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,4}$	$r_{4,10}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,4}$	$r_{4,11}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,4}$	$r_{4,12}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,5}$	$r_{4,13}$
$r_{1,1}$	$r_{2,2}$	$r_{3,5}$	$r_{4,14}$
$r_{1,1}$	$r_{2,3}$	$r_{3,6}$	$r_{4,15}$

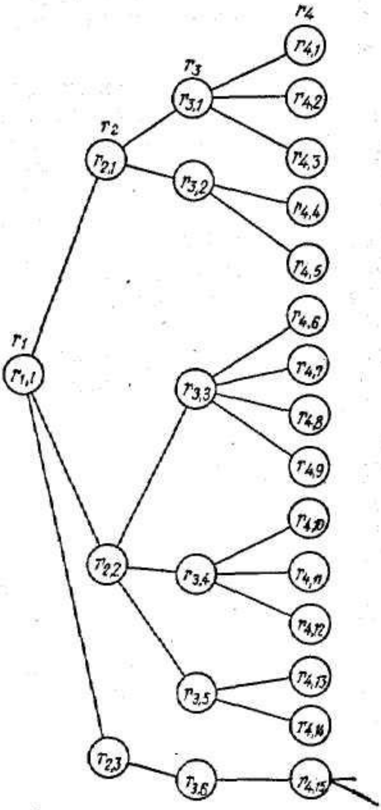


Рис. 10.13. Граф арифметического отношения строгого порядка

Такую характеристику имеет массив булевых показателей, в которых основания (со значениями, равными единице) обычно скрыты. Его признаки (в нашем примере — r_1, r_2, r_3 и r_4) взаимосвязаны и соподчинены групповым иерархическим отношением, в котором каждая зависимая группа (значений одного признака) связана с одним родителем (одним значением другого признака). Соподчиненность строго детерминирована структурой значений массива, благодаря чему имеется определенное старшинство реквизитов (признаков). Так, в рассмотренном примере, реквизит r_1 является самым старшим в группировке, а реквизит r_4 — самым младшим (зависимым). Младший признак в таком массиве непосредственно относится к скрытому основанию и поэтому называется основным.

Основные признаки булевых показателей относятся к индивидуальным признакам, отображающим свойства, присущие единичным значениям показателя (в отличие от общих признаков, отображающих свойства, присущие совокупности значений показателя). Именно поэтому одно подмножество значений основного признака не пересекается с другим подмножеством его значений (например, $R_{3,1} \cap R_{3,2} = \varnothing$). Благодаря этому при наличии зафиксированной полной номенклатуры значений какого-либо булевого показателя в остальных СЕИ в составе обязательных признаков можно оставлять только основные.

Для совпадающих по структуре СЕИ можно определить арифметическое отношение толерантности следующим образом. Зафиксируем структуру СЕИ $S.(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ и рассмотрим два значения $<p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}>$ и $<p_{12}, p_{22}, ..., p_{n2}>$. Они образуют элемент арифметического отношения толерантности, если найдется хотя бы одно k, при котором $p_{k1} = p_{k2}$.

Благодаря введению арифметической толерантности появляется возможность рассматривать родственность составных единиц информации не только по структуре, но и по значениям отдельных совпадающих реквизитов-признаков и на этой основе находить возможности изменения структур данных, их минимизации. Если, например, все составные единицы информации некоторой информационной системы (допустим, предприятия) содержат общий реквизит-признак с одним и тем же значением, то такой реквизит может быть выведен во второй уровень информационной структуры и тем самым не присутствовать во всех ее составляющих. Примерами таких реквизитов для системы предприятия могут служить признаки «наименование предприятия» и «адрес предприятия» (данного). Такие реквизиты-признаки, называемые подразумеваемыми, или используемыми по умолчанию, обычно не фиксируются в формах документов. Реквизиты, обладающие такими свойствами, становятся для данной системы (подсистемы) подразумеваемыми только в том случае, если имеющие их СЕИ являются для системы внутренними (т.

е. не относятся к входящей в систему и исходящей из нее информации).

Возможность выделения отдельных реквизитов в структуре распространима и на составные единицы информации. Допустим, что СЕИ *И* имеет следующее содержание:

$$И = \begin{vmatrix} q_{11}, q_{22}, q_{31}, q_{41}, q_{51}, p_{11}, p_{21} \\ q_{11}, q_{22}, q_{31}, q_{42}, q_{52}, p_{11}, p_{22} \\ q_{11}, q_{22}, q_{31}, q_{43}, q_{53}, p_{11}, p_{23} \\ q_{11}, q_{22}, q_{31}, q_{44}, q_{54}, p_{11}, p_{24} \\ q_{11}, q_{22}, q_{32}, q_{41}, q_{51}, p_{11}, p_{25} \\ q_{11}, q_{22}, q_{32}, q_{41}, q_{52}, p_{12}, p_{26} \\ q_{11}, q_{22}, q_{32}, q_{41}, q_{53}, p_{13}, p_{27} \end{vmatrix}$$

Структуру *И* выразим в виде $И.(1:7).(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, P_1, P_2)$, где q_i, P_j — имена реквизитов. Значения признаков q_1 и q_2 одинаковы для всех позиций массива. Тогда эти признаки можно вынести во второй уровень структуры (рис. 10.14, *а, б):*

$$И.(q_1, q_2, И_i.(1:7).(q_3, q_4, q_5, P_1, P_2).$$

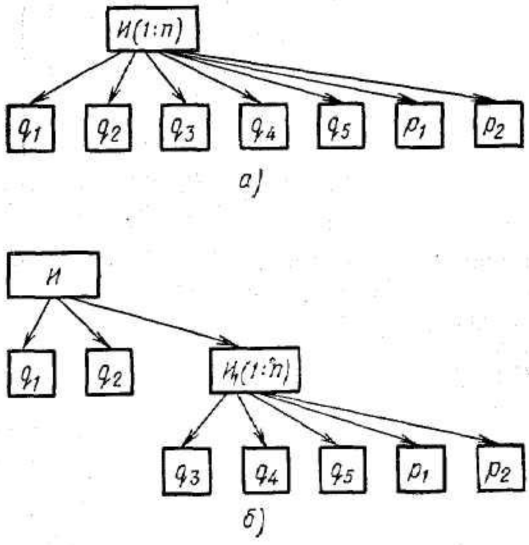


Рис. 10.14. Пример преобразования структуры значений СЕИ

Пусть R — общее количество реквизитов СЕИ *И* до преобразования, R_n — число выделяемых во второй уровень реквизитов и n —количество элементов (записей) в массиве (его длина). Если измерять объем данных (Q) в словах, принимая под словом одно значение одного реквизита в элементе массива (иногда это называют строко-графой), то объем данных для исходной СЕИ (Q_0) можно вычислить по формуле $Q_0 = Rn$. Для СЕИ с преобразованной структурой объем данных в словах (Q_1) равен

$$Q_1 = R_В + (R — R_В)\,n = Rn — R_В\,(n — 1).$$

Очевидно, что Q_1 меньше Q_0 на величину $R_В(n— 1)$. Для рассматриваемой СЕИ *И* имеем $R = 7$, $R_В = 2$ и $n=7$. Поэтому $Q_1 = 49$ и $Q_1 = 37$.

Выделив признаки q_{11} и q_{22}, получим следующую структуру значений СЕИ с объемом данных Q_1:

$$И = q_{11}, q_{22} \left| \begin{array}{l} q_{31}, q_{41}, q_{51}, p_{11}, p_{21} \\ q_{31}, q_{42}, q_{52}, p_{11}, p_{22} \\ q_{31}, q_{43}, q_{53}, p_{11}, p_{23} \\ q_{31}, q_{44}, q_{54}, p_{11}, p_{24} \\ q_{32}, q_{41}, q_{51}, p_{11}, p_{25} \\ q_{32}, q_{41}, q_{52}, p_{12}, p_{26} \\ q_{32}, q_{41}, q_{53}, p_{13}, p_{27} \end{array} \right|$$

Выполняя дальнейшие преобразования, получаем:

$$И = q_{11}, q_{22} \left| \begin{array}{l} q_{31}, p_{11} \begin{pmatrix} q_{41}, q_{51}, p_{21} \\ q_{42}, q_{52}, p_{22} \\ q_{43}, q_{53}, p_{23} \\ q_{44}, q_{54}, p_{24} \end{pmatrix} \\ q_{32}, q_{41} \begin{pmatrix} q_{51}, p_{11}, p_{25} \\ q_{52}, p_{12}, p_{26} \\ q_{53}, p_{13}, p_{27} \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

Для данного случая имеем:

$$Q_2 = R \times n — R_В\,(n — 1) — R_{B_1}\,(n, — 1) + R_{B_2}\,(n_2 — 1),$$

где R_{B_1} — число выделяемых во вторую очередь реквизитов первой подгруппы (в приведенном примере $R_{B_1} = 2$, так как выделяются реквизиты q_3 и P_1), R_{B_2} — то же для второй подгруппы (в примере

R_{B_2} =2, так как выделяются q_3 и q_4), n_1 — число позиций первой подгруппы (в примере n_1 = 4) и n_2 — число позиций второй подгруппы (n_2 = 3). В целом для приведенного примера Q_0 = 49, Q_1 = 37 и Q_2 = 27.

Приведенные соображения хорошо иллюстрируют возможность минимизации объемов данных в результате преобразования структуры СЕИ, основанного на выделении реквизитов с одинаковыми значениями.

Рассмотрим СЕИ со следующим условным содержанием:

$$E = \begin{vmatrix} q_{11}, q_{21}, q_{31}, q_{41}, q_{51}, p_{11}, p_{21} \\ q_{11}, q_{21}, q_{31}, q_{42}, q_{52}, p_{12}, p_{22} \\ q_{11}, q_{21}, q_{32}, q_{41}, q_{53}, p_{13}, p_{23} \\ q_{11}, q_{21}, q_{32}, q_{42}, q_{54}, p_{14}, p_{24} \\ q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{41}, q_{55}, p_{15}, p_{25} \\ q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{42}, q_{56}, p_{16}, p_{26} \\ q_{11}, q_{22}, q_{34}, q_{41}, q_{57}, p_{17}, p_{27} \\ q_{11}, q_{22}, q_{34}, q_{42}, q_{58}, p_{18}, p_{28} \end{vmatrix}$$

После преобразования этой СЕИ по значениям признаков q_1, q_2, q_3 получаем следующую структуру значений (рис. 10.15):

$$E = q_{11}\left| \begin{matrix} q_{21}\begin{pmatrix} q_{31}\begin{pmatrix} q_{41}, q_{51}, p_{11}, p_{21} \\ q_{42}, q_{52}, p_{12}, p_{22} \end{pmatrix} \\ q_{32}\begin{pmatrix} q_{41}, q_{53}, p_{13}, p_{23} \\ q_{42}, q_{54}, p_{14}, p_{24} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ q_{22}\begin{pmatrix} q_{33}\begin{pmatrix} q_{41}, q_{55}, p_{15}, p_{25} \\ q_{42}, q_{56}, p_{16}, p_{26} \end{pmatrix} \\ q_{34}\begin{pmatrix} q_{41}, q_{57}, p_{17}, p_{27} \\ q_{42}, q_{58}, p_{18}, p_{28} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{matrix} \right|$$

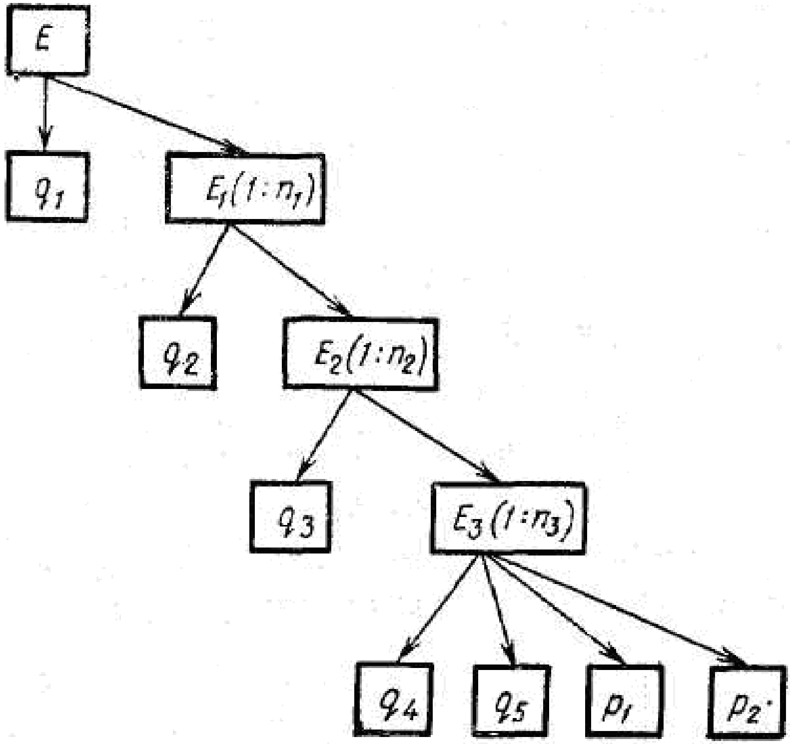


Рис. 10.15. Преобразованная структура значений СЕИ *E*

Для этой структуры объем данных в словах определяется по формуле

$$Q_3 = R_1 + n_1 (R_2 + n_2 (R_3 + n_3 R_4)),$$

где R_1 — количество реквизитов $(i + 1)$-го уровня, а n_i — длина массива составляющей СЕИ $(i+1)$-го уровня. Для рассматриваемой СЕИ E R=7, n=8 и, следовательно, Q_0=56. Для преобразованной СЕИ $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $R_4 = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, поэтому $Q_3 = 39$.

Структура такого типа называется ступенчатой и свойственна, например, большинству табуляграмм. Общая формула определения объема данных в словах для СЕИ с такой структурой следующая:

$$Q_3 = R_1 + n_1(R_2 + n_1 n_2 R_3 + n_1 n_2 n_3 R_4 + ... + n_1 n_2 ... n_{m-1} R_m.$$

С минимизацией объема данных, таким образом, связана задача: на основе структуры СЕИ и ее значений найти оптимальную структуру построения, приводящую к минимальному объему данных.

Заметим, что ступенчатая структура является в этом отношении одной из наиболее подходящих.

Ранее была показана возможность преобразования многоуровневой структуры в двухуровневую, здесь же рассмотрен обратный процесс — преобразование двухуровневой структуры (для массива — трехуровневой) в многоуровневую. Следовательно, процесс преобразования обратим, и это хорошо иллюстрирует возможность формализации построения оптимальных структур СЕИ.

Из рассмотренного непосредственно вытекает возможность объединения показателей в сообщения и, наоборот, разбивка сообщений на показатели. Пусть даны два показателя, призначные части которых толерантны. Другими словами, имеется следующая информационная совокупность:

$$И = \begin{pmatrix} q_1, q_2, q_3, q_4, P_1 \\ q_1, q_2, q_3, q_4, P_2 \end{pmatrix}$$

Здесь и далее q_i, q_{ij}, P_k обозначают различные значения реквизитов.

Но эта информационная совокупность может быть преобразована в следующую:

$$И = q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

Так как структура ступенчатого типа легко преобразуема в двухуровневую структуру, то из последней конструкции нетрудно получить следующую: $C =< q_1, q_2, q_3, q_4, P_1, P_2>$. Преобразование основано на объединении по толерантным реквизитам, в процессе которого родственные по структуре и значению реквизиты сливаются, устраняя дублирование информации.

Объединение показателей в сообщение возможно и при родственности не по всем признакам, например

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4, P_1\} \bigcup \{ q_2, q_3, q_4, P_2\} = \{ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, P_1, P_1\}.$$

Объединение здесь выполняется над множествами значений, а не над кортежами.

Минимальным требованием для объединения двух показателей следует считать родственность по форме и значению хотя бы одного из их признаков. Так, правомерно объединение

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, P_1\} \bigcup \{ q_2, q_3, q_4, P_2\} = \{ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, P_1, P_1\}.$$

Однако если в показателях есть совпадающие по имени признаки, которые отличаются по значению, то объединение таких показателей приведет к образованию не сообщения, а более сложного по структуре информационного образования с числом уровней более двух, поскольку указанные признаки не сольются, и для отнесения каждого из них к определенному показателю нужен будет третий уровень.Так, для показателей $<q_{11}, q_{21}, q_{33}, q_4, P_1>$ и $< q_{12}, q_{22}, q_{33}, q_5, P_2>$ в случае их объединения по признаку q_{33} имеем:

$$И = q_{33}\begin{pmatrix} q_{11}, q_{21}, q_4, P_1 \\ q_{12}, q_{22}, q_5, P_2 \end{pmatrix}$$

На множестве возможных значений некоторого реквизита СЕИ-массива можно определить бинарное отношение порядка или предшествования. Для числовых значений одного реквизита таким отношением могут служить арифметические отношения ≥ или ≤. Для нескольких имен реквизитов или текстовых значений вводится понятие лексикографического порядка. Пусть x_i, y_i — значения i-го реквизита или символа и существуют два составных значения $X = <x_1, x_2, ..., x_n>$ и $Y = <y_1, y_2, ..., y_n>$, где n — число имен реквизитов. Определим, что $X < Y$, если $x_1 = y_1 ..., x_j = y_j$ и $x_{j+1} < y_{j+1}$ для некоторого $j < n$. Если x и y являются символами, то $x < y$ означает, что x расположен в алфавите раньше y либо двоичный код x меньше двоичного кода y. Взаимный порядок реквизитов в X и Y менять нельзя, и реквизит x_i называется старшим по отношению к реквизиту x_k, если $i < k$.

Для отношения порядка должны выполняться следующие условия:

1. Для любых двух неодинаковых значений p_1 и p_2 справедливо одно из двух утверждений: «p_1 предшествует p_2» или «p_2 предшествует p_1», но не оба одновременно.
2. Из двух одновременных утверждений «p_1 предшествует p_2» и «p_2 предшествует p_1» следует, что значения p_1, и p_2 совпадают.
3. Из двух утверждений «p_1 предшествует p_2» и «p_2 предшествует p_3» следует утверждение «p_1 предшествует p_3».

Верно и обратное — наличие указанных трех условий определяет отношение нестрогого порядка.

Пусть для СЕИ p_i и p_{i+1} — значения признаков с одинаковыми наименованиями. Тогда в упорядоченном массиве всегда соблюдается условие — для всех i справедливо отношение $p_i \geq p_{i+1}$, или $p_i \leq p_{i+1}$. Первое отношение определяет массив, упорядоченный по убыванию, второе — массив, упорядоченный по возрастанию. Признаки, значения которых упорядочиваются в пределах некоторого участка массива, называются ключами сортировки, или ключевыми.

Алгоритмы обработки данных, рассчитанные на упорядоченные по возрастанию массивы, могут работать и с массивами, упорядоченными по убыванию.

Для оценки неупорядоченности некоторого множества значений ключевых признаков $P = \{p_1, p_2, ..., p_n)$ используется матрица инверсий

$Z = ||z_{ij}||$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ со значениями 0 и 1. При упорядочении по возрастанию

$$z_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } p_i \leqslant p_j \text{ при } i \leqslant j, \text{ или } p_i \geqslant p_j \text{ при } i \geqslant j; \\ 1 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

При упорядочении по убыванию принимается $z'_{ij} = |1 - z_{ij}|$ (этот случай далее не рассматривается).

Из свойств отношения порядка следуют аналогичные свойства матрицы инверсий

1) $z_{ij} = z_{ji}$ (симметричность);
2) $z_{ii} = 0$ (антирефликсивность);
3) для любых $i \leq j \leq k$ из равенства $z_{ij} = z_{jk}$ следует $z_{jk} = z_{ij}$ (транзитивность).

В качестве примера рассмотрим матрицу инверсий для девяти ключевых признаков $p_1 = 4$, $p_2 = 2$, $p_3 = 7$, $p_4 = 5$, $p_5 = 3$, $p_6 = 9$, $p_7 = 1$, $p_8 = 8$, $p_9 = 6$.

$$Z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Если все множество ключевых признаков удовлетворяет отношению порядка, то в матрице инверсий Z все элементы должны быть нулевыми. Важными частными случаями упорядоченности являются упорядоченность подмножества ключей, взаимная упорядоченность двух подмножеств ключей и внешняя упорядоченность пбдмножества ключей.

Множество ключевых признаков содержит упорядоченное подмножество $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j$ $(i \leq j \leq n)$, если справедлива серия неравенств $p_i \leq p_{i+1} \leq \ldots \leq p_j$. Например, среди ключевых признаков $p = \{3, 1, 5, 9, 6, 4\}$ существует упорядоченное подмножество $p = \{1, 5, 9\}$. В матрице инверсий при наличии упорядоченного подмножества ключей можно выделить квадратную нулевую подматрицу (рис. 10.16,*а*). Элементы нулевой подматрицы на рисунке заштрихованы, на матрице инверсий показана главная диагональ.

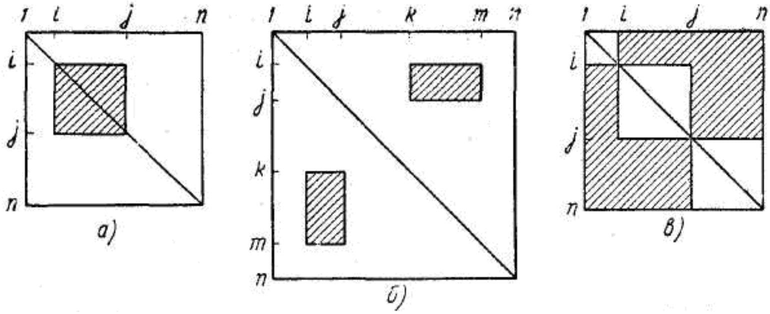


Рис. 10.16. Структура матрицы инверсий:
а – при наличии упорядоченного подмножества ключей; *б* — при взаимной упорядоченности двух подмножеств ключей; *в* — при внешней упорядоченности

Два непересекающихся подмножества ключей $p_i, p_{i+1}, ..., p_j$ и $p_k, p_{k+1}, ..., p_m$ $(i < j < k < m \leq n)$ называются взаимно упорядоченными, если каждый ключ первого подмножества меньше любого ключа из второго подмножества и оба подмножества не упорядочены. В множестве ключей $Q = \{9, 1, 3, 4, 2, 8, 5, 7, 6\}$, например, взаимно упорядоченными подмножествами являются $Q' = \{1, 3, 4, 2\}$ и $Q'' = \{8, 5, 7, 6\}$. Расположение нулевых подматриц в матрице инверсий при наличии взаимной упорядоченности подмножеств показано на рис. 10.16, *б.* Подмножество ключей $p_i, p_{i+1}, ..., p_j$ обладает свойством внешней упорядоченности, если любой из ключей подмножества не больше ключа p_t $(1 \leq t \leq i — 1)$ и не меньше ключа p_r $(j + 1 \leq r \leq n)$. Например, в множестве ключей $R = \{3, 1, 6, 4, 5, 9, 7, 8\}$ можно выделить внешне упорядоченное подмножество $R' = \{6, 4, 5\}$. Расположение нулевых подматриц в матрице инверсий для случая внешней упорядоченности показано на рис. 10.16, *в.* Алгоритм, который осуществляет перестановку СЕИ так, чтобы значения некоторого ключевого признака оказались упорядоченными, называется сортировкой. В процессе сортировки осуществляются сравнения пар значений признаков, минимально возможное число таких сравнений $C = M \log_2 M$, где M — число сортируемых СЕИ.

Во многих задачах обработки данных требование упорядоченности множества ключевых признаков может быть заменено более слабыми условиями упорядоченности подмножества, взаимной упорядоченности или внешней упорядоченности. Варианты алгоритмов сортировки, которые обеспечивают эти частные случаи упорядоченности, обычно выполняют значительно меньше, чем $C = M \log_2 M$ сравнений.

11. Нечеткие информационные отношения

11.1. Определение и операции над нечеткими отношениями

Нечеткие отношения играют фундаментальную роль в общей теории информации. Аппарат теории нечетких отношений используется при построении теории нечетких автоматов, при моделировании структуры сложных систем, при анализе процессов принятия решений, в задачах управления технологическими процессами и т.д.

Теория нечетких отношений находит также применение в информационных задачах, в которых традиционно применяется теория обычных (неразмытых, четких) отношений. Как правило, аппарат теории четких отношений используется при качественном анализе взаимосвязей между объектами исследуемой системы, когда взаимосвязи носят дихотомический характер и могут быть проинтерпретированы в строках «информационная связь присутствует», «информационная связь отсутствует», или когда методы количественного анализа информационных взаимосвязей по каким-то причинам не могут быть применены, и взаимосвязи искусственно приводятся к дихотомическому виду. Например, когда величина связи между объектами принимает значение из ранговой шкалы, выбор порога на силу связи разрешает привести связь к необходимому виду. Однако подобный подход, разрешая проводить качественный анализ систем, приводит к потере информации о силе связей между объектами, или требует проведения вычислений при разных порогах на силу связей. Этого недостатка, как нам кажется, лишены методы анализа данных, которые основаны на теории нечетких отношений, разрешающие проводить качественный анализ систем с учетом расхождения в силе связей между объектами системы.

Обычное неразмытое n-арное отношение R определяется как подмножество декартово произведения n множеств

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Подобно нечеткому множеству, нечеткое отношение можно задать с помощью его функции принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}} : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \rightarrow L,$$

где L — это отрезок [0, 1] действительной прямой. Однако в теории нечетких отношений часто оказывается удобным в качестве L брать какую-нибудь более общую структуру, чем отрезок [0, 1], а под нечетким отношением $\tilde{R}$ понимать саму функцию

$$\tilde{R} : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to L,$$

которая отображает декартово произведени множеств $X_1, \dots, X_n$ в L. В качестве L может быть взято, например, множество вещественных чисел, множество лингвистических переменных, множество m-мерных векторов, цепь, псевдобулева алгебра, полные дистрибутивные решетки и т.п. Такой подход к определению понятия нечеткое отношение дает возможность, во-первых, строить интересные обобщения понятия отношения, которые могут использоваться, например, в теории моделей. Во-вторых, он разрешает в результате интерпретации разных функций со значениями из L как нечеткое отношение, применять для анализа свойств этих функций хорошо развитый аппарат теории отношений. В-третьих, этот подход дает возможность увязать и рассматривать с единой точки зрения много понятий и методов, которые применяются при анализе эмпирических данных, как например, в кластерном анализе.

Мы ограничимся рассмотрением лишь бинарных нечетких отношений.

Нечетким отношением $\tilde{R}$ между множествами X и Y будет называться функция

$$\tilde{R} : X \times Y \to L, \tag{11.1}$$

где в общем случае будет предполагаться, что L — это полная дистрибутивная решетка. Таким образом, L — это частично упорядоченное множество, в котором любое непустое подмножество имеет наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю грани, и операции пересечения $\wedge$ и объединение $\vee$ в L удовлетворяют законам дистрибутивности.

Все операции над нечетким отношением определяются при помощи этих операций из L. Например, если в качестве L взять ограниченное множество вещественных чисел, то операциями взятия наибольшей нижней и наименьшей верхней грани в L будут, соответственно, операции inf и sup, операциями пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ будут операции min и max, и эти операции будут определять и операции над нечетким отношением. Введение в L дополнительных операций, например, операций суммирования и умножения, разрешает ввести и соответствующие дополнительные операции над нечетким отношением.

В том случае, когда L является отрезком действительной прямой [0, 1], функция (11.1) будет записываться также в виде функции принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}} : X \times Y \to [0, 1], \tag{11.2}$$

и во всех соотношениях, используемых ниже, наравне с записью $\tilde{R}$ *(x, y)* будет применяться запись $\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y)*.

Если множества X и Y конечны, нечеткое отношение $\tilde{R}$ между X и Y можно представить с помощью его *матрицы отношения,* строкам и столбцам которой ставяться в соответствие элементы множеств X и Y, а на пересечении строки x и столбца y содержится элемент $\tilde{R}$ *(x, y)* (см. табл. 11.1).

Таблица 11.1

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	1	0,4	0,8	0,7
x_2	1	1	1	0	0,9
x_3	0,4	1	0	0,5	0,3
x_4	0,8	0	0,5	0,6	0,6
x_5	0,7	0,9	0,3	0,6	0,2

В случае, когда множества X и Y совпадают, нечеткое отношение $R: X \times X \to L$ называется *нечетким отношением на множестве X.*

Пусть P — прямое произведение n множеств и M — его множество принадлежностей; нечеткое n-арное отношения определяется как нечеткое подмножество $\tilde{P}$, которое принимает свои значения в M.

Пример 1. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, x_3\},$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\},$$
$$M = [0, 1].$$

Таблица на рис. 11.1 изображает нечеткое 2-арное отношение (которое можно называть бинарным, если не возникает путаница с другими возможными интерпретациями слова «бинарный»).

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0,1	0,3	1
x_2	0	0,8	0	0	1
x_3	0,4	0,4	0,5	0	0,2

Рис. 11.1.

Пример 2. Пусть

$$X = Y = \mathrm{R},$$

где R = (— ∞, ∞), т.е. R — множество всех действительных чисел. Тогда отношение $y \ll x$, где $x \in$ R, $y \in$ R, есть нечеткое отношение в R^2. Например, субъективное выражение (зависящее от субъективного оценивания) отношение $y \ll x$ можно задать так:

$$\mu_{R^2}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \geq x, \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если } y < x \end{cases} .$$

Обозначение. Нечеткое отношение в $X \times Y$ запишется как

$$x \in X, y \in Y_2 : x \tilde{R} \; y.$$

Символы для обозначения экстремума. Дальше будем использовать символы:

$\bigvee\limits_x$ — для обозначения максимума относительно элемента или переменной x,

$\bigwedge\limits_x$ — для обозначения минимума относительно элемента или переменной x.

Так, запись

$$\mu_1(x) = \bigvee_y \mu(x,y)$$

эквивалентна

$$\mu_1(x) = \underset{y}{MAX}\, \mu(x,y)$$

Аналогично запись

$$\mu_2(x) = \bigwedge_y \mu(x,y)$$

эквивалентна

$$\mu_2(x)= \underset{y}{MIN}\,\mu(x,y).$$

Проекция нечеткого отношения. Первую проекцию $\tilde{R}$ определяет функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x)= \underset{y}{\vee}\ \mu_{\tilde{R}}\ (x,y).$$

Аналогично вторую проекцию $\tilde{R}$ определяет функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}^{(2)}(y)= \underset{x}{\vee}\ \mu_{\tilde{R}}\ (x,y).$$

Вторая проекция первой проекции (или наоборот) будет называться *глобальной проекцией* нечеткого отношения и обозначаться $h(\tilde{R})$. Таким образом,

$$h(\tilde{R}) = \underset{x}{\vee}\ \underset{y}{\vee}\ \mu_{\tilde{R}}\,(x,y)= \underset{y}{\vee}\ \underset{x}{\vee}\ \mu_{\tilde{R}}\,(x,y).$$

Если $h(\tilde{R})$=1, то говорят, что отношение *нормально.* Если $h(\tilde{R})$<1, то отношение *субнормально*.

Пример 1. (рис. 11.2).

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	1-а проекция
x_1	0,1	0,2	1	0,3	1
x_2	0,6	0,8	0	0,1	0,8
x_3	0	1	0,3	0,6	1
x_4	0,8	0,1	1	0	1
x_5	0,9	0,7	0	0,5	0,9
x_6	0,9	0	0,3	0,7	0,9
2-а проекция	0,9	1	1	0,7	1 (глобальная проекция)

Рис. 11.2.

Вычислим первую проекцию

$$\mu^{(1)}_{\tilde{R}}(x) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x,y).$$

$$\mu^{(1)}_{\tilde{R}}(x_1) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x_1,y) = \text{MAX}\,[0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3] = 1$$

$$\mu^{(1)}_{\tilde{R}}(x_2) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x_2,y) = \text{MAX}\,[0{,}6;\ 0{,}8;\ 0;\ 0{,}1] = 0{,}8,$$

…………………………………………………………………......

$$\mu^{(1)}_{\tilde{R}}(x_6) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x_6,y) = \text{MAX}\,[0{,}9;\ 0;\ 0{,}3;\ 0{,}7] = 0{,}9.$$

Аналогично можно вычислить и вторую проекцию. Результаты расчетов приведены на рис. 11.2. Мы видим, что отношение нормально.

Пример 2. Рассмотрим отношение $x\,\tilde{R}\,y$, где $x \in R^+$, $y \in R^+$ и

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = e^{-k(y-x)^2},\quad k>1$$

(рис. 11.3), которое можно интерпретировать такой нечеткой фразой: x и y — очень близкие друг к другу числа (для достаточно больших значений k).

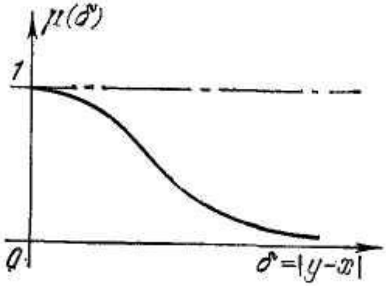


Рис. 11.3

В этом случае мы видим, что для фиксированного значения x_0

$$\mu^{(1)}_{\tilde{R}}(x_0) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x_0,y) = \bigvee_y e^{-k(y-x_0)^2} = e^{-k(y-x_0)^2} = 1 \text{ для } y = x_0.$$

Поскольку значение $\mu^{(2)}_{\tilde{R}}(y_0)$ также равно единице, то $h(\tilde{R}) = 1$.

Носитель нечеткого отношения. Носителем нечеткого отношения $\tilde{R}$ называется обычное множество упорядоченных пар *(x, y),* для которых функция принадлежности положительна:

$$S(\tilde{R}) = \{(x,y) \mid \mu_{\tilde{R}}\{x,y\}>0\}. \qquad (11.3)$$

Пример 1 (рис. 11.4).

$S(\tilde{R}) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}$.

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0	0,2	0
x_2	0,3	0	0	0,9
x_3	0,4	0,7	1	1

Рис. 11.4.

Пример 2 (рис. 11.5). Рассмотрим отношение $x\tilde{R}y$, где $x \in R^+$, $y \in R^+$ и

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} e^{-(y-x)^2}, & |y-x| \le 0{,}46, \\ 0, & |y-x| > 0{,}46 \end{cases}$$

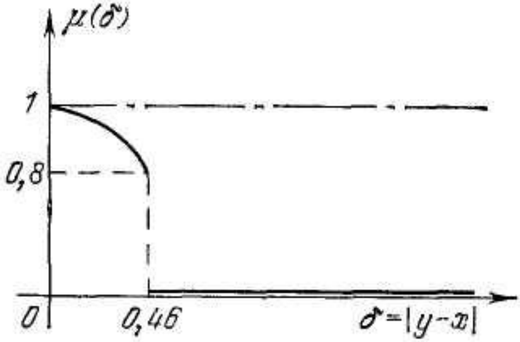


Рис. 11.5.

Тогда имеем

$$S(\tilde{R}) = \{(x, y) \mid 0 \le |y - x| \le 0{,}46\}$$

Нечеткое отношение, содержащее или содержащееся в данном нечетком отношении. Пусть $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ — два нечетких отношения, такие, что

$$\forall (x, y) \in X \times Y: \mu_{\tilde{R}}(x, y) \le \mu_{\tilde{L}}(x, y);$$

тогда говорят, что $\tilde{L}$ *содержит* $\tilde{R}$ или $\tilde{R}$ содержится в $\tilde{L}$.

Заметим, что

$$\tilde{R} \subset \tilde{L},$$

если $\tilde{L}$ содержит $\tilde{R}$.

Пример 1 (рис. 11.6). Легко проверить, что $\tilde{L}$ *содержит* $\tilde{R}$.

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0,2	0
x_2	0,5	0	1	0,9
x_3	0,4	0	0,1	0,8

(1)

$\tilde{L}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,4	0,2	0,1
x_2	0,5	0	1	1
x_3	0,5	0,1	0,2	0,9

(2)

Рис. 11.6.

Пример 2. Рассмотрим нечеткое отношение $x\,\tilde{R}_1\,y$, где $x \in \mathrm{R}^+$, $y \in \mathrm{R}^+$, такое, что *y»x,* т.е. «*y* много больше *x*», и пусть функция принадлежности этого отношения определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) = \begin{cases} 0, & y - x < 0, \\ 1 - e^{-k_1(y-x)^2}, & y - x \geq 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $k_2 > k_1$; тогда отношение $\tilde{R}_2$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}_2}(x,y) = \begin{cases} 0, & y - x < 0, \\ 1 - e^{-k_2(y-x)^2}, & y - x \geq 0. \end{cases}$$

содержит $\tilde{R}_1$ (рис. 11.7).

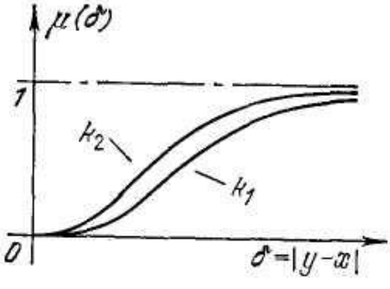


Рис. 11.7.

Объединение двух отношений. *Объединение* двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ обозначается $\tilde{R} \bigcup \tilde{L}$ или $\tilde{R} + \tilde{L}$ и определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}\cup\tilde{L}}\ (x, y) = \mu_{\tilde{R}}\ (x, y) \vee \mu_{\tilde{L}}\ (x, y) = \mathrm{MAX}\ [\mu_{\tilde{R}}\ (x, y), \mu_{\tilde{L}}\ (x, y)]$$

Если $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$,..., $\tilde{R}_n$ — отношения, то

$$\mu_{\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2\cup\ldots\cup\tilde{R}_n}\ (x, y) = \bigvee_{\tilde{R}_i} \mu_{\tilde{R}_i}\ (x, y).$$

Результат объединения обозначим

$$\tilde{R} \bigcup_i \tilde{R}_i \text{ или } \sum_i \tilde{R}_i.$$

Пример 1 (рис. 11.8).

$\underset{\sim}{R}$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	0	0,2
x_3	0,5	0	0,4	0

(1)

$\underset{\sim}{L}$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	1	1
x_3	0,6	0,9	0,3	0,2

(2)

$\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{L}$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	1	1
x_3	0,6	0,9	0,4	0,2

(3)

Рис. 11.8.

Пример 2. На рис. 11.9, *а* изображено нечеткое отношение $x \tilde{R}_1 y$, где $x\in$ R$^+$, $y\in$ R$^+$, содержательно означающее, что «числа x и y очень близкие».

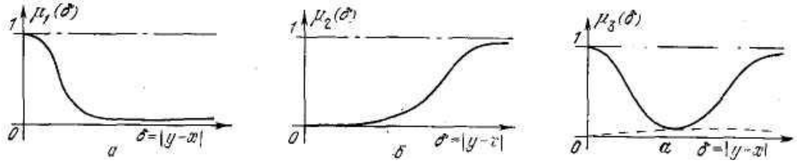


Рис. 11.9.

На рис. 11.9, *б* изображено нечеткое отношение $x \tilde{R}_2 y$, где $x\in$ R$^+$, $y\in$ R$^+$, содержательно означающее, что «числа x и y очень различные».

Отношение $x\,\tilde{R}_3\,y$, содержательно означающее, что «числа x и y очень близкие или/и очень различные», определяется кривой $\mu_3\,(x,\,y)$:

$$\mu_{\tilde{R}_3}(x,y)=\begin{cases}0, & |\,y-x\,|<0,\\ \mu_{\tilde{R}_1}(x,y), & 0\le|\,y-x\,|\le\alpha,\\ \mu_{\tilde{R}_2}(x,y), & \alpha\le|\,y-x\,|,\end{cases}$$

где α — такое значение $|y - x|$, при котором

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)=\mu_{\tilde{R}_2}(x,y).$$

В информационной логике, которая основана на теории обычных множеств, такое выражение как «x и y очень близкие или(и) очень различные» должено быть сокращено до «x и y очень близкие или очень различные» с разделительным «или». Однако в теории нечетких подмножеств первое предложение вполне логично; она выражает тот факт, что связка «и» интерпретуема при очень малых значениях функций принадлежности, когда об x и y нельзя сказать ни что они очень близки, ни что они очень отличаются друг от друга.

Этот пример хорошо иллюстрирует гибкость высказываний, которые присущий этой теории.

Пересечение двух отношений. Пересечение двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ обозначается $\tilde{R}\cap\tilde{L}$ и определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}\cap\tilde{L}}\,(x,\,y)=\mu_{\tilde{R}}\,(x,\,y)\wedge\mu_{\tilde{L}}\,(x,\,y)=\text{MIN}\,[\,\mu_{\tilde{R}}\,(x,\,y),\,\mu_{\tilde{L}}\,(x,\,y)]$$

Если $\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\;,...,\;\tilde{R}_n$ — отношения, то

$$\mu_{\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2\cap...\cap\tilde{R}_n}\,(x,\,y)=\bigwedge_{\tilde{R}_i}\,\mu_{\tilde{R}_i}\,(x,\,y).$$

$$\tilde{R}\bigcup_i\tilde{R}_i\ \text{или}\ \sum_i\ \tilde{R}_i.$$

Результат обозначим

$$\tilde{R}\bigcap_i\tilde{R}_i.$$

Пример 1 (рис. 11.10). Рассмотрим снова данные, представленные на рис. 11.8.

$\tilde{R} \cap \tilde{Q}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	0	0,2
x_3	0,5	0	0,3	0

Рис. 11.10.

Пример 2. На рис. 11.11, *а* изображено нечеткое отношение $x\tilde{R}_2 y$, где $x \in R^+$, $y \in R^+$, означающее, что «модуль разностей $|y - x|$ очень близкок к α». На рис. 11.11, *б* представлено аналогичное отношение «$|y - x|$ очень близко к β» (β> α).

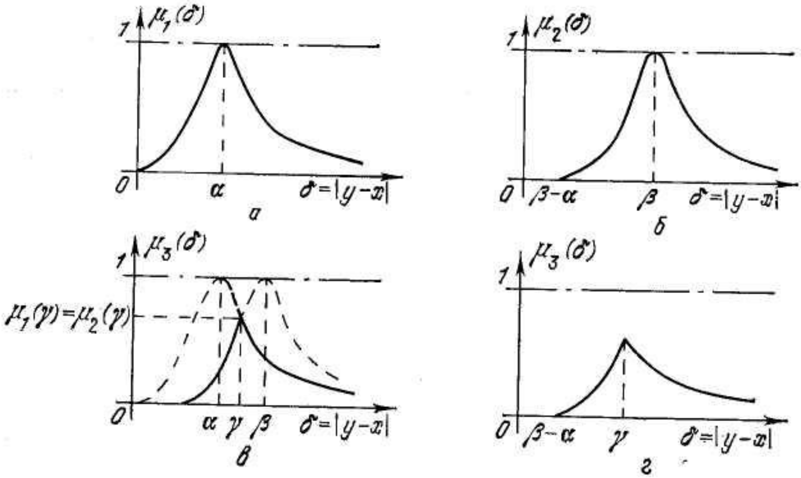


Рис. 11.11.

На рис. 11.11, *в* показано, как получить

$$\tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$$

Имеем

$$\mu_{\tilde{R}_3}(x,y) = \begin{cases} 0, & |y-x| < \beta - \alpha, \\ \mu_{\tilde{R}_1}(x,y), & \beta - \alpha \le |y-x| \le \gamma, \\ \mu_{\tilde{R}_2}(x,y), & \gamma \le |y-x|, \end{cases}$$

где γ- такое значение $|y — x|$, что

$$\mu_{\tilde{R}1}(x, y) = \mu_{\tilde{R}2}(x, y).$$

Пересечение отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ представлено на рис. 11.11, *г*.

Отношение включения $\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2$ для нечеткого отношения определяется по помощи отношения частичного порядка в L:

$$\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2 \Leftrightarrow \tilde{R}_1 (x,y) \leq \tilde{R}_2 (x,y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y.$$

Множество $P(X\times Y)$ всех нечетких отношений между X и Y образовывает дистрибутивную решетку по отношению к операциям объединения и пересечение и удовлетворяет следующим тождествам:

$\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_1 = \tilde{R}_1$, $\quad \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_1 = \tilde{R}_1$ (идемпотентность),

$\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_1$, $\quad \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_1$ (коммутативность),

$\tilde{R}_1 \cap (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \cup \tilde{R}_3$ (ассоциативность)

$\tilde{R}_1 \cup (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \cup \tilde{R}_3$ (ассоциативность)

$\tilde{R}_1 \cap (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_1) = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 \cup (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_1) = \tilde{R}_1$ (поглощение)

$\tilde{R}_1 \cap (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_3)$ (дистрибутивность)

$\tilde{R}_1 \cup (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \cap (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_3)$ (дистрибутивность)

Выполнение этих тождеств для $P(X\times Y)$ следует из выполнения соответствующих тождеств для решетки L. В $P(X\times Y)$ выполняется также следующее соотношение

с $\tilde{R}_2 \subseteq \tilde{R}_3$ следует $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_3$, $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_3$.

Из полноты решетки L следует, что она обладает наименьшим **0** и наибольшим **I** элементами, такими, что $\mathbf{0} \leq a$, $a \leq \mathbf{I}$ $\quad a \in L$. Эти элементы определяют, соответственно, *наименьший* $\varnothing$ и *наибольший* U элементы решетки всех нечетких отношений $P(X\times Y)$:

$$\varnothing(x,y) = \mathbf{0} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \tag{11.3}$$

$$U(x,y) = \mathbf{I} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \tag{11.4}$$

Отношения (11.3) и (11.4) называют соответственно *пустым* и *универсальным* отношениями. Эти отношения удовлетворяют в $P(X\times Y)$ следующим тождествам:

$$\tilde{R}_1 \cap \varnothing = \tilde{R}_1, \quad \tilde{R}_1 \cup \varnothing = \tilde{R}_1,$$

$$\tilde{R}_1 \bigcup U = \tilde{R}_1 , \qquad \tilde{R}_1 \bigcup U = U.$$

Заметим, что если L является интервалом вещественных чисел $[a, b]$, то наименьший **0** и наибольший **I** элементы будут равны, соответственно, a и b. В частном случае, когда $L = [0, 1]$, получим, соответственно, нуль и единицу интервала [0, 1].

Алгебраическое произведение двух отношений.

Алгебраическое произведение $\tilde{R} \cdot \tilde{L}$ двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R} \cdot \tilde{L}} (x, y) = \mu_{\tilde{R}} (x, y) \cdot \mu_{\tilde{L}} (x, y).$$

Знак $\cdot$ в правой части этого выражения обозначает числовое произведение (обычное умножение).

Пример 1 (рис. 11.12). Рассмотрим еще раз данные на рис. 11.8.

$\tilde{R}\cdot\tilde{L}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,09	0	0,7	0
x_2	0,08	0,8	0	0,2
x_3	0,3	0	0,12	0

Рис. 11.12.

Пример 2. Вернемся к примеру, который рассматривался на рис. 11.11, *а,б.* Пусть

$$\tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2$$

тогда имеем

$$\mu_{\tilde{R}_3}(x,y) = \begin{cases} 0, & |y-x| < \beta - \alpha, \\ \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(x,y), & \beta - \alpha \le |y-x|. \end{cases}$$

См. рис. 11.13, *а-в*.

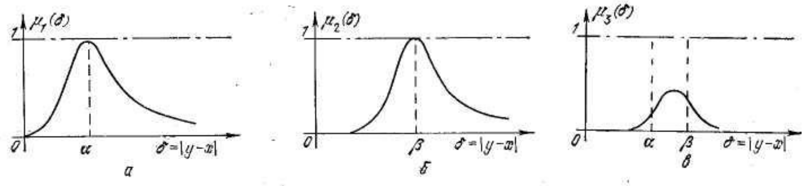


Рис. 11.13.

Дистрибутивность. Выпишем свойства дистрибутивности для операций $\bigcup$ и $\bullet$

$$\tilde{R}_1 \cap (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_3)$$
$$\tilde{R}_1 \cup (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \cap (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_3)$$
$$\tilde{R}_1 \bullet (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_3)$$
$$\tilde{R}_1 \bullet (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2) \cap (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_3)$$

Алгебраическая сумма двух отношений. Алгебраическая сумма двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ обозначается $\tilde{R} \hat{+} \tilde{L}$ и определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}\hat{+}\tilde{L}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(x, y) + \mu_{\tilde{L}}(x, y) - \mu_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \mu_{\tilde{L}}(x, y).$$

Знак • обозначает обычное умножение, знак + обычное сложение.

Пример (рис. 11.14). Возвратимся снова к примеру на рис. 11.8.

$\tilde{R} \hat{+} \tilde{L}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,51	0,20	1	0
x_2	0,82	1	1	1
x_3	0,80	0,90	0,58	0,20

Рис. 11.14.

Отметим два свойства дистрибутивности для операции $\hat{+}$:

$$\tilde{R}_1 \hat{+} (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \hat{+} \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 \hat{+} \tilde{R}_3)$$
$$\tilde{R}_1 \hat{+} (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \hat{+} \tilde{R}_2) \cap (\tilde{R}_1 \hat{+} \tilde{R}_3)$$

Дополнение отношения. Дополнение отношения $\tilde{R}$ (обозначается $\overline{\tilde{R}}$), есть такое отношение, которое

$$\forall (x,y) \in X \times Y:\ \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y).$$

Пример 1 (рис. 11.15).

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0,2	0
x_2	0,5	0	1	0,9
x_3	0,4	0	0,1	0,8

1

$\overline{\tilde{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,7	0,6	0,8	1
x_2	0,5	1	0	0,1
x_3	0,6	1	0,9	0,2

2

Рис. 11.15.

Пример 2. На рис. 11.16, *а* представленна функция принадлежности $\mu_{\tilde{R}_1}(x, y)$ отношения $x\ \tilde{R}_1\ y$ означающего *«x* и *y* очень близки друг к другу», $x \in R^+$, $y \in R^+$,

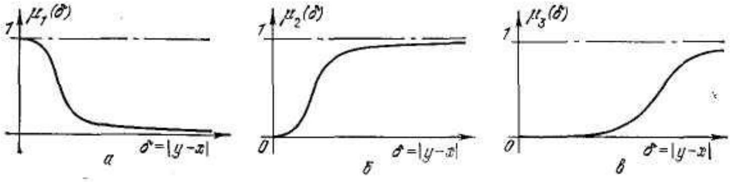


Рис. 11.16.

На рис. 11.16,*б* представлена функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}_2}(x, y)=1-\mu_{\tilde{R}_1}(x, y),$$

которая может быть связана с отношением *«x* и *y* очень близки». Тогда функция принадлежности $\mu_{\tilde{R}_3}(x, y)$ на рис. 11.16, *в* может представлять отношение *«x* и *y* очень отличаются друг от друга» Заметим, что два высказывания *«x* и *y* не очень близки» и «*x* и *y* очень разные» в общем случае не идентичны, за исключением случая, когда выбираются такие функции принадлежности, которые представляют оба высказывания довольно грубо.

Дизъюнктивная сумма двух отношений. Дизъюнктивная сумма обозначается $\tilde{R} \oplus \tilde{L}$ и определяется выражением

$$\tilde{R} \oplus \tilde{L} = (\tilde{R} \cap \overline{\tilde{L}}) \cup (\overline{\tilde{R}} \cap \tilde{L})$$

Пример 1 (рис. 11.17).

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0,3	0
x_2	0,7	1	0,8

$\tilde{L}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,6	1
x_2	0,8	0	0,2

$\overline{\tilde{R}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0,7	1
x_2	0,9	0	0,2

$\overline{\tilde{L}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,8	0,4	0
x_2	0,2	1	0,8

$\tilde{R} \cap \overline{\tilde{L}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,8	0,3	0
x_2	0,1	1	0,8

$\overline{\tilde{R}} \cap \tilde{L}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0,6	1
x_2	0,8	0	0,2

$\tilde{R} \oplus \tilde{L}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,8	0,6	1
x_2	0,8	1	0,8

Рис. 11.17.

Пример 2. Рассмотрим пример, приведенный на рис. 11.11, *а* и *б;* пусть $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ — отношение с функциями принадлежности, изображенными на рис. 11.11, *а* и *б* соответственно. На рис. 11.18**,** *а-k* можно видеть, как получить функцию принадлежности отношения $\tilde{R} \oplus \tilde{L}$.

Сравнивая рис. 11.11, *г* и 1.18, *и*, мы видим, что *дизъюнктивное* ИЛИ (рис. 11.18, *и)* дает результат, который значительно отличается от результата И, равно как и от результата ИЛИ/И (рис. 11.18, *к).*

Аналогично определяется оператор дополнения дизъюнктивной суммы

$$\overline{\tilde{R}} \oplus \tilde{L} = \overline{\tilde{R} \oplus \tilde{L}} = (\tilde{R} \cup \overline{\tilde{L}}) \overline{\bigcap} (\overline{\tilde{R}} \cup \tilde{L})$$

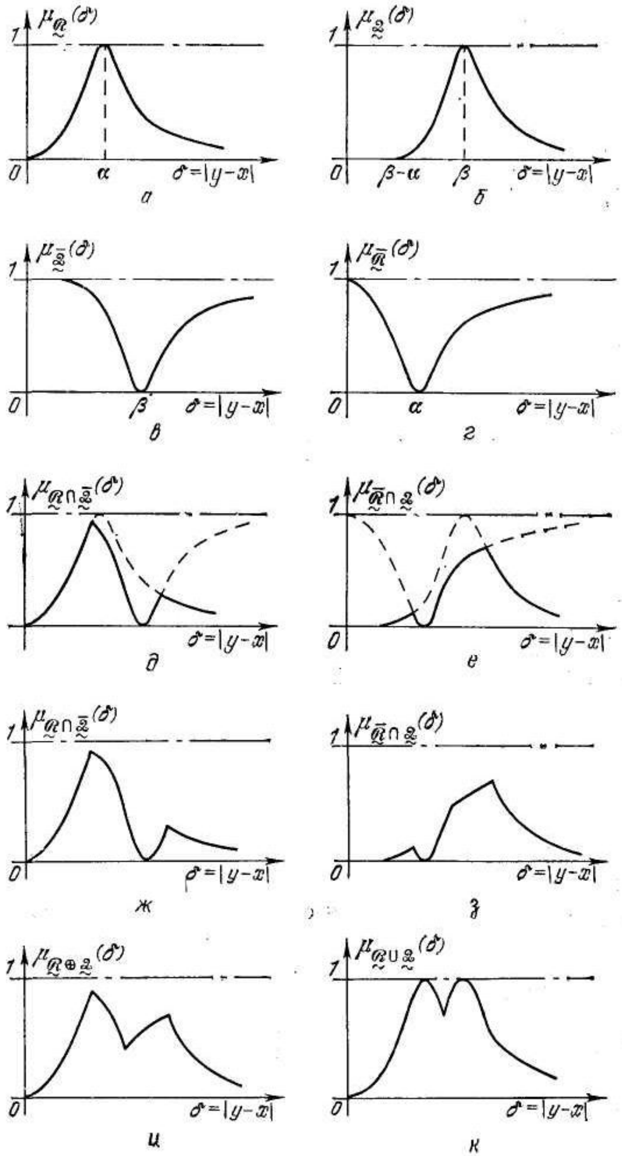


Рис. 11.18.

Рассмотрим предыдущий пример на рис. 11.19 и 11.20. Рис. 11.20 получено с учетом рис. 11.18, *к*.

$\tilde{R} \oplus \tilde{Q}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,4	0
x_2	0,2	0	0,2

Рис. 11 19.

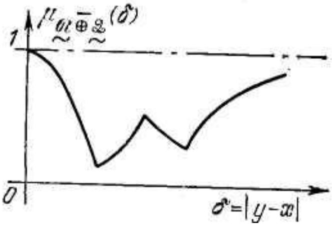


Рис. 11 20.

Обычное отношение, ближайшее к нечеткому. Пусть $\tilde{R}$ — нечеткое отношение; обычное отношение, ближайшее к $\tilde{R}$, определяется выражением

$$\mu_{\overline{\tilde{R}}}(x, y) = \begin{cases} 0, \quad если \qquad \mu_{\tilde{R}}(x, y) < 0,5, \\ 1, \quad если \qquad \mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0,5, \\ 0 \; або \, 1, \quad если \; \mu_{\tilde{R}}(x, y) = 0,5 \end{cases}$$

Это определение пригодно для любых универсальных множеств X и Y, которые образовывают $X \times Y$, где $x \in X$, $y \in Y$ и независимо от того, конечны или нет универсальные множества.

По договоренности принимают

$$\mu_{\tilde{R}}\,(x, y) = 0,5 \Longrightarrow \mu_{\overline{\tilde{R}}}\,(x,y) = 0.$$

Пример. На рис. 11.21 и 11.22 видно, как перейти от $\tilde{R}$ к $\overline{\tilde{R}}$.

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0,7	0,3	0,2	1	0	0,8
x_2	0,5	0,4	0	0,6	0,9	0,1
x_3	0,6	1	0,8	0	0	0,7

Рис. 11 21.

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	1	0	0	1	0	1
x_2	0	0	0	1	1	0
x_3	1	1	1	0	0	1

Рис. 11 22.

Наличие элемента, равного 1/2 и соответствующего (x_2, y_1), показывает, что $\overline{\tilde{R}}$ не единствнно. Существуют два отношения, которые являются ближайшими к $\tilde{R}$, для одного из которых

$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}$ (x_2, y_1)=1, а для другого $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}$ (x_2, y_1)= 0. По принятой договоренности будем полагать $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}$ (x_2, y_1)= 0.

11.2. Композиция двух нечетких отношений

Следующее соотношение определяет *композицию* $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ нечеткого отношение $\tilde{R}_1$ между *X* и *Y* и нечеткого отношения $\tilde{R}_2$ между *Y* и *Z:*

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2\,(x,\,\mathrm{z}) = \bigvee_{y\in Y} (\tilde{R}_1\,(x,y) \wedge \tilde{R}_2\,(y,\,z)) \quad \forall\; x\in X \;\; \forall\, \mathrm{z}\in \mathrm{Z}. \qquad (11.4\text{-}1)$$

Здесь $\bigvee_{y\in Y}$ означает наименьшую верхнюю грань множества элементов $(\tilde{R}_1\,(x,y) \wedge \tilde{R}_2\,(y,\,z))$, где *y* пробегают все значения из *Y*. В силу полноты *L* эта операция всегда определена. Как нетрудно увидеть с (11.4-1), отношение $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ будет отношением между *X* и *Z.*

Кроме операции композиции (11.4-1), которая определяется с помощью основных операций решетки *L,* существуют и другие варианты операции композиции, которые определяются с помощью дополнительных операций, которые вводятся в *L*. В зависимости от того, есть ли *L* множеством векторов, множеством лингвистических переменных или множеством чисел, эти дополнительные операции будут иметь и соответствующий вид.

Например, если *L* является множеством вещественных чисел, то операция $\wedge$ в (11.4-1) может быть заменена на операцию взятия среднего арифметического, что даст другое определение операции композиции:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2\,(x,\,\mathrm{z}) = \bigvee_{y\in Y} (0{,}5(\tilde{R}_1\,(x,y) + \tilde{R}_2\,(y,\,z)) \quad \forall\; x\in X \;\; \forall\, \mathrm{z}\in \mathrm{Z}.$$

В случае *L* = [0, 1] соотношение (11.4-1) записывается в виде

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}\,(x,\,\mathrm{z}) = \bigvee_{y\in Y} (\mu_{\tilde{R}_1}\,(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}\,(y,\,z)) \;\forall\; x\in X \;\forall\, \mathrm{z}\in \mathrm{Z}. \;(11.5)$$

Замена в (11.5) операции $\wedge$ на операцию умножения • дает следующее определение операции композиции:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}\,(x,\,\mathrm{z}) = \bigvee_{y\in Y} (\mu_{\tilde{R}_1}\,(x,y) \bullet \mu_{\tilde{R}_2}\,(y,\,z)) \quad \forall\; x\in X \;\; \forall\, \mathrm{z}\in \mathrm{Z}.$$

Мы здесь ограничимся рассмотрением свойств основной операции композиции (11.4-1). Свойства других операций композиции рассмотрим ниже. В дальнейшем будет предполагаться также, что $X=Y$ и $\tilde{R}_1$ является нечетким отношением на множестве X.

Нечеткое отношение $\tilde{E}$ такое, что

$$\tilde{E}(x,y)=\begin{cases} I, & \textit{если } x=y, \\ 0 & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

играет относительно операции композиции (11.4-1) роль единицы: $\tilde{E}\circ\tilde{R}_1=\tilde{R}_1\circ\tilde{E}=\tilde{R}_1$. В теории обычных отношений отношения $\tilde{E}$ называется отношением равенства. Для любого нечеткого отношения $\tilde{R}_1$ определяется также *обратное* ему отношение $\tilde{R}_1^{-1}$:

$$\tilde{R}_1^{-1}(x,y)=\tilde{R}_1(y,x) \quad \forall\, x,y\in X.$$

(Max — min)-композиция. Пусть $\tilde{R}_1\subset X\times Y$ и $\tilde{R}_2=Y\times Z$; (max—min)-*композиция* отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ обозначается $\tilde{R}_2\circ\tilde{R}_1$ и определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}_2\circ\tilde{R}_1}(x,\mathrm{z})=\bigvee_{y\in Y}\left(\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)\wedge\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right)=$$

$$=\underset{y}{MAX}\left[\mathrm{MIN}\left(\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(y,\mathrm{z})\right)\right], \tag{11.6}$$

где $x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$.

Пример 1. Рассмотрим два нечетких отношения $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$, где $x, y, z\in \mathrm{R}^+$. Предположим, что

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)=\mathrm{e}^{-k(x-y)^2},\ k>1, \tag{11.7}$$

$$\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)=\mathrm{e}^{-k(y-z)^2},\ k>1. \tag{11.8}$$

Определим $\mu_{\tilde{R}_2\circ\tilde{R}_1}(x,\mathrm{z})$.

Рассмотрим два значения $x=a$ и $z=b$ переменных x и z. Функции принадлежности (11.7) и (11.8) непрерывны на интервале $[0,\infty]$. В ссответствии с (11.6) можно записать

$$\mu_{\tilde{R}_2\circ\tilde{R}_1}(a,b)=\bigvee_{y\in Y}\left[\mu_{\tilde{R}_1}(a,y)\wedge\mu_{\tilde{R}_2}(y,b)\right]=$$

$$=\bigvee_{y\in Y}\left[\mathrm{e}^{-k(a-y)^2}\wedge\mathrm{e}^{-k(y-b)^2}\right]$$

Композиция $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ с помощью (max—min)-оператора представленна на рис. 11.23.

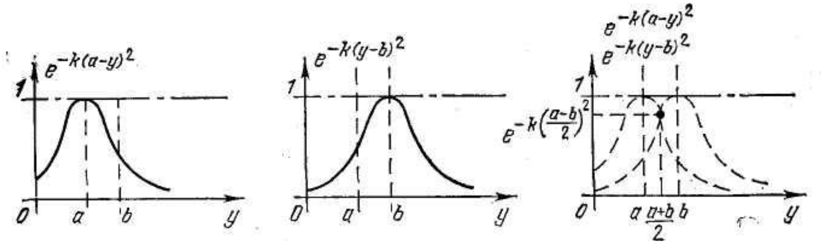


Рис. 11.23.

Легко увидеть, что

$$\mu_{\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1}(a,\, b) = \mathrm{e}^{-k\left(a\frac{a+b}{2}\right)^2} = \mathrm{e}^{-k\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

И для произвольных значений x и z имеем

$$\mu_{\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1}(x,\, b) = \mathrm{e}^{-k\frac{(x-z)^2}{4}}$$

Для простоты мы рассмотрели две идентичные функции $\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)$ и $\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)$. Но ход рассуждений не меняется и при двух разных функциях: накладываем графики $\mu_{\tilde{R}_1}(a,y)$ и $\mu_{\tilde{R}_2}(y,\, b)$ друг на друга и определяем кривую

$$\mu_{\tilde{R}_1}(a,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,\, b)$$

как функцию от y; потом находим точку на этой кривой, которая отвечает максимальному значению y.

Проблема усложняется, если абсцисса максимума не единственная. Это заставляет нас провести более сложные исследования.

Рассмотрим другой пример для функции принадлежности, которая определена на конечном универсальном множестве.

Пример 2 (рис. 11.24).

$\underset{\sim}{R}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

а

$\underset{\sim}{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0
y_5	0	1	0	0,8

б

$\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,4	0,7	0,3	0,7
x_2	0,3	1	0,5	0,8
x_3	0,8	0,3	0,7	1

в

Рис. 11.24.

Пусть $(x, z) = (x_1, z_1)$,

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_1)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_1,z_1)$) = MIN (0,1; 0,9) = 0,1;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_2)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_2,z_1)$) = MIN (0,2; 0,2) = 0,2;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_3)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_3,z_1)$) = MIN (0; 0,8) = 0;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_4)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_4,z_1)$) = MIN (1; 0,4) = 0,4;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_5)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_5,z_1)$) = MIN (0,7; 0) = 0.

$\underset{y_i}{MAX}$ [MIN($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_i)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_i,z_1)$)]=MAX (0,1; 0,2; 0; 0,4; 0) = 0,4.

Пусть теперь $(x, z) = (x_1, z_2)$, тогда

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_1)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_1,z_2)$) = MIN (0,1; 0) = 0;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_2)$, $\mu_{\tilde{R}_2}(y_2,z_2)$) = MIN (0,2; 1) = 0,2; ...

и т.д. Результат представлен на рис. 11.24.

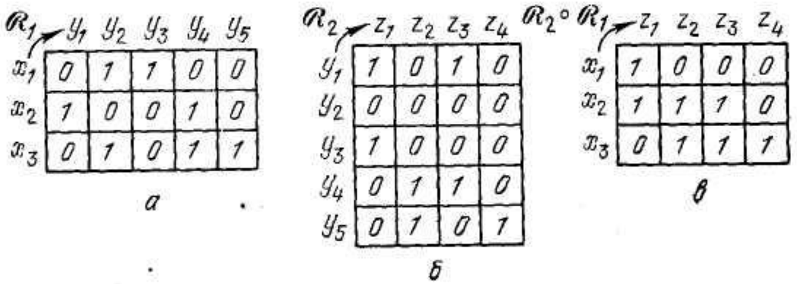


Рис. 11.24.

Сравним композицию нечетких отношений с композицией обычных отношений.

Для композиции обычных отношений R_1 и R_2 имеем

$$\mu_{\tilde{R}_2\circ\tilde{R}_1}(x,z)=\underset{y}{MAX}\,[\mathrm{MIN}(\mu_{R_1}(x,y),\ \mu_{R_2}(y,z))],\quad (11.9)$$

где $\mu_{R_1}(x,y)\in\{0,1\}$, $\mu_{R_2}(y,z)\in\{0,1\}$.

Тогда выражение (11.9) можно записать в виде

$$\mu_{\tilde{R}_2\circ\tilde{R}_1}(x,z)=\overset{\cdot}{\sum_{y}}\,(\mu_{R_1}(x,y)\cdot\mu_{R_2}(y,z))],\qquad (11.10)$$

где $\cdot$ обозначает булево умножение и $\overset{\cdot}{\sum_{y}}$ — булеву сумму полученных произведений.

На рис. 11.25 приведен пример, рассчитанный по формуле (11.9) или, что то же самое, — по (11.10).

Пример 3. На рис. 11.26 рассматривается пример композиции трех отношений.

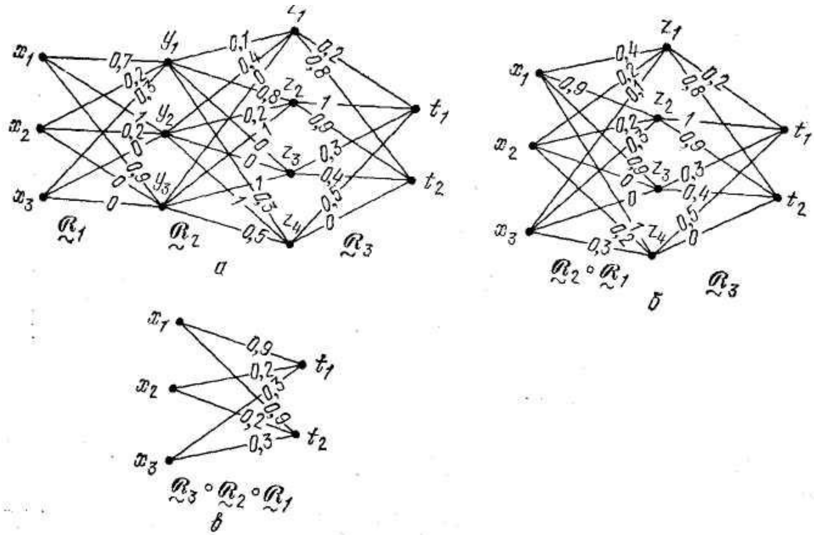


Рис. 11.26.

Операция (max—min)-композиции ассоциативна

$$(\tilde{R}_3 \circ \tilde{R}_2) \circ \tilde{R}_1 = \tilde{R}_3 \circ (\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1).$$

С другой стороны, если отношение $\tilde{R}$ определено на $X \times X$, т.е. $\tilde{R} \subset X \times X$, то можно записать

$$\tilde{R} \circ \tilde{R} = \tilde{R}^2$$

отсюда

$$\tilde{R} \circ \tilde{R}^2 = \tilde{R}^2 \circ \tilde{R} = \tilde{R}^3$$

и в общем случае

$$\underbrace{\tilde{R} \circ \tilde{R} \circ \ldots \circ \tilde{R} = \tilde{R}^k}_{k\ раз}.$$

Заметим, что (max—min)-композиция дистрибутивна относительно объединения, но недистрибутивна относительно пересечения:

$$\tilde{R} \circ (\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2) = (\tilde{R} \circ \tilde{L}_1) \cup (\tilde{R} \circ \tilde{L}_2) \qquad (11.11)$$

$$\tilde{R} \circ (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2) \neq (\tilde{R} \circ \tilde{L}_1) \cap (\tilde{R} \circ \tilde{L}_2) \qquad (11.12)$$

Приведем доказательства выражений (11.11) и (11.12).

Раньше мы не всегда выполняли доказательства некоторых операций на предмет «максимальный из ...» или «минимальный из ...». Это было связано с тем, что такие доказательства можно получить как непосредственные следствия из свойств верхней или/и нижней границы решетки.

Пусть Δ– операция взятия нижней границы, а ∇– верхней границы двух элементов (X_i,X_j) решетки. В решетке выполняется четыре двойственных свойств этих операций:

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta X_j &= X_j \Delta X_i \\ X_i \nabla X_j &= X_j \nabla X_i \end{aligned}\right\} \text{коммутативность} \tag{11.13}$$

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta(X_j \Delta X_k) &= (X_i \Delta X_j) \Delta X_k \\ X_i \nabla(X_j \nabla X_k) &= (X_i \nabla X_j) \nabla X_k \end{aligned}\right\} \text{ассоциативность} \tag{11.14}$$

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta X_i &= X_i \\ X_i \nabla X_i &= X_i \end{aligned}\right\} \text{идемпотентность} \tag{11.15}$$

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta(X_i \nabla X_j) &= X_i \\ X_i \nabla(X_i \Delta X_j) &= X_i \end{aligned}\right\} \text{поглощение} \tag{11.16}$$

Кроме того, если решетка дистрибутивна, то справедливо и свойство

$$\left.\begin{aligned} X_i \nabla(X_j \Delta X_k) &= (X_i \nabla X_j) \Delta(X_i \nabla X_k) \\ X_i \Delta(X_j \nabla X_k) &= (X_i \Delta X_j) \nabla(X_i \Delta X_k) \end{aligned}\right\} \text{дистрибутивность} \tag{11.17}$$

Если решетка с дополнениями, то справедливо и свойство

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta \overline{X}_i &= 0 \\ X_i \nabla \overline{X}_i &= U \end{aligned}\right\} \text{дополнения} \tag{11.18}$$

Рассмотрим несколько примеров систематического доказательства разных формул.

Случай L = [0, 1] охватывает все нечеткие подмножества в смысле Заде.

Целиком упорядоченное множество [0, 1] представляет собой дистрибутивную решетку, но без дополнений. Следовательно, все свойства (11.13-11.17) удовлетворяются и Δможно обозначить через $\wedge$, а ∇ — через $\vee$; нижнюю границу можно называть минимумом, а верхнюю границу — максимумом.

Пусть мы хотим доказать равенство

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (*)$$

Для этого необходимо проверить, что для $\forall\ x_i, x_j, x_k \in X$

$\mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge [\mu_{\tilde{B}}(x_i)] \vee \mu_{\tilde{C}}(x_i)]=[\mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_i)] \vee [\mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge \mu_{\tilde{C}}(x_i)]$.

А так как L — дистрибутивная решетка, то это равенство справедливо.

Рассмотрим более сложный случай и докажем свойство дистрибутивности (11.11):

$$\tilde{R} \circ (\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2) = (\tilde{R} \circ \tilde{L}_1) \cup (\tilde{R} \circ \tilde{L}_2)$$

Это равенство справедливо, если для

$$\forall x_i \in X, \ \forall y_j \in Y, \ \forall z_k \in Z$$

и отношений

$$x_i \tilde{R} \ y_j, y_j \tilde{L}_1 \ z_k \cdot y_j \tilde{L}_2 \ z_k .$$

выполняется

$$\mu_{\tilde{R}\circ(\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2)}(x_i, z_k) = \mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}(x_i, z_k) \vee \mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}(y_i, z_k) \quad (11.19)$$

Распишем члены уравнения (11.19):

$$\mu_{\tilde{R}\circ(\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2)}(x_i, z_k) = [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_1) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_1, z_k) \vee \mu_{\tilde{L}_2}(y_1, z_k))] \vee$$

$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_2) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_2, z_k) \vee \mu_{\tilde{L}_2}(y_2, z_k))] \vee \ldots$$

$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_n) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_n, z_k) \vee \mu_{\tilde{L}_2}(y_n, z_k))], \quad (11.20)$$

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}(x_i, z_k) = [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_1) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_1, z_k)] \vee$$

$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_2) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_2, z_k)] \vee \ldots$$

$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_n) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_n, z_k)], \quad (11.21)$$

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}(x_i, z_k) = [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_1) \wedge \mu_{\tilde{L}_2}(y_1, z_k)] \vee$$

$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_2) \wedge \mu_{\tilde{L}_2}(y_2, z_k)] \vee \ldots$$

$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_n) \wedge \mu_{\tilde{L}_2}(y_n, z_k)], \quad (11.22)$$

Для упрощения записи положим

$$a_\alpha = \mu_{\tilde{R}}(x_i, y_\alpha), b_\beta = \mu_{\tilde{L}_1}(y_\beta, z_k), c_\gamma = \mu_{\tilde{L}_2}(y_\gamma, z_k) \quad (11.23)$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \ \ , n.$$

Тогда отношение (11.20)—(11.22) можно записать в виде

$$\mu_{\tilde{R}\circ(\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2)}(x_i, z_k) = [a_1 \wedge (b_1 \vee c_1)] \vee [a_2 \wedge (b_2 \vee c_2)] \vee \ldots$$

$$\vee [a_n \wedge (b_n \vee c_n)], \quad (11.24)$$

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}(x_i, z_k) = (a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n), \quad (11.25)$$

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}(x_i, z_k)=(a_1\wedge c_1)\vee(a_2\wedge c_2)\vee\ldots\vee(a_n\wedge c_n)\ \ldots \qquad (11.26)$$

Теперь в силу ассоциативности операции $\vee$ имеем

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}\vee\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}=[(a_1\wedge b_1)\vee(a_2\wedge b_2)\vee\ldots\vee(a_n\wedge b_n)]\vee$$
$$\vee[(a_1\wedge c_1)\vee(a_2\wedge c_2)\vee\ldots\vee(a_n\wedge c_n)]=[(a_1\wedge b_1)\vee(a_1\wedge c_1)]\vee$$
$$\vee[(a_2\wedge b_2)\vee(a_2\wedge c_2)]\vee\ldots\vee[(a_n\wedge b_n)\vee(a_n\wedge c_n)] \qquad (11.27)$$

Сравнивая соотношение (11.24) и (11.27) и используя свойство дистрибутивности

$$a_\alpha\wedge(b_\alpha\vee c_\alpha)=(a_\alpha\wedge b_\alpha)\vee(a_\alpha\wedge c_\alpha), \qquad \alpha=1,2,\ldots,n,$$

действительно имеем

$$\mu_{\tilde{R}\circ(\tilde{L}_1\cup\tilde{L}_2)}(x_i, z_k)=\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}(x_i, z_k)\vee\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}(x_i, z_k)=\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}\cup\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}(x_i, z_k),$$

что и доказывает справедливость равенства (*).

Выполним доказательство (11.12), т.е. докажаем, что закон $\circ$ относительно операции пересечения не является дистрибутивным:

$$\tilde{R}\circ(\tilde{L}_1\cap\tilde{L}_2)\neq(\tilde{R}\circ\tilde{L}_1)\cap(\tilde{R}\circ\tilde{L}_2) \qquad (11.28)$$

Воспользуемся теми же обозначениями, которые и в (*). Поскольку необходимо доказать, что для некоторых *A, B* и *C* свойство дистрибутивности не выполняется, то мы ограничимся универсальным множеством, в котором α, β, γ = 1, 2 в (11.28). Имеем

$$\mu_{\tilde{R}\circ(\tilde{L}_1\cap\tilde{L}_2)}(x_i, z_k)=[a_1\wedge(b_1\wedge c_1)]\vee[a_2\wedge(b_2\wedge c_2)]=$$
$$=(a_1\wedge b_1\wedge c_1)\vee(a_2\wedge b_2\wedge c_2), \qquad (11.29)$$

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}(x_i, z_k)\wedge\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}(x_i, z_k)=[(a_1\wedge b_1)\vee(a_2\wedge b_2)]\vee[(a_1\wedge c_1)\vee$$
$$\vee(a_2\wedge c_2)]. \qquad (11.30)$$

Необходимо доказать, что (11.29) и (11.30) — это разные величины; для этого запишем

$$\mu_{\tilde{R}\circ(\tilde{L}_1\cap\tilde{L}_2)}(x_i, z_k)=(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee b_2)\wedge(a_1\vee c_2)\wedge(a_2\vee b_1)\wedge$$
$$\wedge(b_1\vee b_2)\wedge(b_1\vee c_2)\wedge(a_2\vee c_1)\wedge(b_2\vee c_1)\wedge(c_1\vee c_2),$$

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_1}(x_i, z_k)\wedge\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{L}_2}(x_i, z_k)=(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee b_2)\wedge(a_2\vee b_1)\wedge$$
$$\wedge(b_1\vee b_2)\wedge(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee c_2)\wedge(a_2\vee c_1)\wedge(c_1\vee c_2).$$

Теперь справедливость неравенства устанавливается в результате сокращений, так как

$$a_1\vee a_2\neq(b_1\vee c_2)\wedge(b_2\vee c_1).$$

Равенство доказано

Легко доказать, что выполняется следующее важное свойство:

$\tilde{L}\subset\tilde{B}\Rightarrow\tilde{R}\circ\tilde{L}\subset\tilde{R}\circ\tilde{B}$ (представляем читателю сделать это).

(Max—*)-композиция. В (11.6) операцию $\wedge$ можно произвольно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для $\wedge$: она ассоциативна и монотонно не убывает по каждому аргументу. Тогда можно записать

$$\mu_{\tilde{L}*\tilde{R}}(x, z) = \bigvee_{y} [\mu_{\tilde{R}}(x, z) * \mu_{\tilde{L}}(x, z). \qquad (11.31)$$

(Max—•)-композиция. Среди (max-•)-композиций, которые можно было бы представить себе, особого внимания заслуживает (max—*)-композиция. В этом случае операция * — это умножение, и она обозначается знаком •; формула (11.31) принимает вид

$$\mu_{\tilde{L}\cdot\tilde{R}}(x, z) = \bigvee_{y} [\mu_{\tilde{R}}(x, z) \bullet \mu_{\tilde{L}}(x, z).$$

Позднее нам представится случай поговорить о (max—•)-композиции и указать некоторые практические приложения ее.

Обычное подмножество α-уровня нечеткого отношения. Пусть $\alpha \in [0, 1]$. Обычным подмножеством α-уровня нечеткого отношения $\tilde{R} \subset X \times X$ будем называть обычное подмножество

$$G_\alpha = \{(x, y) | \ \mu_{\tilde{R}}(x,y) \geq a\}.$$

Пример 1 (рис. 11.27).

$$G_{0,8} = \{(x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_1)\}$$

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,8	1	0
x_2	0,5	1	0,3	0,9
x_3	1	0,2	0,6	0,7

Рис. 11.27.

Пример 2. Рассмотрим нечеткое отношение, которое определено формулой

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \qquad (11.32)$$

Подмножество уровня 0,3 будет определяться условием

$$1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq 0{,}3$$

или

$$x^2 + y^2 \geq 3/7.$$

Это подмножество — внешность круга радиуса $r = \sqrt{3/7}$, включая его границу — окружность (см. рис. 11.28.).

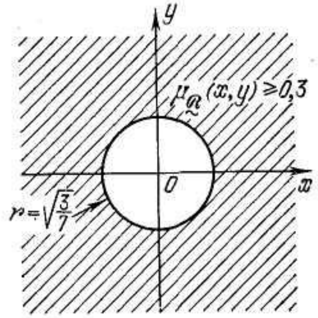


Рис. 11.28.

Обычное подмножество G_α можно определить другим способом, с помощью обычного отношения R_α , такого, что

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{R_\alpha}(x,y), \quad если\ \mu_R(x,y) \geq \alpha, \\ \mu_{R_\alpha}(x,y), \quad если\ \mu_R(x,y) < \alpha, \end{array}\right\} \qquad (11.33)$$

Вернувшись к примеру на рис. 11.27, можно записать

$$R_{0,4} = \begin{array}{c|cccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \qquad R_{0,7} = \begin{array}{c|cccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Для примера на рис. 11.28 очевидно, что условия

$$\mu_{\tilde{R}_{0,2}}(x,y)=0 \quad при\ x^2 + y^2 < 3/7,$$

$$\mu_{\tilde{R}_{0,3}}(x, y) =1\ при\ x^2 + y \geq 3/7,$$

определяют обычное отношение $R_{0,3}$.

Мы установили очевидное свойство

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$$

или, что то же самое,

$$R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$$

Докажем теорему.

Теорема декомпозиции (Слово «декомпозиция» здесь употребляется в смысле, отличном от смысла этого слова при рассмотрении (max-min) или других композиций отношений).

Любое нечеткое отношение $\tilde{R}$ можно представить в форме

$$\tilde{R} = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot R_{\alpha}, \qquad 0<\alpha\leq 1, \tag{11.34}$$

где

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\tilde{R}}(x,y) \geq \alpha, \\ 0, & \text{если } \mu_{\tilde{R}}(x,y) < \alpha. \end{cases}$$

Здесь запись $\alpha \cdot R_\alpha$ обозначает, что все элементы обычного отношения R_α увеличиваются на α.

Доказательство. Функцию принадлежности для отношения $\tilde{R}$, определенного в (11.34), можно записать в виде

$$\mu_{\bigvee_{\alpha} \alpha R_\alpha}(x,y) = \bigvee_{\alpha} \alpha\, \mu_{R_\alpha}(x,y) = \bigvee_{\alpha \leq \mu_{\tilde{R}}(x,y)} \alpha = \mu_{\tilde{R}}(x,y)$$

Пример 1.

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}3 & 0{,}9 \\ 1 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{bmatrix} = \vee \left(0{,}2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ 0{,}3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$0{,}5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ 0{,}6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ 0{,}7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left. 0{,}8 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ 0{,}9 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Пример 2. Согласно (11.33) декомпозиция остается справедливой и в случае, когда X или/и Y имеют мощность континума. Но тогда операция $\vee$ (max) должна считаться выполненной (если необходимо) для континуального множества значений в рассмотренном интервале.

Рассмотрев пример (11.32) (см. рис. 11.28), можем записать

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \underset{\alpha}{\vee}\, \alpha R_\alpha,$$

где

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1, & если\ (x,y) \in D(\alpha), \\ 0, & если\ (x,y) \notin D(\alpha). \end{cases}$$

и $D(\alpha) \subset X \times Y$ — такая область, которая

$$1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq \alpha$$

Композиция ближайших обычных отношений. Напомним, что $\overline{\tilde{R}}$ обозначает обычное отношение, ближайшее к нечеткому отношению $\tilde{R}$. Легко доказать, что

$$\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1 = \tilde{R} \Rightarrow \overline{\tilde{R}}_2 \circ \overline{\tilde{R}}_1 = \overline{\tilde{R}} \ ,$$

где $\tilde{R}$ обозначает (max—min)-композицию.

Пример.

$$\begin{array}{c|ccccc} \tilde{R}_1 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \hline x_1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ x_2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 & 1 \\ x_3 & 0{,}8 & 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array} \circ \begin{array}{c|cccc} \tilde{R}_2 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline y_1 & 0{,}9 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ y_2 & 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0 \\ y_3 & 0{,}8 & 0 & 0{,}7 & 1 \\ y_4 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ y_5 & 0 & 1 & 0 & 0{,}8 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} \tilde{R} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline x_1 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ x_2 & 0{,}3 & 1 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ x_3 & 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \overline{\tilde{R}}_1 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \circ \begin{array}{c|cccc} \overline{\tilde{R}}_2 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ y_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_5 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} \overline{\tilde{R}} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

11.3. Нечеткое подмножество, индуцированное отображением

Рассмотрим отображение Г множества X в множество Y, обозначенное

$$X \underset{\Gamma}{\sim\!\!\longrightarrow} Y$$

где $x \in X$ и $y \in Y$.

$$y \in \Gamma\{x\}.$$

Пусть $\mu_{\tilde{A}}(x)$ — функция принадлежности нечеткого подмножества $\tilde{A} \subset X$, тогда отображение Г индуцирует в Y нечеткое подмножество $\tilde{B} \subset Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \underset{x \in \Gamma^{-1}(y)}{MAX} [\mu_{\tilde{A}}(x)], & \text{если } \Gamma^{-1}\{y\} \neq \varnothing \\ 0, & \text{если } \Gamma^{-1}\{y\} = \varnothing \end{cases}$$

Пример 1 (рис. 11.29). Пусть
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$,
$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.
Рассмотрим отображение, такое, что
$\Gamma\{x_1\}=\{y_3\}$, $\Gamma\{x_2\} = \{y_1, y_4\}$,
$\Gamma\{x_3\} = \{y_1\}$, $\Gamma\{x_4\} = \{y_3\}$,
$\Gamma\{x_5\} = \{y_1\}$, $\Gamma\{x_6\}= \{y_2\}$,
$\Gamma\{x_7\} = \{y_4\}$.
Рассмотрим также отображение Γ^{-1}, обратное Г:
$\Gamma^{-1}\{y_1\}= \{x_2, x_3, x_5\}$,
$\Gamma^{-1}\{y_2\} = \{x_1, x_6\}$,
$\Gamma^{-1}\{y_3\}= \{x_4\}$, $\Gamma^{-1}\{y_4\}= \{x_2, x_7\}$.
И, наконец, рассмотрим нечеткое подмножество $\tilde{A} \subset X$:
$\tilde{A} = \{(x_1| 0,3), (x_2| 0,7), (x_3| 1), (x_4| 0), (x_5| 0,2), (x_6|0,9), (x_7|0,8)\}$.
Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(y_1) &= \underset{\{x_2, x_3, x_5\}}{MAX}(0{,}7;1;0{,}2) = 1, \\ \mu_{\tilde{B}}(y_2) &= \underset{\{x_1, x_6\}}{MAX}(0{,}3;0{,}9) = 0{,}9, \\ \mu_{\tilde{B}}(y_3) &= \underset{\{x_4\}}{MAX}(0) = 0, \\ \mu_{\tilde{B}}(y_4) &= \underset{\{x_2, x_7\}}{MAX}(0{,}7;0{,}8) = 0{,}8. \end{aligned}\right\}$$

Эти результаты изображены на рис. 11.29.

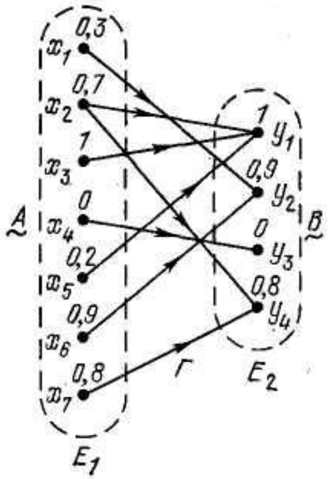


Рис. 11.29.

Интересно сравнить это понятие с соответствующим понятием для обычных подмножеств. Рассмотрим рис. 11.30

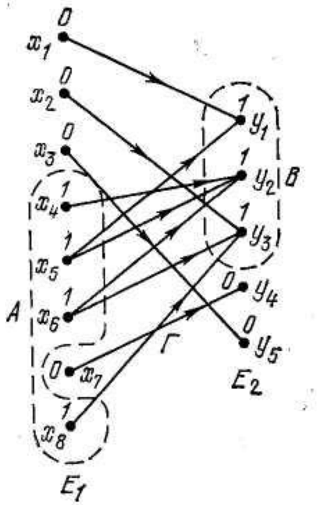


Рис. 11.30.

Пусть

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\},$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}.$$

Имеем

$$Г\ \{x_4, x_5, x_6, x_8\} = \{y_1, y_2, y_3\}.$$

Отображение Г подмножеству $A = \{x_4, x_5, x_5, x_8\}$ ставит в соответствие подмножество $B = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Пример 2. Пусть $x\in R$, $y\in R$, где R — множество вещественных чисел. Рассмотрим нечеткое подмножество $\tilde{A}$, которое определено содержательно как «x, ближайшее к $(4k + 1)\ \pi/2$, $k = ..., — 2, — 1, 0, 1, 2, ...$». Рассмотрим также функцию

$$y = f(x) = \sin x.$$

Тогда нечеткое подмножество $\tilde{B}$, индуцированное $f\ (x)$, будет иметь вид $\tilde{B} = \{y \mid y\leq 1$ и значение y близкое к $1\}$ (рис. 11.31).

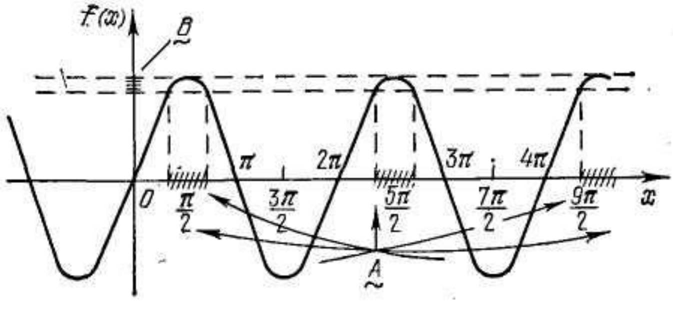


Рис. 11.31.

11.4. Условные нечеткие подмножества

Нечеткое подмножество $\tilde{B}\ (x)\subset Y$ будет называться *условным* на X, если его функция принадлежности зависит от $x\in X$ как от параметра.

Для записи условной функции принадлежности используют обозначение

$$\mu_{\tilde{B}}\ (y||x),\quad \text{где } x\in X \text{ и } y\in Y.$$

Эта функция определяет отображение X в множество нечетких подмножеств, определенных на Y.

Таким образом, нечеткое подмножество $\tilde{A}\subset X$ будет индуцировать нечеткое подмножество $\tilde{B}\subset Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \underset{x \in X}{MAX}\,(\text{MIN}\,[\mu_{\tilde{B}}(y||x),\ \mu_{\tilde{A}}(x)]). \qquad (11.35)$$

Пример. Рассмотрим нечеткое отношение между

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\},$$

определенное следующей таблицей:

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,3	0,7	0
x_2	0,2	0,5	0
x_3	1	0	0,8
x_4	0	1	0,5
x_5	0,3	1	0,4
x_6	0,8	0	0

Отношение $\tilde{R}$ выражает условную функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y||x).$$

Например,

$$\mu_{\tilde{B}}(y_3||x_5) = 0{,}4.$$

Предположим, что в X имеется нечеткое подмножество $\tilde{A}$, определенное как

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}2), (x_3|0{,}8), (x_4|1), (x_5|0{,}7), (x_6|0)\}.$$

Этому нечеткому подмножеству $\tilde{A} \subset X$ соответствует нечеткое подмножество в Y, скажем $\tilde{B} \subset Y$, которое будет определяться формулой (11.35). Проведем вычисление. Сначала подсчитаем $\mu_{\tilde{B}}(y_1)$. Имеем

MIN [$\mu_{\tilde{B}}(y_1||x_1)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$] = MIN [0,3; 0,5] = 0,3,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}(y_1||x_2)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_2)$] = MIN [0,2; 0,2] = 0,2,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}(y_1||x_3)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_3)$] = MIN [1; 0,81 = 0,8, MIN [$\mu_{\tilde{B}}$ $(y_1||x_4)$, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_4)] = MIN [0; 1] = 0,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}$ $(y_1||x_5)$, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_5)] = MIN [0,3; 0,7] = 0,3,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}$ $(y_1||x_6)$, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_6)] = MIN [0,8; 0] = 0,

$\underset{x_i}{MAX}$ MIN [$\mu_{\tilde{B}}$ $(y_1||x_i)$, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_i)] = MAX [0,3; 0,2; 0,8; 0; 0,3; 0] = 0,8.

Аналогичные подсчеты нужно провести для y_2 и y_3. Тогда получим

$$\mu_{\tilde{B}}(y_1) = 0{,}8,\ \mu_{\tilde{B}}(y_2)=1,\ \mu_{\tilde{B}}(y_3) = 0{,}8.$$

Таким образом,

$$\tilde{B} = \{(y_2|0{,}8), (y_2|1), (y_3|0{,}8)\}.$$

Другое представление условного нечеткого подмножества. Как мы увидим ниже, для нечетких подмножеств выражение (11.35) играет ту же самую роль, что и понятие функции для элементов формальных множеств. Понятие функции для этих элементов можно выразить такой фразой: «если *x=a,* то в соответствии с определением функции *f y =b»,* которую можно записать в виде

$$x \sim\xrightarrow[f]{} y$$

или в виде

$$y = f(x).$$

Понятие условного нечеткого подмножества играет в точности ту же роль, но вместо того, чтобы рассматривать элементы $x\in X$, $y\in Y$ и отношение f, являющееся функцией, введем следующее означення.

Пусть $\tilde{X} \subset X$ и $\tilde{Y} \subset Y$; рассмотрим нечеткое отношение $\tilde{R}$ между X и Y. Теперь определим: если $\tilde{X} = \tilde{A}$, то в соответствии с отношения R имеем $\tilde{Y} = \tilde{B}$; это можно записать в виде

$$\tilde{A} \sim\xrightarrow[\tilde{R}]{} \tilde{B}\ .$$

Если $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ — функция принадлежности нечеткого отношения $\tilde{R}$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$- отношение $\tilde{A}$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ — отношение $\tilde{B}$, то

$$\mu_{\tilde{B}}(y)= \underset{x\in X}{MAX}\, \mathrm{MIN}[\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{R}}(x, y)]= \bigvee_{x} [\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x, y)] \quad (11.36)$$

Это выражение устанавливает другое представление условных нечетких подмножеств. Дальше мы убедимся в важности этого понятия.

Рассмотрим пример использования этого представления.

Пример 1

$X =\{ x_1, x_2, x_3),$

$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}3), (x_2|0{,}7), (x_3|1)\},$ (11.37)

$Y = \{y_1. y_2, y_3, y_4, y_5\}$

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c|ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \hline x_1 & 0{,}8 & 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ x_2 & 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ x_3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 1 \end{array}$$

(11.38)

Перепишем (11.37) в виде

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \boxed{0{,}3} & \boxed{0{,}7} & \boxed{1} \end{array}.$$

(11.39)

Теперь проведем операцию взятия MIN для всех элементов строки (11.39) и столбца y_1 (11.38); это даст

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} y_1 \\ 0{,}8 \\ 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{array} = \begin{array}{c} y_1 \\ 0{,}3 \wedge 0{,}8 \\ 0{,}7 \wedge 0{,}8 \\ 1 \wedge 0{,}2 \end{array} = \begin{array}{c} y_1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}7 \\ 0{,}2 \end{array}.$$

После выполнения операции MAX на элементах полученного столбца имеем

$$0{,}3 \vee 0{,}7 \vee 0{,}2= 0{,}7.$$

Таким образом,

$$\mu_{\tilde{B}} (y_1)=0{,}7.$$

Выполнив то же самое между элементами (11.39) и другими столбцами (11.38), получим

$$\mu_{\tilde{B}} (y_2)= 0{,}3,\ \mu_{\tilde{B}} (y_3) = 0{,}7,\ \mu_{\tilde{B}} (y_4) = 0{,}4,\ \mu_{\tilde{B}} (y_5) = 1.$$

И окончательно

$$\tilde{B} = \{(y_1|0{,}7), (y_2|0{,}3), (y_3|0{,}7), (y_4|0{,}4), (y_5|1)\},$$

или, что то же самое,

$\underset{\sim}{B}$ =	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	0,7	0,3	0,7	0,4	1

Пример 2. Очевидно, что формула (11.36) или (11.35) также применяется в случае, когда подмножества — обычные, а отношение *R* — булево (т.е. формальное). В этом случае формулы принимают вид

$$\mu_{\tilde{B}}\ (y) = \dot{\sum_{x}}\ \ \mu_A\ (x) \cdot \mu_R\ (x,y), \qquad (11.40)$$

где $\dot{\sum\limits_{x}}$ - булева сумма.

Пусть

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$A = \{(\ x_1|1), (x_2|0), (x_3|1)\}$,

$Y = \{\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$,

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0	0	1	0
x_2	0	1	1	1	0
x_3	1	0	0	0	1

(11.41)

Тогда, выполняя булевы операции, которые указаны в (11.40), для подмножества

A =	x_1	x_2	x_3
	1	0	1

и отношения (11.41), находим

B =	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	1	0	0	1	1

Пример 3. Рассмотрим теперь случай, когда универсальное множество беспрерывно.

Пусть

$X = \mathrm{R}^+$,

$\tilde{A} = \{x|\ \mu_{\tilde{A}}\ (x) = \mathrm{e}^{-k_1 x}\ \}, \quad k_1 \in \mathrm{R}^+$,

$\tilde{R} = \{(x, y)|\ \mu_{\tilde{R}}\ (x, y) = e^{-k_2|x-y|}\},\quad k_2 \in \mathrm{R}^+$

при $k_2 > k_1$.

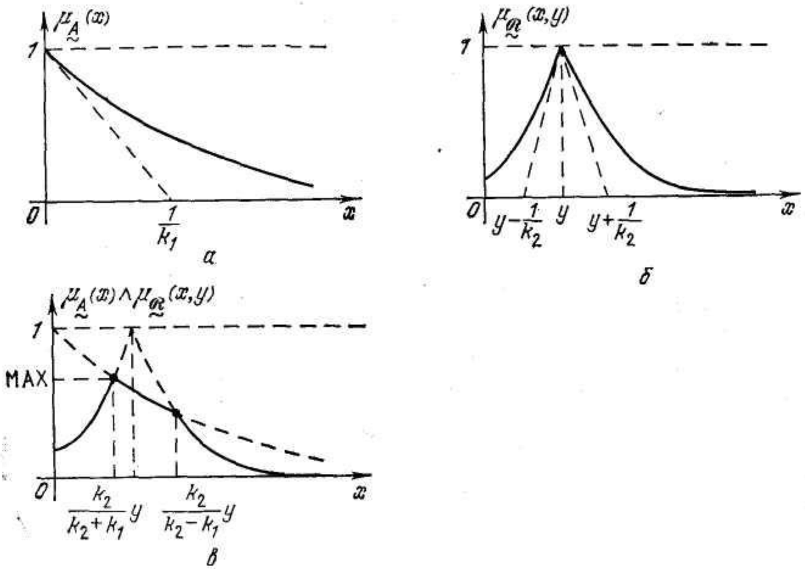


Рис. 11.32.

Теперь определим минимум по x для $\mu_{\tilde{A}}\ (x)$ (рис. 11.32, *а*) и $\mu_{\tilde{R}}\ (x,y)$ (рис. 11.32, *б*). Эти две кривые пересекаются в двух точках:

условие $0 \le x \le y$, $e^{-k_1 x} = e^{-k_2|y-x|}$

дает точку $x = \dfrac{k_2}{k_2 + k_1}\ y$,

условие $y \le x$, $e^{-k_1 x} = e^{-k_2|x-y|}$

дает точку $x = \dfrac{k_2}{k_2 - k_1}\ y$.

На рис. 11.32, *в* выделена кривая

$$\mu\,(x,y) = \mu_{\tilde{A}}\ (x) \wedge \mu_{\tilde{R}}\ (x,y),$$

максимум которой достигается при

$$x = \frac{k_2}{k_2 + k_1}\ y$$

Таким образом,

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = e^{-k_1\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right)y} = e^{-\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}y}$$

Общее замечание. Очевидно, можно задать следующий вопрос. Если при $\tilde{X} = \tilde{A}$ в соответствии с отношением $\tilde{R}$ имеем $\tilde{Y} = \tilde{B}$, то можно ли отсюда заключить, что из $\tilde{Y} = \tilde{B}$ в соответствии с обратным нечетким отношением $\tilde{R}'$ получим $\tilde{X} = \tilde{A}$, где $\tilde{R}'$ — нечеткое отношение, обратное к $\tilde{R}$? (Под обратным здесь понимается отношение, которое выходит из данного, если в таблице отношения заменить столбцы строками. Это отношение лучше было бы назвать транспонированным, поскольку в следующей фразе под обратным к $\tilde{R}$ подразумевается такое отношение $\tilde{R}'$, которое $\forall A$: $A\tilde{R}\ \tilde{R}' = A$, когда $\tilde{R}\ \tilde{R}'$ - тождественное отношение на X). За исключением частных случаев, обратный переход от $\tilde{B}$ посредством $\tilde{R}'$ к $\tilde{A}$ невозможен: и в этом смысле отношение $\tilde{R}'$ не будет отношением, обратным к отношению $\tilde{R}$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример (11.37)—(11.39) и формулу (11.40): нечеткое подмножество

$\underset{\sim}{A}$ =

x_1	x_2	x_3
0,3	0,7	1

и отношение

$\underset{\sim}{R}$ =

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,8	1	0	0,3	0,7
x_2	0,8	0,3	0,8	0,4	0,7
x_3	0,2	0,3	0	0,2	1

дают нечеткое подмножество

$\underset{\sim}{B}$ =

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0,7	0,3	0,7	0,4	1

Тогда как $\tilde{B}$ и

$$\underset{\sim}{R}' = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ y_2 & 1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ y_3 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ y_4 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ y_5 & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 \end{array}$$

дали бы

$$\underset{\sim}{A}' = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}7 & 1 \end{array}$$

(таким образом, здесь ситуация та же, что и при матричном исчислении в линейном векторном пространстве, где [М]$\{x\}=y$ и [М]'$\{y\}\neq\{x\}$. Если матрица [М] квадратная и невырожденная, то [М] имеет обратную матрицу $[М]^{-1}$, такую, что $[М]\cdot[М]^{-1}=[1]$ и $[М]\cdot\{x\}=\{y\}$ и $\{x\} = [М]^{-1}\cdot\{y\}$, где $\{x\}$ и $\{y\}$ - векторы-столбцы).

Нечеткие подмножества, последовательно обусловливающие друг друга.

Если $\tilde{A}_1$ индуцирует $\tilde{A}_2$ с помощью $\tilde{R}_1$, $\tilde{A}_2$ индуцирует $\tilde{A}_3$ с помощью $\tilde{R}_2$, ... и $\tilde{A}_{n-1}$ индуцирует $\tilde{A}_n$ с помощью $\tilde{R}_{n-1}$, то $\tilde{A}_1$ индуцирует $\tilde{A}_n$ с помощью $\tilde{R}_{n-1}\circ\tilde{R}_{n-2}\circ...\circ\tilde{R}_1$.

Пример.

$X = \{x_1, x_2\}$,

$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}8), (x_2|0{,}3)$,,

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$,

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ x_2 & 0{,}8 & 0 & 0{,}7 \end{array}$$

$Z = \{z_{1;}\ z_2,\ z_3\}$,

$$\underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array} \circ \underset{\sim}{R}_1\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \end{array} \circ \underset{\sim}{R}_2\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array} \circ \underset{\sim}{R}_2\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array} \subset E_3$$

Ближайшие обычные подмножества, обусловливающие друг друга.

Легко показать (достаточно сослаться на выражение $\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1 = \tilde{R} \Rightarrow \overline{\overline{R}}_2 \circ \overline{\overline{R}}_1 = \overline{\overline{R}}$), что

$$\tilde{A} \underset{\tilde{R}}{\sim\!\!\rightarrow} \tilde{B} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \underset{\overline{\overline{R}}}{\sim\!\!\rightarrow} \overline{\overline{B}} .$$

Пример.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \underset{\sim}{R}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \underset{\sim}{R}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Это свойство остается справедливым, какой бы ни была природа универсальных множеств X и Y, где $x_i \in X$ и $y_i \in Y$, и не зависит от того, конечны или нет множества X и Y.

12. Свойства нечетких отношений

12.1. Свойства нечетких бинарных отношений

Разные типы нечетких отношений определяются с помощью свойств, аналогичных свойствам обычных отношений, причем для нечетких отношений можно указать разные способы обобщения этих свойств. Как основные свойства здесь будут рассматриваться свойства, имеющие алгебраическую запись, что и для обычных отношений. Справа от алгебраической записи указывается ее поточечная формулировка. Для ряда свойств их алгебраическая запись отсутствует.

Рассмотрим случай, когда

$X = Y = P$

M = [0, 1],

и займемся исследованием некоторых свойств нечетких бинарных отношений в $P \times P$.

Пример 1. Пусть

P = {A, B, C, D, E},

M = [0, 1].

Таблица или матрица на рис. 12.1 представляет нечеткое отношение в $P \times P$.

$\underset{\sim}{R}$	A	B	C	D	E
A	0,1	0	0	1	0,8
B	0,8	0,3	0	0,7	1
C	0,8	0,3	0,2	0	0,9
D	0,6	0	1	0,5	0
E	0,2	0,5	1	0,6	0,4

Рис. 12.1.

Пример 2. Пусть R — множество вещественных чисел и $x \in$ R, $y \in$ R, тогда

$$|y| \text{»} |x| \qquad (12.1)$$

есть нечеткое бинарное отношение $\tilde{R}$, которое задано в R×R, с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y),* которая определяется (12.1) для всех *(x, y).*

Перейдем к изучению основных свойств нечетких отношений. При представлении функции принадлежности, которая определяет нечеткое отношение, мы не будем различать обозначения $\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y)* или

$\mu_{\tilde{G}}$ *(x, y),* поскольку нечеткое отношение можно рассматривать как нечеткий граф.

Симметрия. Нечеткое бинарное отношение называется *симметричным,* если выполняется условие

$$\forall\, (x, y) \in P \times P: (\,\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) = \mu\ ) \Longrightarrow (\,\mu_{\tilde{R}}\ (y, x) = \mu$$

Пример 3. (См. рис. 12.2).

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,1	0	0,1	0,9
B	0,1	1	0,2	0,3	0,4
C	0	0,2	0,8	0,8	1
D	0,1	0,3	0,8	0,7	1
E	0,9	0,4	1	1	0

Рис. 12.2.

Пример 4. Пусть R — множество вещественных чисел и $x \in$ R, $y \in$ R. Тогда отношение «*y* близкое к *x*» интуитивно воспринимается как нечеткое симметричное отношение в R×R.

Общее обозначение симметричности выглядит так:

$$\tilde{R} = \tilde{R}^{-1}, \quad \tilde{R}\,(x,y) = \tilde{R}\ (y,x) \quad \forall\, x, y \in X\,.$$

Антисимметричность:

$$\tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1} \subseteq \tilde{E}\,, \quad \tilde{R}\,(x,y) \wedge \tilde{R}\ (y,x) = \mathbf{0} \quad \forall\, x, y \in X\,, x \neq y.$$

Асимметричность:

$$\tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1} = \varnothing, \quad \tilde{R}(x,y) \wedge \tilde{R}(y,x) = \mathbf{0} \quad \forall\, x, y \in X.$$

Полнота сильная:

$$\tilde{R} \cup \tilde{R}^{-1} = \mathrm{U}, \quad \tilde{R}(x,y) \vee \tilde{R}(y,x) = \mathbf{I} \quad \forall\, x, y \in X.$$

Полнота слабая:

$$\tilde{R}(x,y) \vee \tilde{R}(y,x) > \mathbf{0} \quad \forall\, x, y \in X.$$

Последние условия называют также линейностью и связностью .

Рефлексивность. Это свойство определяется условием

$$\forall\, x, y \in P: \ \mu_{\tilde{R}}(x, y) = 1.$$

Пример 5. (См. рис. 12.3).

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0	0,2	0,3
B	0	1	0,1	1
C	0,2	0,7	1	0,4
D	0	1	0,4	1

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	0,2	1	0,4	0,4
B	0	0,6	0,3	0
C	0	1	0,3	0
D	0,1	1	1	0,1

Рис. 12.3.

Пример 6. Отношение *«y* близкое к *x»* в примере на симметричность является рефлексивным отношением.

Возможно и такое определение *рефлексивности:*

$$\tilde{E} \subseteq \tilde{R}, \quad \tilde{R}(x,x) = \mathbf{I} \quad \forall\, x \in X. \quad (*)$$

Слабая рефлексивность:

$$\tilde{R}(x,y) < \tilde{R}(x,x) \quad \forall\, x, y \in X.$$

Условие

$$\tilde{R}(x,y) = \mathbf{I} \quad \forall\, x, y \in X, \ x \neq y.$$

вместе с условием (*) будем называть *сильной рефлексивностью.*

Антирефлексивность:

$$\tilde{R} \cap \tilde{E} = \varnothing, \quad \tilde{R}(x,x) = \mathbf{0} \quad \forall\, x \in X. \quad (**)$$

Слабая антирефлексивность:

$$\tilde{R}(x,x) \leq \tilde{R}(x,y) \quad \forall\, x, y \in X.$$

Сильная антирефлексивность — это условие (**) совместно с условием

$$\mathbf{0} < \tilde{R}(x,y) \quad \forall\, x, y \in X, \ x \neq y.$$

Транзитивность. Пусть $x, y, z \in P$, тогда

$$\forall\, (x, y), (y, z), (x, z) \in P \times P:$$

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x, z) \geq \underset{y}{MAX}\ [\mathrm{MIN}\ (\ \mu_{\tilde{R}}\ (x, y),\ \mu_{\tilde{R}}\ (y,z))]. \qquad (12.2)$$

Выписанное соотношение определяет свойство транзитивности нечеткого отношения. Это соотношение можно записать в виде

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x, z) \geq \underset{y}{\vee}\ [\ \mu_{\tilde{R}}\ (x, y),\ \mu_{\tilde{R}}\ (y,z)]. \qquad (12.3)$$

Напомним, что символ $\vee$ означает «максимальное из значений...», а символ $\wedge$ — «минимальное из значений ...».

Возможно и такое определение транзитивности:

$$\tilde{R} \supseteq \tilde{R} \circ \tilde{R}, \quad \tilde{R}\,(x,z) \geq \tilde{R}\ (x,y)\ \wedge\ \tilde{R}\ (y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X.$$

Возможны и другие определения условия транзитивности нечеткого отношения. Другой подход к определению условия транзитивности нечетких порядков будет рассмотрен ниже.

Прежде чем привести некоторые примеры, следует удостовериться в том, что определением (12.3) на самом деле обобщает понятие транзитивности формальных отношений.

Операция $\wedge$ (min) отвечает «и» в пропозиционной логике, а операция $\underset{y}{\vee}$ (max по всем *y)* соответствует результату, который можно получить посредством импликации $\Longrightarrow$.

Рассмотрим несколько примеров применения формулы (12.2) (или, что то же самое, (12.3)).

Пример 7. Следующие нечеткие отношения транзитивны:

Y много больше *X*,

A чище, чем *B*,

X — дальний родственник *Y*,

в противоположность отношению *X* похож на *Y*, которое нетранзитивно. Ведь может случиться так, что *X* похож на *Y* и *Y* похож на *Z*, но *X* не обязательно похож на *Z;* все, однако, зависит от характера функции $\mu_{\tilde{R}}\,(x,\ y)$, которая оценивает сходство. Это приведет нас позднее к тому, чтобы с большей точностью определить, что в этой теории имеется в виду под «сходством».

Пример 8. Рассмотрим отношение $x\,\tilde{R}\ y$, где $x,\ y \in\ N$, задаваемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,\ y) = \mathrm{e}^{-k(x-y)^2} \qquad (12.4)$$

при значениях k>1 и достаточно больших для того, чтобы эта функция принадлежности выражала отношение «*x* и *y* очень близки друг к другу». Покажем, что нечеткое отношение, которое обусловлено (12.4), нетранзитивно.

На рис. 12.5 выписанная матрица отношения (12.4).

$\underset{\sim}{R}$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	e^{-25k}	e^{-36k}	e^{-49k}	...
1	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	e^{-25k}	e^{-36k}	...
2	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	e^{-25k}	...
3	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	...
4	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	...
5	e^{-25k}	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	...
6	e^{-36k}	e^{-25k}	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	...
7	e^{-49k}	e^{-36k}	e^{-25k}	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋱

Рис. 12.5.

На рис. 12.6 выполненны вычисления правой части условия транзитивности (12.3).

$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$ y	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	0	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	...
2	0	0	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	...
3	0	0	0	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	...
4	0	0	0	0	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	...
5	0	0	0	0	0	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	...
6	0	0	0	0	0	0	e^{-6}	e^{-6}	...
7	0	0	0	0	0	0	0	e^{-7}	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.6.

Можно убедиться, что (12.3) выполняется не для всех пар. Следовательно, отношение, определенное (12.4), нетранзитивно.

Позднее мы вернемся к детальному рассмотрению случая, когда *P* — бесконечное множество. Транзитивность в этом случае заслуживает особого внимания.

Теперь рассмотрим случай, когда отношение транзитивно, а множество *P* счетно.

Пример 9. Рассмотрим отношение $x\tilde{R}y$, где $x,\ y\in\ M$, которое определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}\,(x,\,y) = 0 \qquad\qquad x{=}y,$$

$$\mu_{\tilde{R}}\,(x,\,y) = \mathrm{e}^{-x} \qquad\qquad x{\geq}y.$$

Матрица этого отношения представлена на рис. 12.7. На рис. 12.9 приведенные результаты вычислений правой части (12.3).

$\tilde{R}$ x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	0	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	...
2	0	0	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	...
3	0	0	0	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	...
4	0	0	0	0	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	...
5	0	0	0	0	0	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	...
6	0	0	0	0	0	0	e^{-6}	e^{-6}	...
7	0	0	0	0	0	0	0	e^{-7}	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Рис. 12.7.

$\tilde{R} \circ \tilde{R}$ \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1	1	1	1	1	1	1	1	…
1	0	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	…
2	0	0	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	…
3	0	0	0	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	…
4	0	0	0	0	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	…
5	0	0	0	0	0	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	…
6	0	0	0	0	0	0	e^{-6}	e^{-6}	…
7	0	0	0	0	0	0	0	e^{-7}	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.8.

Сравнивая эти два рисунка, можно убедиться, что (12.3) удовлетворяется для всех пар. Это отношение транзитивно.

Можно также проверить, что этот вывод остается в силе, если $x, y \in R^{+}$. Это отношение можно интерпретировать как «величина *x* меньше *y* и не зависит от *y*».

Замечание о конечных отношениях. Операция, определяемая посредством (12.2) или (12.3), проводится над строками и столбцами так же, как это делается в матричных вычислениях по правилу «строка на столбец». На рис. 12.9 показано, как производить вычисления, чтобы получить

$$\vee\, [(x_{i1} \wedge x_{1i}), (x_{i2} \wedge x_{2i}), \ldots, (x_{in-1} \wedge x_{n-1i})(x_{in} \wedge x_{ni})]\ldots$$

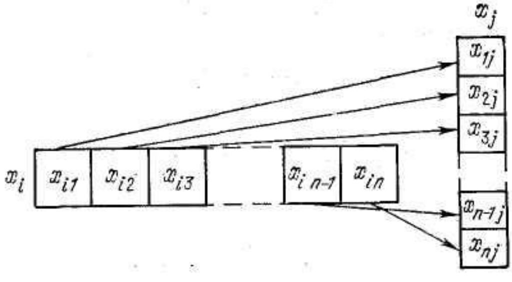


Рис. 12.9.

Композицию нечетких бинарных отношений можно рассматривать как разновидность матричного исчисления или как метод вычислений в теории графов, хотя они и отличаются от классических методов. Больше того, теория композиции бинарных отношений — частный случай общей теории моноидов.

12.2. Декомпозиция нечетких отношений

Одно из важнейших свойств нечетких отношений заключается в том, что они могут быть представлены в виде совокупности обычных отношений, причем эти отношения могут быть упорядочены по включению, представляя собой иерархическую совокупность отношений. Разложение нечетких отношений на совокупность обычных отношений основаны на понятии α-уровня нечеткого отношения. Здесь для простоты будет предполагаться, что L линейно упорядочено.

α-уровнем нечеткого отношения $\tilde{R}$ называется обычное отношение R_α, которое обусловленно для всех α >0 следующим образом:

$$R_\alpha = \{(x,y) \in X \times X | R(x,y) \geq \alpha\}. \tag{12.5}$$

Если обычное отношение R_α подобно нечеткому отношению отождествлять с его характеристической функцией $R_\alpha\colon X \times X \to \{0, 1)$, то соотношение (12.5) можно переписать в виде

$$R_\alpha \{(x,y) = \begin{cases} 1, & если\ \tilde{R}(x,y) \geq \alpha, \\ 0 & в\ противном\ случае \end{cases} \tag{12.6}$$

Нетрудно увидеть, что α-уровни нечетких отношений удовлетворяют соотношению: из α≤β следует $R_\alpha \supseteq R_\beta$, представляя собой совокупность вложенных друг в друга отношений.

Теорема. Нечеткое отношение $\tilde{R}$ обладает каким-нибудь из свойств рефлексивностей, симетричностей, полнот, транзитивностей, тогда и только тогда, когда этими свойствами обладают все его α-уровни, т.е. $\tilde{R}$ рефлексивно тогда и только тогда, когда при всех **0**< α <**I** R_α также рефлексивно; $\tilde{R}$ транзитивно тогда и только тогда, когда транзитивны все R_α, и т.д.

Эта теорема играет важную роль в теории нечетких отношений.

Во-первых, эта теорема показывает, что основные типы обычных отношений и их свойства могут быть обобщенны и на случай нечетких отношений, и становится ясным способ такого обобщения. Во-вторых, оказывается, что основные типы нечетких отношений могут быть представленны как совокупность, иерархия обычных отношений того же типа. И если решением практической задачи есть получение на множестве X некоторого отношения заданного типа, например, эквивалентности или порядка, то построение на X соответствующего нечеткого отношения позволяет получать сразу ансамбль необходимых обычных отношений, что дает возможность учитывать неоднозначность решений, присущих практическим ситуациям, и предоставляет лицу, принимающему решение, некоторую свободу выбора. В-третьих, теория нечетких множеств, позволяя учитывать эту неоднозначность возможных решений, ограничений, целей, дает возможность оперировать сразу всей совокупностью таких объектов как единым целым.

Согласно теореме декомпозиции нечеткое отношение может быть представлено в следующем виде:

$$\tilde{R} = \bigcup_{\alpha} \alpha R_\alpha,$$

где отношение αR_α определются следующим образом:

$$\alpha R_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } R_\alpha(x,y) = 1, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Кроме свойств рефлексивностей, симметричностей, полнот, транзитивностей, которые выполняются для всех α-уровней, могут быть определены аналогичные свойства, которые выполняются только для одного или нескольких α-уровней.

Приведем примеры таких α-свойств, предполагая, что элемент α фиксированный:

α-симметричность

$$\tilde{R}(x, y) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{R}(y,x) \geq \alpha \quad \forall x,y \in X;$$

α -транзитивность

$$\tilde{R}(x, y) \geq \alpha, \quad \tilde{R}(y,z) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{R}(x, z) \geq \alpha \quad \forall x,y,z \in X;$$

α-транзитивность можно определить также таким образом

$$\tilde{R}(x, y) \geq \alpha, \quad \tilde{R}(y, z) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{R}(x, z) \geq \tilde{R}\{x, y) \wedge \tilde{R}(y, z) \quad \forall x,y,z \in X.$$

Аналогично могут быть определены и другие α-свойства. Подобные α-свойства могут рассматриваться в задачах, в которых вводится порог α на силу отношения $\tilde{R}$, или ищется такое α, при котором R_a имеет требуемое свойство. Например, α-свойства нечетких отношений рассматриваются при моделировании структуры сложных систем.

12.3. Транзитивное замыкание нечетких отношений

Большое значение в приложениях теории нечетких отношений играют транзитивные отношения. Такие отношения обладают многими удобными свойствами и определяют некоторую правильную структуру множества *X*. Например, если отношение $\tilde{R}$ в *X* характеризует сходство между объектами, то транзитивность такого отношения обеспечивает возможность разбиения множества *X* на непересекающиеся классы сходств. Если же отношению в *X* придается смысл «предпочтения», «доминирования», «подчиненности», то транзитивность такого отношения обеспечивает возможность естественного упорядочения объектов множества *X*, существования «наилучших», «недоминируемых» объектов и т.п. Поэтому представляет большой интерес возможность преобразования исходного нетранзитивного отношения в транзитивное. Такое преобразование обеспечивает операция транзитивного замыкания нечеткого отношения.

Пусть $\tilde{R}$ — нечеткое отношение в $P\times P$. Определим

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R} \circ \tilde{R}$$

функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}^2}(x, z) = \underset{y}{MAX}\,[\mathrm{MIN}\,(\mu_{\tilde{R}}(x, y),\ \mu_{\tilde{R}}(y, z))], \quad (12.8)$$

где $x, y, z \in P$. Выражение (12.8) можно переписать в виде

$$\mu_{\tilde{R}^2}(x, z) = \bigvee_{y}[\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

Свойство (12.2) или (12.3), определяющее транзитивность, можно также представить следующим образом:

$$\tilde{R} \circ \tilde{R} \subset \tilde{R}.$$

Предположим, что

$$\tilde{R}^2 \subset \tilde{R},$$

и

$$\tilde{R}^{k+1} \subset \tilde{R}^k, \quad k = 1,2,3,.....,$$

Тогда очевидно, что

$$\tilde{R}^k \subset \tilde{R}, \quad k = 1,2,3,...$$

Транзитивным замыканием нечеткого бинарного отношения будем называть отношение

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup ... \quad (12.9)$$

Теорема 1. Транзитивное замыкание любого бинарного отношения есть транзитивное бинарное отношение.

Доведение. Согласно (12.9) можно записать

$$\hat{\tilde{R}}^2 = \hat{\tilde{R}} \circ \hat{\tilde{R}} = \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \tilde{R}^4 \cup \ldots \qquad (12.10)$$

Тогда, сравнивая (12.9) и (12.10), можно записать

$$\hat{\tilde{R}}^2 \subset \hat{\tilde{R}}$$

что и доказывает транзитивность $\tilde{R}$.

Подводя итоги, получаем следующие свойства:

$(\tilde{R} \supset \tilde{R}^2) \Leftrightarrow (\tilde{R} = \hat{\tilde{R}}) \Leftrightarrow (\tilde{R}$ транзитивно),

$(\tilde{R} = \tilde{R}^2) \Rightarrow (\tilde{R} = \hat{\tilde{R}}) \Leftrightarrow (\tilde{R}$ транзитивно).

Замечание. Теорема 1 позволяет строить транзитивное отношение для любого отношения.

Как следствие из теоремы 1 получаем, что $\tilde{R}$ транзитивно тогда и только тогда, когда $\tilde{R} = \hat{\tilde{R}}$.

В случае, когда $\tilde{R}$ рефлексивно, имеем также:

$$\tilde{R} \subseteq \tilde{R}^2 \subseteq \ldots \subseteq \tilde{R}^{n-1} = \tilde{R}^n = \tilde{R}^{n+1} = \ldots$$

откуда следует $\hat{\tilde{R}} = \tilde{R}^{n-1}$.

Теорема 2. Пусть $\tilde{R}$ — некоторое нечеткое бинарное отношение. Если для некоторых k имеем

$$\tilde{R}^{k+1} = \tilde{R}^k, \qquad (12.11)$$

то

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k. \qquad (12.12)$$

Заметим, что обратное утверждение неверно.

Доказательство. Имеем

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k \cup \tilde{R}^{k+1} \cup \tilde{R}^{k+2} \cup \ldots =$$

$$= \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k \cup \tilde{R}^k \cup \tilde{R}^k \cup \ldots = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k. \qquad (12.13)$$

Ниже мы докажем, что если $\tilde{R} \subset P \times P$, где P — конечное универсальное множество и card $(P) = n$, то

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^n \qquad (12.14)$$

и существует k, определяемое (12.12), такое, что $k \leq r$.

Весьма полезным фактом является то, что α-уровень транзитивного замыкания нечеткого отношения $\tilde{R}$ совпадает с транзитивным замыканием соответствующего α-уровня:

$$(\hat{\tilde{R}})_\alpha = (\hat{\tilde{R}}_\alpha) \quad \text{для всех} \quad \alpha \in L, \quad \alpha \in 0. \qquad (12.15)$$

В (12.15) для простоты предполагается, что L линейно упорядочено, т.е. для любых $x, y \in L$ выполняется либо $x \le y$, либо $y \le x$.

Заметим, что при транзитивном замыкании нечеткого отношения в общем случае сохраняются лишь некоторые из свойств рефлексивностей, симметричностей, полнот, транзитивностей. Такими свойствами есть рефлексивность, симметричность, полнота и транзитивность.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим отношение $\tilde{R}$, которое представлено на рис. 12.10, *а.* Можно рассчитать сначала $\tilde{R}^2$ (рис. 12.10, *б)*, потом $\tilde{R}^3$ (рис. 12.10, *в).* Мы видим, что $\tilde{R}^3 = \tilde{R}^2$, и вычисления можно здесь прекратить. Транзитивное замыкание $\hat{\tilde{R}}$ представлено на рис. 12.10, *г*.

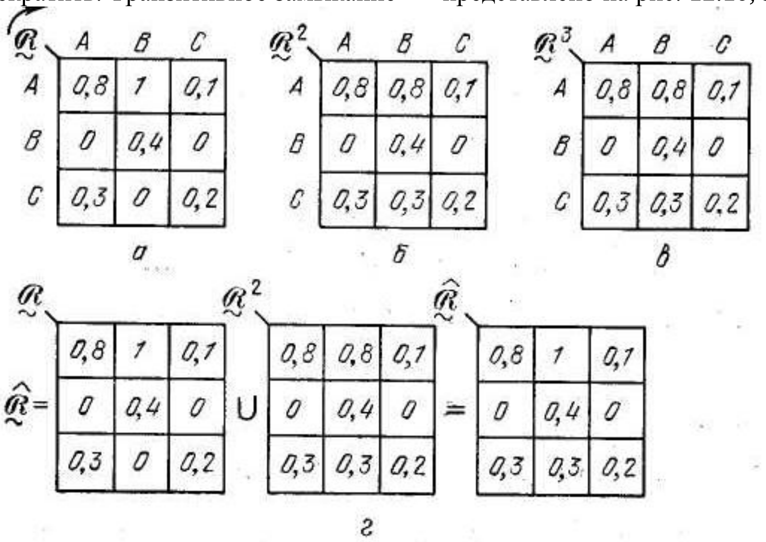


Рис. 12.10.

Глядя на рис. 12.11, можем убедиться, что

$$\hat{\tilde{R}}^2 \subset \hat{\tilde{R}}.$$

$$\hat{\tilde{R}}^2 = \begin{bmatrix}0,8 & 1 & 0,1\\ 0 & 0,4 & 0\\ 0,3 & 0,3 & 0,2\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}0,8 & 1 & 0,1\\ 0 & 0,4 & 0\\ 0,3 & 0,3 & 0,2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,8 & 0,8 & 0,1\\ 0 & 0,4 & 0\\ 0,3 & 0,3 & 0,2\end{bmatrix}$$

Рис. 12.11.

Пример 2. На рис. 12.12 представленно транзитивное отношение $\tilde{R}$.

$$\begin{array}{c|ccc} \tilde{R} & A & B & C\\ \hline A & 0,2 & 1 & 0,4\\ B & 0 & 0,6 & 0,3\\ C & 0 & 1 & 0,3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \tilde{R}^2 & A & B & C\\ \hline A & 0,2 & 0,6 & 0,3\\ B & 0 & 0,6 & 0,3\\ C & 0 & 0,6 & 0,3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \tilde{R}^3 & A & B & C\\ \hline A & 0,2 & 0,6 & 0,3\\ B & 0 & 0,6 & 0,3\\ C & 0 & 0,6 & 0,3 \end{array}$$

а б в

$$\hat{\tilde{R}} = \begin{bmatrix}0,2 & 1 & 0,4\\ 0 & 0,6 & 0,3\\ 0 & 1 & 0,3\end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix}0,2 & 0,6 & 0,3\\ 0 & 0,6 & 0,3\\ 0 & 0,6 & 0,3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,2 & 1 & 0,4\\ 0 & 0,6 & 0,3\\ 0 & 1 & 0,3\end{bmatrix}$$

г

Рис. 12.12.

Производя вычисления, аналогичные только что проделанным, мы видим, что

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R}.$$

Пример 3. Рассмотрим отношение $x\,\tilde{R}\,y$, где $x, y \in \mathrm{N}$ и

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = e^{-kxy}$$

при значениях k>1 и достаточно больших для того, чтобы эта функция принадлежности выражала отношение «обе величины, как *x,* так и *y*, довольно маленькие неотрицательные целые числа» (иначе можно сказать, что по крайней мере один из двух элементов упорядоченной пары (*x, y)* довольно мал). В качестве матричного представления этого отношения имеем

$$
\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & 1 & e^{-k} & e^{-2k} & e^{-3k} & e^{-4k} & e^{-5k} & \cdots \\
2 & 1 & e^{-2k} & e^{-4k} & e^{-6k} & e^{-8k} & e^{-10k} & \cdots \\
3 & 1 & e^{-3k} & e^{-6k} & e^{-9k} & e^{-12k} & e^{-15k} & \cdots \\
4 & 1 & e^{-4k} & e^{-8k} & e^{-12k} & e^{-16k} & e^{-20k} & \cdots \\
5 & 1 & e^{-5k} & e^{-10k} & e^{-15k} & e^{-20k} & e^{-25k} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Вычисления $\widetilde{R}^2$ дают матрицу

$$
\widetilde{\mathcal{R}}^2 = \begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Следовательно, поскольку вместо $\widetilde{R}^2 \subset \widetilde{R}$ мы получили $\widetilde{R}^2 \supset \widetilde{R}$, то это нечеткое отношение нетранзитивно.

Аналогично легко показать, что этот вывод остается в силе, если $x, y \in \mathrm{R}^{+}$, а не только N.

Как говорилось в предыдущем пункте, мы вернемся к этому вопросу позднее, где рассмотрим случай, когда P не является конечным.

Пример 4. Вернемся к случаю, когда отношение $\tilde{R} \subset P \times P$ и P — конечное множество, чтобы уяснить, что не всегда выполняется выражение (12.11). На этом примере будет продемонстрировано интересное явление.

На рис. 12.13 представлено отношения $\tilde{R}$ и последовательное вычисленные $\tilde{R}^2$, $\tilde{R}^3$ ...

$\tilde{R}$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,2
B	1	0,2	0,7
C	0	0,8	0,1

$\tilde{R}^2$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,2
C	0,8	0,2	0,7

$\tilde{R}^3$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,2

$\tilde{R}^4$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

$\tilde{R}^5$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,3

$\tilde{R}^6$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

$\tilde{R}^7$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,3

$\tilde{R}^8$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

$\tilde{R}^9$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,3

$\tilde{R}^{10}$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

....

$\hat{\tilde{R}}$	A	B	C
A	0,6	0,6	0,6
B	1	0,7	0,7
C	0,8	0,8	0,7

Рис. 12.13.

Заметим, что последовательность вычислений не сходится: не существует фиксированного k, после которого $\tilde{R}^{k+1} = \tilde{R}^{k}$.

Согласно (12.14) мы знаем, что можно остановиться при $k = 3$. А уже после этого $\hat{\tilde{R}}$ получить легко.

Однако если внимательно рассмотреть все полученные отношения, то видно, что при $k > 3$ мы имеем

$$\tilde{R}^4 = \tilde{R}^6 = \ldots = \tilde{R}^{2\nu} = \tilde{R}^{2\nu+2} = \ldots = \tilde{R}_p ,$$

$$\tilde{R}^5 = \tilde{R}^7 = \ldots = \tilde{R}^{2\nu+1} = \tilde{R}^{2\nu+3} = \ldots = \tilde{R}_i .$$

Таким образом, здесь появляется поле для изучения циклических нечетких отношений. Изучение «циклических нечетких отношений» ограничим замечанием, и рекомендуем исследовать их тем читателям, которые заинтересуются ими.

Замечание. Возникает следующий вопрос: всегда ли композиция $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ и(или) $\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$ двух транзитивных отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ дает транзитивное отношение. Как показывают следующие примеры, это не всегда так.

Пример 5. Пусть $\tilde{R}_1$ — отношения, которое приведено в (12.16). Проверяя свойство $\tilde{R}_1^{\,2} \subset \tilde{R}_1$ можно убедиться, что это отношение действительное транзитивно:

$$\begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_1 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ B & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ E & 0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_1 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ B & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ E & 0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_1^2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ B & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ E & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} \qquad (12.16)$$

Пусть $\tilde{R}_2$ — отношение, которое задано (12.17). Проверяя свойство $\tilde{R}_2^{\,2} \subset \tilde{R}_2$, убеждаемся, что это отношение также транзитивно:

$$\begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ E & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ E & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_2^2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ E & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \end{array} \qquad (12.17)$$

Теперь подсчитаем $\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$

$\tilde{R}_1$	A	B	C	D	E
A	0,5	0,9	0	0	0,5
B	0	0,7	0	0	0
C	0	1	0,1	0,1	0
D	0	1	0,4	1	0
E	0,7	0,9	0	0	0,5

$\circ$

$\tilde{R}_2$	A	B	C	D	E
A	0,7	0	0	0	0
B	0,8	1	0,5	0,6	1
C	0	0	0,5	0,5	0
D	0	0	0,2	0,4	0
E	0,8	1	0,6	0,6	1

$=$

$\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	1	0,6	0,6	1
D	0,8	1	0,6	0,6	1
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

и $(\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1)^2$

$\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	1	0,6	0,6	1
D	0,8	1	0,6	0,6	1
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

$\circ$

$\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	1	0,6	0,6	1
D	0,8	1	0,6	0,6	1
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

$=$

$(\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1)^2$	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	0,9	0,6	0,6	0,8
D	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

Включение $(\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1)^2 \subset \tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$ очевидно, удовлетворяется.

Теперь подсчитаем $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$

$\tilde{R}_2$	A	B	C	D	E
A	0,7	0	0	0	0
B	0,8	1	0,6	0,6	1
C	0	0	0,5	0,5	0
D	0	0	0,2	0,4	0
E	0,8	1	0,6	0,6	1

$\circ$

$\tilde{R}_1$	A	B	C	D	E
A	0,5	0,9	0	0	0,5
B	0	0,7	0	0	0
C	0	1	0,1	0,1	0
D	0	1	0,4	1	0
E	0,7	0,9	0	0	0,5

$=$

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$	A	B	C	D	E
A	0,5	0,7	0	0	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0	0,5	0,4	0,5	0
D	0	0,4	0,4	0,4	0
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

и $(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2)^2$

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$	A	B	C	D	E
A	0,5	0,7	0	0	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0	0,5	0,4	0,5	0
D	0	0,4	0,4	0,4	0
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

$\circ$

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$	A	B	C	D	E
A	0,5	0,7	0	0	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0	0,5	0,4	0,5	0
D	0	0,4	0,4	0,4	0
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

$=$

$(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2)^2$	A	B	C	D	E
A	0,7	0,7	0,4	0,6	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0,5	0,5	0,4	0,5	0,5
D	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

Мы видим, что включение ($\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ $)^2 \subset \tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ не выполняется и, итак, $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ нетранзитивно.

Таким образом, композиция двух транзитивных отношений не всегда дает транзитивное отношение.

12.4. Нечеткие отношения предпорядка

Нечетким отношением предпорядка называется бинарное нечеткое отношение, обладающее свойствами транзитивности и рефлексивности.

Сначала рассмотрим теорему.

Теорема 1. Если $\tilde{R}$ — транзитивно и рефлексивно (т.е. предпорядок), то

$$\tilde{R}^k = \tilde{R}\ ,\ k = 1,2,3,...$$

Доказательство. Достаточно обратиться к определению транзитивности (12.3) и выражению $\tilde{R} \circ \tilde{R} \subset \tilde{R}$ и показать, что если

$$\forall\, x\colon\ \mu_{\tilde{R}}\,(x,x)=1,$$

то

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R}\ .$$

Поскольку

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R} \circ \tilde{R}\,,$$

то согласно (11.6) имеем

$$\mu_{\tilde{R}^2}\,(x,z)=\bigvee_y\ [\ \mu_{\tilde{R}}\,(x,y)\ \wedge\ \mu_{\tilde{R}}\,(y,z)]. \qquad (12.18)$$

Правая часть (12.18) содержит два равных члена

$$\mu_{\tilde{R}}\,(x,x)\ \wedge\ \mu_{\tilde{R}}\,(x,z)=\mu_{\tilde{R}}\ (x,z)\ \wedge\ \mu_{\tilde{R}}\,(z,z)=\mu_{\tilde{R}}\ (x,z),$$

поскольку в силу рефлексивности

$$\mu_{\tilde{R}}\,(x,x)=\ \mu_{\tilde{R}}\,(z,z)=1.$$

Напомним, что $\tilde{R}$ -*транзитивное* отношение, т.е.

$$\mu_{\tilde{R}}\,(x,z)\geq\bigvee_y\,[\ \mu_{\tilde{R}}\,(x,y)\ \wedge\ \mu_{\tilde{R}}\,(y,z)],$$

и потому $\mu_{\tilde{R}}\,(y,z)$ не меньше, чем $\mu_{\tilde{R}}\,(x,y)\ \wedge\ \mu_{\tilde{R}}\,(y,z)$.

Следовательно, $\mu_{\tilde{R}}\,(x,z)$ — значение правой части (12.18), и мы действительно имеем

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R}\ . \qquad (12.19)$$

Теорема 2. Если $\tilde{R}$ — предпорядок, то

$$\tilde{R} = \tilde{R}^2 = \ldots = \tilde{R}^k = \hat{\tilde{R}}\ . \qquad (12.20)$$

Доказательство. Это следствие из теоремы 1. Достаточно рассмотреть (12. 9) и (12.19) вместе.

Пример 1. На рис. 1.14 изображен предпорядок

$$P = \{A, B, C, D, E\}.$$

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,7	0,8	0,5	0,5
B	0	1	0,3	0	0,2
C	0	0,7	1	0	0,2
D	0,6	1	0,9	1	0,6
E	0	0	0	0	1

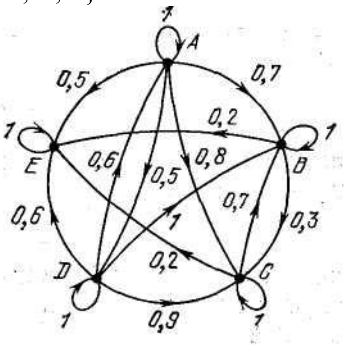


Рис. 12.14.

Его транзитивность можно проверить с помощью соотношения

$$\tilde{R}^2 \subset \tilde{R}\ .$$

Рефлексивность непосредственно следует из существования единиц на главной диагонали.

Наконец, можно проверить, что действительно

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R}\ .$$

Пример 3. Нечеткое бинарное отношение $x\tilde{R}\ y$, где $x,\ y\ \in N$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = e^{-k(x-y)^2}\ , \quad k>1,$$

не предпорядок, так как оно нетранзитивно.

Пример 4 (рис. 12.15).

$$0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots \le 1.$$

$\tilde{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...
x_1	1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	...
x_2	0	1	a_2	a_2	a_2	a_2	...
x_3	0	a_1	1	a_3	a_3	a_3	...
x_4	0	a_1	a_2	1	a_4	a_4	...
x_5	0	a_1	a_2	a_3	1	a_5	...
x_6	0	a_1	a_2	a_3	a_4	1	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.15.

Это отношение на счетном бесконечном множестве *P* есть предпорядок.

Нечеткий полупредпорядок. Транзитивное нечеткое отношение, которое не владеет свойствами рефлексивности, называется *полупредпорядком,* или, что то же самое, *нерефлексивным нечетким предпорядком.*

Пример 1. Отношения, которое представлено на рис. 12.16, транзитивно, но не рефлексивно; это отношение — полупредпорядок.

$\tilde{R}$	A	B	C
A	0,2	1	0,4
B	0	0,6	0,3
C	0	1	0,3

Рис. 12.16.

Пример 2. Отношение на рис. 12.7 есть полупредпорядок.

Антирефлексивный нечеткий предпорядок. Частным случаем нечеткого полупредпорядка есть отношение, у которого

$$\forall\, x \in P:\ \ \mu_{\tilde{R}}\,(x,x) == 0.$$

В этом случае говорят, что нечеткий предпорядок *антирефлексивный.* Таким образом, отношение предпорядка на рис. 12.17 антирефлексивно.

$\tilde{R}$	A	B	C
A	0	[illegible]	0,4
B	0	0	0
C	0	1	0

Рис. 12.17.

12.5. Отношение подобия

Отношение подобия, или *нечетким отношением эквивалентности,* называется нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами:

1) транзитивности ;
2) рефлексивности;
3) симметричности.

Очевидно, что это предпорядок.

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим отношение, которое представлено на рис. 12.18.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,8	0,7	1	0,9
B	0,8	1	0,7	0,8	0,8
C	0,7	0,7	1	0,7	0,7
D	1	0,8	0,7	1	0,9
E	0,9	0,8	0,7	0,9	1

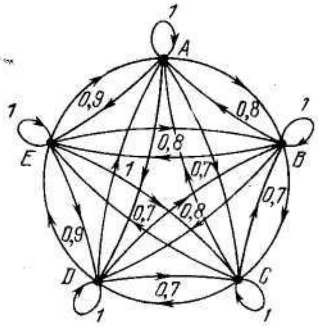


Рис. 12.18.

Можно непосредственно убедиться, что оно рефлексивно и симметрично. Для проверки транзитивности достаточно подсчитать $\tilde{R}^2$.

Тогда согласно (12.20) должны иметь

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R}.$$

Пример 2 (рис. 12.19). Если положить $0 \le a \le 1$, то имеем отношение подобия.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	a	a	a	a
B	a	1	a	a	a
C	a	a	1	a	a
D	a	a	a	1	a
E	a	a	a	a	1

Рис. 12.19.

Пример 3 (рис. 12.20). Если положить

$$0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots \le 1.$$

то это отношение подобия, которое определено на бесконечном множестве *P*.

$\tilde{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	…
x_1	1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	…
x_2	a_1	1	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	…
x_3	a_1	a_2	1	a_3	a_3	a_3	a_3	…
x_4	a_1	a_2	a_3	1	a_4	a_4	a_4	…
x_5	a_1	a_2	a_3	a_4	1	a_5	a_5	…
x_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	1	a_6	…
x_7	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.20.

Пример 4. Нечеткое отношение $x\tilde{R}y$, где $x,y \in \mathrm{R}^+$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = e^{-k(y+1)}, \qquad y<x, \quad k>1;$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)= 1, \qquad y = x,$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)= e^{-k(x+1)}, \qquad y>x, \quad k>1,$$

есть отношение подобия.

Теорема 1. Пусть $\tilde{R} \subset P\times P$ — отношение подобия. Пусть также x, y, z — три элемента множества P. Положим

$$\left.\begin{aligned} c &= \mu_{\tilde{R}}(x,z) = \mu_{\tilde{R}}(z,x), \\ a &= \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x), \\ b &= \mu_{\tilde{R}}(y,z) = \mu_{\tilde{R}}(z,y). \end{aligned}\right\}$$

Тогда

$$c\geq a= b, \text{ или } a \geq b = c, \text{ или } b \geq c = a.$$

Другими словами, из этих трех величин a, b и c по крайней мере две величины равны друг другу, а третья больше двух остальных.

Доказательство. Итак, по нашей гипотезе имеем

$$c\geq a \wedge b, \tag{12.21}$$

$$b \geq c \wedge a. \tag{12.22}$$

$$a \geq b \wedge c. \tag{12.23}$$

Предположим, что

$$c \geq b > a, \tag{12.24}$$

тогда соотношение (12.21) и (12.22) удовлетворяются, а (12.23) — нет, и если положить $b=a$, то уже удовлетворяются все три соотношения. Предположим, что

$$c\geq a>b. \tag{12.25}$$

Тогда (12.21) и (12.23) удовлетворяются, а (12.22) - нет, и если положить $a = b$, то удовлетворяются все три соотношения.

Дальше, если ни (12.24), ни (12.25) не выполняются, то выполняется соотношение

$$c\geq a=b.$$

Аналогично можно показать, что не может быть ни $a \geq b>c$, ни $a\geq c>b$. Однако справедливо соотношение

$$a\geq b = c.$$

Аналогично можно показать, что не может иметь место ни $b\geq c>a$, ни $b\geq a>c$, однако справедливо соотношение

$$b\geq a = c.$$

Таким образом, необходимо, чтобы всегда по крайней мере две из этих величин были равны.

Теперь неравенства (12.21)—(12.23) дают нам:

если $a=b$,

$$c \geq a \wedge b,$$
$$b = c \wedge a,$$
$$a = b \wedge c;$$

если $b = c$,

$$c = a \wedge b,$$
$$b = c \wedge a,$$
$$a \geq b \wedge c;$$

если $c = a$,

$$c = \geq a \wedge b,$$
$$b \geq c \wedge a,$$
$$a = b \wedge c.$$

12.6. Подотношение подобия в нечетком предпорядке

Пусть $\tilde{R} \subset P \subset P$ — отношение нечеткого предпорядка. Если существует обычное подмножество $P_1 \subset P$, такое, что

$$\forall\, x, y \in P_1: \ \mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = \mu_{\tilde{R}}\ (y, x),$$

то элементы множества P_1 находятся между собой в отношении подобия, которое мы будем называть *подотношение подобия* в предпорядке $\tilde{R}$.

Будем говорить, что подотношение подобия *максимально,* если в рассмотренном отношении не существует другого отношения подобия той же природы.

Предположим теперь, что отношение предпорядка таково, что каждый из элементов подмножества универсального множества принадлежит максимальному подотношению подобия и не принадлежит никакому другому. Это можно перефразировать следующим образом: все максимальные подотношения подобия не пересекаются. В этом случае подмножества, на которых определены такие непересекающиеся максимальные подотношения подобия, будем называть *классами подобия* предпорядка.

Однако не все нечеткие предпорядки можно разложить на классы подобия. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. На рис. 12.21 представлено отношение предпорядка.

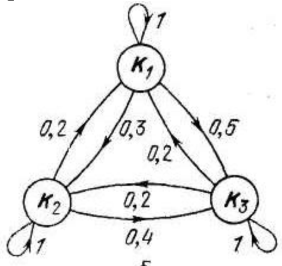
$\underset{\sim}{R}$	A	B	C	E	F	D	G
A	1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,4
B	0,2	1	0,5	0,2	0,2	0,3	0,5
C	0,2	0,5	1	0,2	0,2	0,3	0,5
E	0,2	0,2	0,2	1	0,8	0,3	0,5
F	0,2	0,2	0,2	0,8	1	0,3	0,5
D	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	1	0,4
G	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	1

Рис. 12.21.

Этот передпорядок не является симметричным отношением. Однако заметим, что отношение $\tilde{R}$ можно разложить на три подотношения: $\tilde{R}_1$, определенное на подмножестве {A, B, C, E, F}, $\tilde{R}_2$ — на {D} и $\tilde{R}_3$— на {G}. Очевидно, что обычные подмножества K_1 ={A, B, C, E, F}, K_2= {D}, K_3 = {G} - максимальны по отношению к свойству подобия (чего нельзя сказать, например, о {B, C, F} или {A, C, E}). Мы скажем, что отношение $\tilde{R}$ нечеткого предпорядка разложимо относительно K_1, K_2 и K_3 на максимальные непересекающиеся подотношения подобия, образующие классы подобия в предупорядоченном множестве. Если мы теперь рассмотрим сильнейшие пути, которые существуют между этими классами, то увидим (рис. 12.22), что эти классы сами образуют транзитивное несимметричное нечеткое отношение, которое, как будет показано дальше, есть отношение нечеткого порядка.

$\underset{\sim}{R}'$	K_1	K_2	K_3
K_1	1	0,3	0,5
K_2	0,2	1	0,4
K_3	0,2	0,2	1

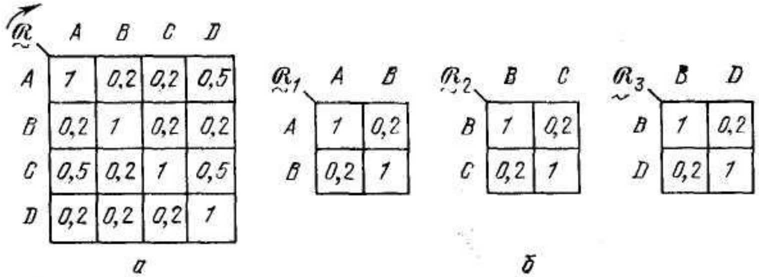
а



б

Рис. 12.22.

Пример 2. На рис. 12.23,*а* представленно нечеткое отношение предпорядка.



$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0,2	0,2	0,5
B	0,2	1	0,2	0,2
C	0,5	0,2	1	0,5
D	0,2	0,2	0,2	1

а

$\tilde{R}_1$	A	B
A	1	0,2
B	0,2	1

$\tilde{R}_2$	B	C
B	1	0,2
C	0,2	1

$\tilde{R}_3$	B	D
B	1	0,2
D	0,2	1

б

Рис. 12.23.

Можно найти три подотношения подобия $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ и $\tilde{R}_3$ (рис. 12.23, *б),* и хотя они максимальные, но пересекаются, и, следовательно, данные подотношения не определяют классов подобия.

Приводимий нечеткий предпорядок. Нечеткий предпорядок, который раскладывается на классы подобия, будет называться *приводимым нечетким предпорядком.* Например, нечеткий предпорядок на рис. 12.21 — приводимый, а на рис. 12.23, *а* - неприводимый.

В приведенных выше примерах рассматривались конечные множества *P*, но разложение на классы подобия, такие, как были только что описанны, имеет место и в случае, когда *P* — бесконечное множество, счетное или нет. В этом случае как сами классы, так и их число могут быть конечными или бесконечными. Однако представление отношений с помощью матриц или графов Бержа могут использоваться только в тех случаях, когда *P* — счетное множество.

Поиск максимальных [подотношений] подобия предпорядка (*P конечное).* В некоторых простых случаях, рассматривая пары элементов, которые обладают свойством симметрии, сразу получают максимальные подотношения подобия, которые могут быть как пересекающимися, так и ни. Однако всегда желательно иметь общую процедуру.

12.7. Антисимметрия

Нечеткое бинарное отношение называется *антисимметричным,* если

$$\forall\ (x,y) \in P \times P \text{ при } x \neq y:$$

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y) \neq \mu_{\tilde{R}}\ (y,x) \quad \text{или} \quad \mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = \mu_{\tilde{R}}\ (y,x) = 0.$$

Пример 1. На рис. 12.24 — 12.26 приведено несколько примеров антисимметричных нечетких бинарных отношений.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,3	0	0,9	1
B	0,5	0,8	0,6	0,8	0
C	0	0,5	1	0	1
D	0,5	1	0,2	1	0,3
E	0	0	0	0,2	0

Рис. 12.24.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	0	0	0	0,8
B	0	0	0,6	0
C	1	0,2	0,3	1
D	1	0	0	1

Рис. 12.25.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E	F
A	0	0,3	0	0,2	0	0,8
B	0	1	1	0,8	0	0,5
C	0	0	0,3	0	0	0,6
D	0	0	0	0	0	0
E	0	0,3	0	0,2	0,5	0,5
F	0,7	0	0	0	0	0,1

Рис. 12.26.

Для отношения на рис. 12.24 имеем

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, B)< $\mu_{\tilde{R}}$ (B, A),

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, C) = $\mu_{\tilde{R}}$ (C, A)=0,

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, D)> $\mu_{\tilde{R}}$ (D, A),

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, E)> $\mu_{\tilde{R}}$ (E, A)

и т.д.

Пример 2. Пусть $x\tilde{R}y$, где $x,\ y \in$ R$^+$. Тогда отношения $\tilde{R}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = e^{-(ax+by)}, \quad a>b>1,$$

антисимметрично.

Совершенная антисимметрия. Л. А. Загде определяет антисимметрию более строго, чем в данной работе, имея при этом в виду некоторые свойства; в данном определении будем называть это *совершенной антисимметрией.* Совершенным антисимметричным отношением называется такое отношение (Л. А. Загде дает другое определение: ($\mu_{\tilde{R}}$ $(x,y)>0$ и $\mu_{\tilde{R}}$ $(y,x)>0) \Longrightarrow (x=y)$), что $\forall$ $(x, y) \in P\times P$ и $x\neq y$:

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y)>0 \Longrightarrow \mu_{\tilde{R}}\ (y,x) = 0.$$

Позднее, при обсуждении понятия совершенного порядка, мы возвратимся к исследованию нескольких свойств совершенной антисимметрии.

Замечание. Любое совершенное антисимметричное отношение будет и антисимметричным отношением.

Пример 1. На рис. 12.27 представлено совершенное антисимметричное отношение.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E	F
A	0	0,8	0,4	0,6	0	0
B	0	0,3	0	0,6	0	0,7
C	0	0,3	1	0,2	1	0,6
D	0	0	0	0,8	0	0,3
E	0	0,5	0	0	0	1
F	0,7	0	0	0	0	1

Рис. 12.27.

Пример 2. Рассмотрим две области D_1 и D_2 в $R^+\times R^+$, которые показаны на рис. 12.28.

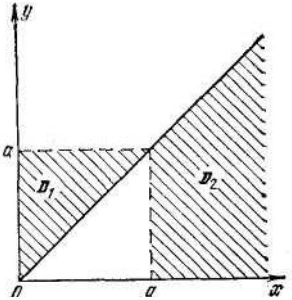


Рис. 12.28.

Отношение $x\,\tilde{R}\,y$, определенное на R^+ функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} \mu_1(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in D_1, \\ \mu_2(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in D_2, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin D_1 \bigcup D_2. \end{cases}$$

есть антисимметричное отношение.

12.8. Нечеткие отношения порядка

Нечетким отношением порядка называется бинарное отношение, которое:

1) рефлексивно;
2) транзитивно ;
3) антисимметрично

(будем также говорить простое *отношение порядка,* если это не приводит к недоразумению).

Можно также дать следующее определение: антисимметричное (следовательно приводиме отношение и такое, что каждый класс подобия содержит только один элемент) нечеткое отношение предпорядка называется нечетким отношением порядка.

Пример 1. На рис. 5.60 и 5.61 представлены нечеткие отношения порядка.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0,8	0	0
B	0,2	1	0	0
C	0,3	0,4	1	0,1
D	0	0	0	1

Рис. 12.29.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0,8	0	0
B	0,2	1	0	0
C	0,3	0,4	1	0,1
D	0	0	0	1

Рис. 12.30.

Можно проверить, что они действительно рефлексивны, транзитивны и антисимметричны.

Пример 2. Отношение, которое определено в (12.18) и представленное на рис. 12.15, есть нечеткое отношение порядка.

Пример 3. Отношение $x\,\tilde{R}\,y$, где $x,\ y \in\ N$ (рис. 12.31), есть нечеткое отношение порядка.

$\tilde{R}$	0	1	2	3	4	5	
0	1	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	...
1	0	1	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}	...
2	0	0	1	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}	...
3	0	0	0	1	e^{-7}	e^{-8}	...
4	0	0	0	0	1	e^{-9}	...
5	0	0	0	0	0	1	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Рис. 12.31.

Антисимметричные отношения, которые называют *порядками* и которые обозначаются буквой *P*, в зависимости от выполнения условия рефлексивности или антирефлексивности разделяют на *нестрогие* и *строгие* порядки. Мы здесь для определенности будем рассматривать лишь *строгие,* т.е. антирефлексивные, *порядки.* Свойства *нестрогих* (рефлексивных) *порядков* во многом совпадают со свойствами строгих порядков.

Теорема 1. Каждое нечеткое отношение строгого порядка индуцирует порядок (в смысле теории множеств) на своем универсуме посредством отношения

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) \geq \mu_{\tilde{R}}(y,x),$$

Этот порядок будем обозначать $y \tilde{>} x$.

Различные порядки отличаются друг от друга требованиями, предъявляемыми к условию транзитивности. Как правило, эти требования выражают разумность, рациональность, согласованность отношения упорядочения, заданного в множестве *X*. Слабейшее из этих требований — условие ацикличности отношения строгого порядка $\tilde{P}$, и наиболее жесткие требования — это условие линейной транзитивности и условие квазисерийности.

Если для отношений сходства условие транзитивности обычно записывается в виде $S \supseteq S \circ S$, и различные способы определения операции композиции позволяют задавать разные типы транзитивности, причем оказывается, что таких типов существует не так уж и много, то для отношений порядка условие транзитивности нечетких отношений удобно записывать в виде, аналогичном условию транзитивности обычных порядков:

$$\tilde{P}(x, y)>\mathbf{0},\ \tilde{P}(y, z)>\mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z) \geq \tilde{P}(x, y) * \tilde{P}(y, z), \qquad (12.26)$$

где $*$ — некоторая операция в L. Оказывается, что из множества всех отношений порядка можно выделить значительное количество отличающихся друг от друга классов порядков специального вида, определяемых как способом задачи операции $*$ в L, так и способом записи условия транзитивности, подобного условию (12.26). Ниже перечисляются некоторые условия транзитивности, которые определяют эти классы нечетких строгих порядков. Учитывая ассиметричность отношения строгого порядка $\tilde{P}$, будем писать $\tilde{P}(x, y) \geq \mathbf{0}$, если $\tilde{P}(y, x) = \mathbf{0}$.

Ацикличность:

$$\forall x_0, x_2, \ldots, x_n \in X:\ \tilde{P}(x_0, x_1)>\mathbf{0},\ \tilde{P}(x_1, x_2)>\mathbf{0}, \ldots$$
$$\ldots,\ \tilde{P}(x_{n-1}, x_n) > 0 \Rightarrow \tilde{P}(x_0, x_n) \geq \mathbf{0}.$$

Слабая транзитивность:

$$\tilde{P}(x, y)>\mathbf{0},\quad \tilde{P}(y, z)>\mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z)>\mathbf{0}. \qquad (12.27)$$

Отрицательная транзитивность:

$$\tilde{P}(x,y) \geq \mathbf{0},\quad \tilde{P}(y,z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x,z) \geq \mathbf{0}.$$

($\bullet$)-*транзитивность* (L = [0, 1]):

$$\tilde{P}(x,y)>\mathbf{0},\ \tilde{P}(y, z)>\mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z) \geq \tilde{P}(x, y) \bullet \tilde{P}(y, z). \qquad (12.28)$$

($\wedge$)- *транзитивность:*

$$\tilde{P}(x, y) > \mathbf{0},\quad \tilde{P}(y, z)> \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z) \geq \tilde{P}(x, y) \wedge \tilde{P}(y, z). \qquad (12.29)$$

(1/2, +)-*транзитивность* (L = [0,M]):

$$\tilde{P}(x, y)> \mathbf{0},\ \tilde{P}(y, z)> \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z) \geq (\tilde{P}(x, y) + \tilde{P}(y, z))/2.$$

Сильная транзитивность;

$$\tilde{P}(x, y) \geq \mathbf{0},\ \tilde{P}(y, z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z) \geq \tilde{P}(x, y) \vee \tilde{P}(y, z). \qquad (12.30)$$

Сверхсильная транзитивность: условие (12.30) вместе с условием:

$$\tilde{P}(x, y)> \mathbf{0},\quad \tilde{P}(y, z)> \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z)> \tilde{P}(x, y) \vee \tilde{P}(y, z).$$

Метрическая транзитивность (L = [0, M]):

$$\tilde{P}(x,y) \geq \mathbf{0}, \tilde{P}(y,z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x,y) + \tilde{P}(y,z) \geq \tilde{P}(x,z) \geq \tilde{P}(x,y) \vee \tilde{P}(y,z). \qquad (12.31)$$

Квазисерийность:

$$\tilde{P}(x,y) \geq \mathbf{0},\quad \tilde{P}(y,z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x,z) = \tilde{P}(x,y) \vee \tilde{P}(y,z). \qquad (12.32)$$

Линейная транзитивность (L = [0, M]):

$$\widetilde{P}(x, y) \geq \mathbf{0},\ \widetilde{P}(y, z) \geq \mathbf{0} \Longrightarrow \widetilde{P}(x, z) = \widetilde{P}(x, y) + \widetilde{P}(y, z). \quad (12.33)$$

Ультраметрическая транзитивность:

$$\widetilde{P}(x,y) > \mathbf{0}, \widetilde{P}(y,z) > \mathbf{0} \Longrightarrow \widetilde{P}(x,y) \vee \widetilde{P}(y,z) \geq \widetilde{P}(x,z) \geq \widetilde{P}(x,y) \wedge \widetilde{P}(y,z). \quad (12.34)$$

В общем случае предполагается, что рассмотренные условия транзитивности определенны для линейно упорядоченного L, хотя некоторые условия могут быть обобщенны и на случай, когда L является решеткой. Условия, при определении которых принимают участие операции сложения и умножение, используются, когда L является интервалом вещественных чисел.

Рассмотренные условия транзитивности могут использоваться как при построении моделей рациональности нечетких предпочтений в нормативной теории выбора, так и при формировании некоторой правильной структуры системы, информация о которой может быть представлена в виде нечеткого отношения порядка.

Условия ацикличности, слабой транзитивности и отрицательной транзитивности равносильны условию ацикличности, транзитивности и отрицательной транзитивности, соответственно, обыкновенного отношения $\widetilde{P}_0$, определяемого следующим образом:

$$\widetilde{P}_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x, y) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогичные свойства могут быть определены как α-свойства для разных α-уровней $\widetilde{P}_\alpha$ $(\alpha \in L)$ отношения $\widetilde{P}$.

В отличие от первых трех свойств другие свойства более специфны для нечетких отношений и в большей мере учитывают согласованность силы отношения между элементами множества X. Для этих свойств также могут быть сформулированы α-свойства заменой в левых частях этих свойств на $\alpha \in L$.

Условие (12.29) для антисимметричных отношений порядка совпадает со свойством транзитивности. Условие (12.30) представляется наиболее естественным условием согласованности при интерпретации отношения порядка как отношения, учитываютщего силу предпочтения в парных сравнениях альтернатив. Частичным случаем *сильного порядка* (порядка, который удовлетворяет условию сильной транзитивности (12.30)) является *метрический порядок* (условие (12.31)). Условие (12.31) эквивалентно для асимметричных отношений неравенству треугольника:

$$\widetilde{P}(x,z) \leq \widetilde{P}(x,y) + \widetilde{P}(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X.$$

Условие (12.32) определяет нечеткую квазисерию. Каждый α-уровень нечеткой квазисерии является обыкновенной квазисерией, т.е. удовлетворяет условиям:

$$x\tilde{P}_\alpha y, \quad y\tilde{P}_\alpha z \Rightarrow x\tilde{P}_\alpha z,$$
$$x\tilde{P}_\alpha y, \neg(z\tilde{P}_\alpha y) \Rightarrow x\tilde{P}_\alpha z; \; \neg(y\tilde{P}_\alpha x), y\tilde{P}_\alpha (z) \Rightarrow x\tilde{P}_\alpha z. \tag{12.35}$$

Поскольку обычная квазисерия определяет разбиение множества *X* на упорядоченные классы эквивалентности, нечеткая квазисерия определяет разбиение множества *X* на упорядоченные классы эквивалентности на каждом уровне $\alpha \in L$. Эти разбиения вложены друг в друга; таким образом, нечеткая квазисерия определяет иерархию разбиений множества *X* на упорядоченные классы эквивалентности (рис. 12.32).

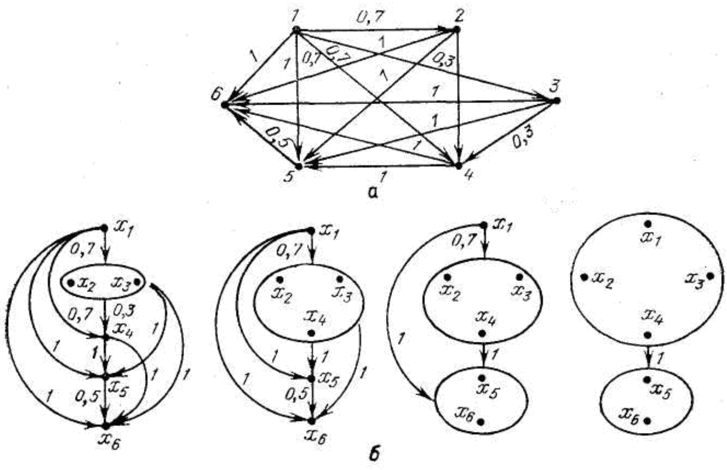


Рис. 12.32.

Нечеткая квазисерия $\tilde{P}$: *а* — граф отношения; *б* — система разбиений на упорядоченные классы по отношению $\tilde{P}$

Исходная матрица отношения $\tilde{P}$ приведена в табл. 12.1.

Таблица. 12.1.

P	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0,7	0,7	0,7	1	1
x_2	0	0	0	0,3	1	1
x_3	0	0	0	0,3	1	1
x_4	0	0	0	0	1	1
x_5	0	0	0	0	0	0,5
x_6	0	0	0	0	0	0

Частным случаем метрических порядков, кроме квазисерии, является *линейный порядок,* определяемый условием (5.33).

Линейный порядок при интерпретации $\tilde{P}(x, y)$ как силы предпочтения альтернативы x над альтернативой y задает на множестве альтернатив X некоторую аддитивную функцию полезности, которая может быть определена на X, например, с помощью соотношения

$$f(x) = \sup_{y \in X} \tilde{P}(x, y).$$

Ультраметрическая транзитивность построена по аналогии с метрической транзитивностью (12.31), однако условие (12.34) не эквивалентно для антисимметричных отношений ультраметрическому неравенству:

$$\tilde{P}(x,z) \leq \tilde{P}(x,y) \vee \tilde{P}(y, z) \qquad \forall x, y, z \in X. \tag{12.36}$$

Условие (12.36) эквивалентно для асимметричных отношений условию квазисерийности (12.32).

Между строгими порядками (асимметричными отношениями) и слабыми порядками (рефлексивными отношениями) существует тесная связь. Эти порядки могут быть получены друг из друга с помощью ряда преобразований.

Если на L задана операция дополнения, т.е. такая унарная операция ', что на L выполняются тождества

$$(a')' = a, \quad (a \vee b) = a' \wedge b', \quad (a \wedge b)' = a' \vee b',$$

то на множестве нечетких отношений может быть задана операция дополнения, которая обозначается черточкой сверху, с помощью соотношения

$$\overline{\tilde{R}}(x,y) = (\tilde{R}(x,y))' \quad \forall x,y \in X,$$

и на множестве нечетких отношений $F(X \times X)$ будут выполняться тождества

$$\overline{\overline{\tilde{R}}} = \tilde{R}, \qquad (12.37)$$

$$\overline{\tilde{R} \bigcup \tilde{T}} = \overline{\tilde{R}} \bigcap \overline{\tilde{T}}, \quad \overline{\tilde{R} \bigcap \tilde{T}} = \overline{\tilde{R}} \bigcup \overline{\tilde{T}}. \qquad (12.37)$$

Дистрибутивная решетка, на которой задана операция дополнения, которая удовлетворяет тождествам (12.37) и (12.38), называется решеткой Де Моргана.

Например, если L=[0, M], то операция дополнения может быть определена как

$$a' = M - a \quad \forall\, a \in L.$$

Если L является конечной цепью, т.е. элементы L могут быть линейно упорядочены: $l_0 \le l_1 \le \ldots \le l_m$, тогда операция дополнения ' на L может быть определена как

$$l'_i = l_{m-1} \quad i = 0, 1, \ldots, m...$$

Если на F задана операция дополнения, то из отношения строгого порядка $\tilde{P}$ могут быть получены

отношение сходства

$$\tilde{S} = \overline{\tilde{P} \bigcup \tilde{P}^{-1}}; \qquad (12.39)$$

отношение различия

$$\tilde{D} = \tilde{P} \bigcup \tilde{P}^{-1} \qquad (12.40)$$

отношение слабого порядка

$$\tilde{R} = \overline{\tilde{P}}^{-1}. \qquad (12.41)$$

Отношение (12.41) удовлетворяет условию полноты:

$$\tilde{R}\ (x,y) \vee \tilde{R}\ (y,x) = \mathbf{I} \quad \forall\, x,y \in X. \qquad (12.42)$$

Таким образом, если на X задано нечеткое отношение строгого порядка, то с его помощью могут быть построены на X нечеткие отношения сходства (различия) и слабого порядка. Транзитивность отношения $\tilde{P}$ определяет тот или диной уровень транзитивности отношений $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$. В частности, если $\tilde{P}$ является нечеткой квазисерией, то определяемое им $\tilde{S}$ является нечетким отношением эквивалентности, а отношение $\tilde{R}$ будет нечетким квазипорядком, т.е. рефлексивным и транзитивным .

Из (12.37) и (12.38) видно, что соотношение (12.41) может использоваться для получения из полного (12.42) отношения слабого порядка

отношения строгого порядка

$$\tilde{P} = \overline{\tilde{R}}^{-1} \qquad (12.43)$$

отношение сходства

$$\tilde{S} = \tilde{R} \bigcup \tilde{R}^{-1} \qquad (12.44)$$

отношения различия

$$\tilde{D} = \overline{\tilde{R} \bigcap \tilde{R}^{-1}}.$$

Если отношение слабого порядка не является полным, то соотношение (12.44) также будет определять некоторое отношение сходства, однако (12.43) уже не будет определять строгого порядка.

Такой порядок может быть получен из $\tilde{R}$ при L= [0, M] с помощью соотношения

$$\tilde{P} = \tilde{R} \setminus \tilde{R}^{-1}, \qquad (12.45)$$

где операция \ определяется следующим образом:

$$(\tilde{R} \setminus \tilde{R}^{-1})(xy) = \begin{cases} \tilde{R}_1(x,y) - \tilde{R}_2(x,y), & \text{если } \tilde{R}_1(x,y) \geq \tilde{R}_2(x,y), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

При транзитивном $\tilde{R}$ соотношение (12.45) определяет транзитивное (12.29) $\tilde{P}$.

Кроме рассмотренных типов нечетких отношений порядка и слабого порядка, в теории информации используются следующие отношения предпочтения. При L=[0, 1] отношение $\tilde{R}$ называется (+)-полным, если

$$\tilde{R}(x, y) + \tilde{R}(y, x) = 1 \quad \forall\, x,y \in X.$$

Для подобных отношений предпочтения, которые часто интерпретируются как вероятностные отношения предпочтения, рассматриваются условия стохастической транзитивности:

$$\tilde{R}(x, y) \geq 1/2,\ \ \tilde{R}(y, z) \geq 1/2 \Longrightarrow \tilde{R}(x, z) \geq 1/2, \qquad (12.46)$$

и сильной стохастической транзитивности:

$$\tilde{R}(x, y) \geq 1/2,\ \ \tilde{R}(y, z) \geq 1/2 \Longrightarrow \tilde{R}(x, z) \geq \tilde{R}(x, y) \vee \tilde{R}(y, z). \qquad (12.47)$$

Отношение строгого предпочтения, связанное с подобным отношением предпочтения, может быть определенно следующим образом:

$$\tilde{P}(x,y) = \begin{cases} \tilde{R}(x,y), & \text{если } \tilde{R}(x,y) \geq \tilde{R}(y,x), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (12.48)$$

Нетрудно найти связь между условиями (12.46), (12.47) и условиями отрицательной и сильной транзитивности строгих порядков.

При $L = [0, M]$ отношение $\tilde{R}$ называется (•)-полным, если

$$\tilde{R}(x, y) \bullet \tilde{R}(y, x) = 1.$$

Для подобных отношений предпочтение $\tilde{R}(x, y)$ обычно интерпретируется как «во сколько раз x лучше, чем y», и рассматривается обычно условие сверхтранзитивности

$$\tilde{R}(x, z) = \tilde{R}(x, y) \bullet \tilde{R}(y, z),$$

которое можно записать в виде:

$$\tilde{R}(x, y)>0,\ \tilde{R}(y, z)>0 \Rightarrow \tilde{R}(x, z) = \tilde{R}(x, y) \bullet \tilde{R}(y, z).$$

Отношение строгого порядка, которое связано с (•)-полными отношениями, можно определить также с помощью (12.48).

Нечеткие отношения порядка могут быть получены многими способами и допускать разную интерпретацию. $\tilde{P}(x, y)$ и $\tilde{R}(x, y)$ могут выражать или значение какого-нибудь физического параметра, который характеризует интенсивность доминирования x над y, или усредненную по множеству критериев или индивидумов силу предпочтения между объектами. Они могут быть получены с помощью шкалы сравнений, в которой эксперты измеряют интенсивность предпочтений при попарных сравнениях альтернатив, могут выражать уверенность, возможность, вероятность доминирования и т.д. Заметим, что возможные интерпретации и способы получения рассмотренных отношений значительно более шире тех, которые подразумеваются в названии «нечеткие отношения».

12.9. Отношения различия

Рассмотрим отношение подобия $\tilde{R}$, которое определено в п. 12.5. Для этого напомним здесь три свойства подобия:

1) $\forall\ (x,y),(y,z),(z,x) \in E\times E$:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq \bigvee_{y} [\mu_{\tilde{R}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y,z)] \text{ - транзитивность} \qquad (12.49)$$

2) $\forall\ (x, x) \in E\times E$: $\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$ — рефлексивность, (12.50)

3) $\forall\ (x,y) \in E\times E$: $\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$ - симметрия. (12.51)

Теперь с $\tilde{R}$ свяжем отношение $\overline{\tilde{R}}$, такое, что $\forall\ (x,y) \in E\times E$:

$$\mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x,y). \qquad (12.52)$$

Зная, что отношение $\tilde{R}$ обладает свойствами (12.49) — (12.52), можно определить и свойства отношения $\bar{\tilde{R}}$. Начнем со свойства (12.49).

Имеем:

$$1-\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [[1 - \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, y)] \wedge [1-\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y, z)]]. \qquad (12.53)$$

Но согласно теоремам Де Моргана для нечетких множеств, можно записать

$$[1-\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, y)] \wedge [1-\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y, z)] = 1-\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x,y) \vee \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y, z). \qquad (12.54)$$

Таким образом, (12.53) можно переписать в виде

$$1-\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [1 - (\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, y) \vee \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y, z))]$$

или

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, z) \leq \bigwedge_{y} [\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, y) \vee \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y, z))] \qquad (12.55)$$

Это свойство называется *(min —max)-транзитивностью* (ее можно также называть (min-max)-котранзитивностью).

В силу (12.50)

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, x)=1-\mu_{\tilde{R}}(x, x)=1-1=0$$

И, наконец, симметрия тоже сохраняется. Итак, мы имеем

1) $\forall$ $(x,y), (y, z), (x, z) \in E\times E$:

$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x,z) \leq \bigwedge_{y} [\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, y) \vee \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y, z)]$— (min-max)-транзитивность, (12.56)

2) $\forall$ $(x, x) \in E\times E$: $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, x) = 0$ — антирефлексивность, (12.57)

3) $\forall$ $(x,y) \in E\times E$: $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x,y) = \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(в, x)$ - симметрия. (12.58)

Нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами (12.56) — (12.58), называется *отношением различия*.

Пример 1. На рис. 12.33 представленно отношение различия (кроме того, отношение $\bar{\tilde{R}}$ совпадает с отношением подобия $\tilde{R}$ на рис. 12.18).

$\underset{\sim}{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,2	0,3	0	0,1
B	0,2	0	0,3	0,2	0,2
C	0,3	0,3	0	0,3	0,3
D	0	0,2	0,3	0	0,1
E	0,1	0,2	0,3	0,1	0

Рис. 12.33.

В качестве упражнения проверим (12.56) для нескольких пар элементов.

Дуга (А, В).

μ(A, A) $\vee$ μ (A, B) = 0 $\vee$ 0,2 = 0,2,

μ(A, B) $\vee$ μ (B, B) = 0,2 $\vee$ 0 = 0,2,

μ(A, C) $\vee$ μ (C, B) = 0,3 $\vee$ 0,3 = 0,3,

μ (A, D) $\vee$ μ (D, B) = 0 $\vee$ 0,2 = 0,2,

μ(A,E) $\vee$ μ(E, B) = 0,1 $\vee$ 0,2, = 0,2,

MIN [0,2; 0,2; 0,3; 0,2; 0,2] = 0,2,

μ (A, B) = 0,2 $\le$0,2.

Дуга (А, С).

μ (A, A) $\vee$ μ (A, C) = 0 $\vee$ 0,3 = 0,3,

μ (A, B) $\vee$ μ (B, C) = 0,2 $\vee$ 0,3 = 0,3,

μ (A, C) $\vee$ μ (C, C) = 0,3 $\vee$ 0 = 0,3,

μ (A, D) $\vee$ μ (D, C) = 0 $\vee$ 0,3 = 0,3

μ (A, E) $\vee$ μ (E, C) = 0,1 $\vee$ 0,3 = 0,3,

MIN [0,3; ...] =;0,3,

μ (A, C) = 0,3 $\le$ 0,3

и т.д.

Пример 2. Отношения, которое представлено на рис. 12.34, есть отношения различия, если

$$1 \ge b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_l \ge ... \ge 0.$$

$\underset{\sim}{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...
x_1	0	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	...
x_2	b_1	0	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	...
x_3	b_1	b_2	0	b_3	b_3	b_3	b_3	...
x_4	b_1	b_2	b_3	0	b_4	b_4	b_4	...
x_5	b_1	b_2	b_3	b_4	0	b_5	b_5	...
x_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	0	b_6	...
x_7	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.34.

Это отношение получается из отношения на рис. 12.20 заменой

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y).$$

Положим $b_i = 1 - a_i$, $i = 1, 2, 3, ...$

Пример 3. Нечеткое отношение

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+1)}, & y < x, k > 1, \\ 0, & y = x, \\ 1 - e^{-k(x+1)}, & y > x, k > 1 \end{cases}$$

есть отношения различия. Оно получается с

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \begin{cases} e^{-k(y+1)}, & y < x, k > 1, \\ 1, & y = x, \\ e^{-k(x+1)}, & y > x, k > 1 \end{cases}$$

заменой

$$\mu_{\tilde{\bar{R}}}\ (x, y)=1— \mu_{\tilde{R}}\ (x,y).$$

Рассмотрим несколько примеров, но сначала, чтобы иметь все необходимое под рукой, напомним аксиомы, которые связаны с понятием расстояния между двумя элементами множества.

Если d (X, Y) — расстояние между X и Y, то для $\forall$ X, Y, Z $\in$ E должны выполняться условия

1) $d(X, Y) \geq 0,$ (12.59)

2) $d(X, Y) = d(Y, X),$ (12.60)

3) $d(X, Y) * d(Y, Z) \geq d(X, Z),$ (12.61)

где * — операция, определенная на расстояниях d (X, Y).

К этим трех условий можно логически ввести четвертое:

$d(X, X) = 0.$ (12.62)

Проверим (12.59) —(12.62) для $\mu_{\tilde{\bar{R}}}\ (x, y)$; действительно, поскольку

$$0 \leq \mu_{\tilde{\bar{R}}}\ (x, y) \leq 1,$$

то (12.59) удовлетворяется по определению. Соотношение (12.60) удовлетворяется в силу (12.58). Соотношение (12.61), где операция * есть (min — max)-операция, удовлетворяется в силу (12.56). Наконец, (12.62) тоже истинное [см. (12.57)]. Таким образом, можно положить

$$d(xy) = \mu_{\tilde{\bar{R}}}\ (xy)$$

и рассматривать $\mu_{\tilde{\bar{R}}}\ (x, y)$ как расстояние между x и y (в этом случае $\mu_{\tilde{R}}\ (x, y)$ можно также назвать расстоянием между x и y).

(Min-max)-расстояние между двумя элементами в отношении подобия. Пусть $\tilde{R}$ - отношение подобия. *(Min-max)-расстоянием между x и y, x,y*$\in$ *E,* и $\tilde{R} \subset E\times E$ будем называть

$$d_{\tilde{R}}\ (xy) = 1 - \mu_{\tilde{R}}\ (xy).$$

Пример 4. Обратимся снова к примеру на рис. 12.18 (повтореному на рис. 12.35) — это отношение подобия $\tilde{R}$.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,8	0,7	1	0,9
B	0,8	1	0,7	0,8	0,8
C	0,7	0,7	1	0,7	0,7
D	1	0,8	0,7	1	0,9
E	0,9	0,8	0,7	0,9	1

Рис. 12.35.

На рис. 12.36 представленно отношение различия, соответствующее изображенному на рис. 12.35.

$\overline{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,2	0,3	0	0,1
B	0,2	0	0,3	0,2	0,2
C	0,3	0,3	0	0,3	0,3
D	0	0,2	0,3	0	0,1
E	0,1	0,2	0,3	0,1	0

Рис. 12.36.

Таким образом, имеем

$d_{\tilde{R}}$ (A,B) = 0,2,

$d_{\tilde{R}}$ (A,C) = 0,3,

$d_{\tilde{R}}$ (A,D) = 0

.....и т.д.

Пример 5. Рассмотрим опять пример

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \begin{cases} e^{-k(y+1)}, & y < x, k > 1, \\ 1, & y = x, \\ e^{-k(x+1)}, & y > x, k > 1 \end{cases};$$

имеем

$$d(x,y)=\begin{cases}1-e^{-k(y+1)}, & y<x, k>1,\\ 0, & y=x,\\ 1-e^{-k(x+1)}, & y>x, k>1\end{cases}$$

12.10. Отношения сходства

Сделаем некоторое лирическое отступление.

В теории обычных множеств тот факт, что это бинарное отношение не унаследовало свойства транзитивности, объясняет почти полное отсутствие интереса у части специалистов в области теории информации к этому свойству. Точно так же, как карикатуристы, они каждый раз впадают в общую ошибку, полагая, что сходство транзитивно. Вспомним карикатуры, на которых видно, как изменяющиеся образы, появляются друг за другом, как гетман Мазепа меняется в лице или император Наполеон III превращается в макрель. Талант этих юмористов не должен затемнять их логическую ошибку. Записывая (в содержании теории обычных множеств), что А похоже на В, В похоже на С, С похоже на D, ..., К похоже на L, а поэтому А похоже на L, мы действительно получаем A=L; окончательный вывод из последовательности умозаключений неверный. Ложные выводы этой природы используются людьми для того, чтобы пошутить над чем-либо, или политиками, которые стремятся воспользоваться глупостью некоторых избирателей. Софисты имеют особую склонность уверять нас в существовании транзитивности там, где ее существование особенно сомнительно.

Однако в теории нечетких подмножеств можно измерять несколько видов сходства, используя понятие расстояния в транзитивном замыкании. Понятие сходства тогда устанавливает мост между эквивалентностью и сходством.

А теперь перейдем к делу.

Отношение $\widetilde{R}$, такое, что

1) $\forall\ (x, x)\in E\times E$: $\mu_{\widetilde{R}}(x, x)=1$ — рефлексивность,

2) $\forall\ (x,y)\in E\times E$: $\mu_{\widetilde{R}}(x,y)=\mu_{\widetilde{R}}(y, x)$ - симметрия.

называется *отношением сходства*.

Пример 1. На рис. 12.37 приведен пример отношения сходства.

$\underset{\sim}{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,1	0,8	0,2	0,3
B	0,1	1	0	0,3	1
C	0,8	0	1	0,7	0
D	0,2	0,3	0,7	1	0,6
E	0,3	1	0	0,6	1

Рис. 12.37.

Пример 2. Отношение

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=e^{-k(x-y)^2}, \quad x,y\in N,$$

как мы уже видели, нетранзитивно, но оно рефлексивно и симметрично, поэтому является отношением сходства.

(Min-max)-расстояние на отношении сходства. Если $\tilde{R}$ есть отношение сходства (композиция $\tilde{R}$ с $\tilde{R}$ сохраняет рефлексивность и симметричность), то его транзитивное замыкание $\hat{\tilde{R}}$ есть отношение подобия. В таком случае понятия (min-max)-расстояния, порожденного $\tilde{R}$, можно определить через расстояние, порожденное $\hat{\tilde{R}}$:

$$d_{\tilde{R}}(x,y)=1-\mu_{\hat{\tilde{R}}}(x,y).$$

Пример 3. Рассмотрим пример на рис. 12.37. С помощью композиционной формулы (12.8) мы подсчитали транзитивное замыкание $\hat{\tilde{R}}$, которое изображено на рис. 12.38.

$\hat{\underset{\sim}{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0,6	0,8	0,7	0,6
B	0,6	1	0,6	0,6	1
C	0,8	0,6	1	0,7	0,6
D	0,7	0,6	0,7	1	0,6
E	0,6	1	0,6	0,6	1

Рис. 12.38.

Далее определили $\overline{\tilde{\tilde{R}}}$, такое, что

$$\mu_{\overline{\tilde{\tilde{R}}}}(x,y)=1-\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x,y).$$

Отношение $\overline{\tilde{\tilde{R}}}$ изображено на рис. 12.39.

$\overline{\tilde{\tilde{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

Рис. 12.39.

Наконец, имеем

$d_{\overline{\tilde{\tilde{R}}}}$ (A, B) = 0,4,

$d_{\overline{\tilde{\tilde{R}}}}$ (A,C) = 0,2,

....

$d_{\overline{\tilde{\tilde{R}}}}$ (B,D)=0,4

....

и т.д.

Пример 4. Рассмотрим отношение сходства $\tilde{R}$, определенное как

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\frac{1}{1+|x-y|}, \quad x\in \mathrm{N},\ y\in \mathrm{N}. \qquad (12.72)$$

Это отношение представлено на рис. 12.40.

$\underset{\sim}{R}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	…
1	1/2	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	…
2	1/3	1/2	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	…
3	1/4	1/3	1/2	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	…
4	1/5	1/4	1/3	1/2	1	1/2	1/3	1/4	1/5	…
5	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	1/2	1/3	1/4	…
6	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	1/2	1/3	…
7	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	1/2	…
8	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.40.

Подсчитав

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \ldots$$

(Чтобы получить $\hat{\tilde{R}}$, необходимо взять $\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \ \ldots$; очевидно, что все элементы $\hat{\tilde{R}}$ стремятся до 1/2, за исключением элементов на главной диагонали, которые остаются равными 1) получим отношение, которое представлено на рис. 12.41.

$\tilde{R}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	…
8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.41.

В таком случае имеем

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$$

Следовательно, можно заключить, что

$$d_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Заметим, что, если в (12.63) считать, что

$$x \in R^{+} \text{ i } y \in R^{+},$$

то получим

$$d_{\tilde{R}}(x,y) = 0$$

для всех x и y. Однако здесь нет парадокса, поскольку расстояние между x и $y = x + dx$ бесконечно имело и того же порядка, что и dx. Конечно, если расстоянию придать некоторый другой смысл, чем придаваемый рассмотренному здесь (min — max)-расстоянию, то это заключение следует пересмотреть.

(Max—·)-транзитивное замыкание для отношения сходства.

Пусть $\tilde{R}$ — отношение сходства. В некоторых случаях предпочтительнее измерять расстояние между элементами с помощью (max—·)-оператора вместо (max — min)-оператора, т.е. использовать выражение:

$$\mu_{\tilde{R}^{\dot{2}}}(x,z)=\bigvee_{y}[\mu_{\tilde{R}}(x,y)\cdot\mu_{\tilde{R}}(y,z)].$$

(*Max — •)-транзитивное замыкание* отношения определяется как

$$\dot{\hat{\tilde{R}}}=\tilde{R}\cup\tilde{R}^{\dot{2}}\cup\tilde{R}^{\dot{3}}\cup\ldots$$

где

$$\tilde{R}^{\dot{k}}=\underbrace{\tilde{R}\cdot\tilde{R}\cdot\ldots\cdot\tilde{R}}_{k\ раз},\quad k=1,2,3,...$$

Точка над $\dot{\wedge}$ и $\dot{k}$ напоминает нам, что мы имеем дело с (max — •)-композицией.

Пример 5. Напомним, что для отношения на рис. 12.37 мы подсчитали $\hat{\tilde{R}}$ и $\overline{\hat{\tilde{R}}}$ на рис. 12.38 и 12.39. На рис. 12.42 можно увидеть, как определялись $\tilde{R}^{\dot{2}}, \tilde{R}^{\dot{3}}, \tilde{R}^{\dot{4}}, \tilde{R}^{\dot{5}}, \dot{\hat{\tilde{R}}}$.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,1	0,8	0,2	0,3
B	0,1	1	0	0,3	1
C	0,8	0	1	0,7	0
D	0,2	0,3	0,7	1	0,6
E	0,3	1	0	0,6	1

$\tilde{R}^{\dot 2}$	A	B	C	D	E
A	1	0,3	0,8	0,56	0,3
B	0,3	1	0,21	0,6	1
C	0,8	0,21	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,3	1	0,42	0,6	1

$\tilde{R}^{\dot 3}$	A	B	C	D	E
A	1	0,3	0,8	0,56	0,336
B	0,3	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

$\tilde{R}^{\dot 4}$	A	B	C	D	E
A	1	0,336	0,8	0,56	0,336
B	0,336	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

$\tilde{R}^{\dot 5}$	A	B	C	D	E
A	1	0,336	0,8	0,56	0,336
B	0,336	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

$\dot{\hat{\tilde{R}}}$	A	B	C	D	E
A	1	0,336	0,8	0,56	0,336
B	0,336	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

Рис. 12.42.

Замечание к вычислению $\dot{\hat{\tilde{R}}}$. Раньше мы видели, что

$$\tilde{R} \circ \tilde{R} \subset \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R} \bullet \tilde{R} \subset \tilde{R},$$

хотя обратное утверждение неверно.

Теорема 2 с п. 12.3 (равенство (12.11)) также справедлива для (max—•)-операции. Для некоторого конкретного k имеем

$$\tilde{R}^{\overbrace{k+1}^{\cdot}} = \tilde{R}^{\dot k} \Rightarrow \dot{\hat{\tilde{R}}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^{\dot 2} \cup \ldots \cup \tilde{R}^{\dot k}$$

В случае, когда $\tilde{R}$ есть отношение сходства, аналогично имеем

$$\tilde{R}^{\overbrace{k+1}^{\cdot}} = \tilde{R}^{\dot k} \Rightarrow \dot{\hat{\tilde{R}}} = \tilde{R}^{\dot k}\ .$$

(Min — sum)-расстояние на отношении сходства. *(Min — sum) - расстоянием* будем называть величину

$$\gamma_{\tilde{R}}\ (x,y) = \mu_{\overline{\hat{\tilde{R}}}}\ (x,y).$$

Но сначала следует установить, удовлетворяет ли эта функция аксиомам расстояния (12.59) - (12.62).

(12.59) удовлетворяется априори, поскольку $\mu_{\hat{\tilde{R}}}\ (x, y) \in [0,\ 1]$.

(12.60) удовлетворяется априори, поскольку отношение $\dot{\hat{\tilde{R}}}$ симметрично.

(12.62) удовлетворяется априори, поскольку отношение $\dot{\hat{\tilde{R}}}$ рефлексивно, откуда следует, что $\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x,y) = 0$.

Остается показать, что это расстояние действительно имеет свойство (12.61). Мы поступим так же, как это было сделано для (12.53)-(12.55). Имеем

$$\mu_{\dot{\hat{\tilde{R}}}}(x, z) > [\mu_{\dot{\hat{\tilde{R}}}}(x, y) \bullet \mu_{\dot{\hat{\tilde{R}}}}(y, z)],$$

отсюда, руководствуясь правилами операций по теоремам Де Моргана для нечетких множеств, имеем:

$$1-\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [[1-\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x,y)] \bullet [1-\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(y, z)]] \geq$$

$$\geq \bigvee_{y} [1-\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x,y)-\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(y,z) + \mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x,y) \bullet \mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(y,z)].$$

Это дает

$$\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x, z) \leq \bigvee_{y} [\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x,y)+\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(y, z)-\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x,y)+\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(y,z),$$

$$\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x, z) \leq \bigvee_{y} [\mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x,y) \hat{+} \mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(y, z)],$$

где $\hat{+}$ есть алгебраическая сумма, которая определена формулой для алгебраической суммы двух отношений. Теперь видно, что для (max — sum)-оператора определенно удовлетворяется свойство (12.61).

Пример 5. Рассмотрим опять пример на рис. 12.37. На рис. 12.42 мы подсчитали (max — •)-транзитивное замыкание, т.е. $\dot{\hat{\tilde{R}}}$.

Теперь (min —sum)-расстояния будут задаваться отношением $\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}$, для которого

$$\gamma(x, y) = \mu_{\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}}(x, y) = 1 - \mu_{\dot{\hat{\tilde{R}}}}(x, y).$$

На рис. 12.43 представлены (min — sum)-расстояния между различными элементами. Так, γ (C, F) = 0,58; γ (D, B) = 0,4.

$\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,664	0,2	0,44	0,664
B	0,664	0	0,58	0,4	0
C	0,2	0,58	0	0,3	0,58
D	0,44	0,4	0,3	0	0,4
E	0,664	0	0,58	0,4	0

Рис. 12.43.

Пример 6. Вернемся к примеру на рис. 12.41. (Max -)-композиция немедленно показывает, что

$$\dot{\hat{\tilde{R}}} = \tilde{R}$$

Отношение $\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}$ представлено на рис. 12.44.

$\overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	...
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	...
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	...
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	...
4	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	...
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	...
7	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	...
8	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 12.44.

Очевидно, что

$$\gamma(n_1, n_2) = \frac{|n_2 - n_1|}{|n_2 - n_1| + 1}$$

и, как следствие,

$$\lim_{|n_2 - n_1| \to \infty} \gamma(n_1, n_2) = 1$$

Замечание. Представляется, что γ(*x,y*) дает в практическом отношении лучшее расстояние, чем *d(x,y),* это может оказаться очень важным для всего, что связано с проблемами сходства, и объясняет наш интерес к (min — sum)-расстоянию. Однако, как мы увидим на рис. 12.56, декомпозиция на обычные частичные графы дальше невозможна.

Теорема 1. Пусть $\tilde{R}$ — отношение сходства. Тогда всегда справедливо включение

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} \subset \overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}},$$

т.е.

$$\forall\ (x, y) : d(x, y) \le \gamma(x, y).$$

Доказательство. По условию (max — min)-транзитивности имеем

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \ge \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

По условию (max-)-транзитивности имеем

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \ge \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \bullet \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

Но согласно свойству

$$a \bullet b \le a \wedge b, \text{ если } a, b \in [0,1],$$

имеем

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z) \ge \mu_{\tilde{R}}(x, y) \bullet \mu_{\tilde{R}}(y, z),$$

Откуда следует

$$\bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \underset{min-max}{\wedge} \mu_{\tilde{R}}(y, z)] \ge \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}} \underset{max-\cdot}{(x, y)} \bullet \mu_{\tilde{R}}(y, z)],$$

т.е.

$$\tilde{R} \bullet \tilde{R} \subset \tilde{R} \circ \tilde{R},$$

где, напоминаем, • обозначает (max—•)-композицию, а ∘ обозначает (max — min)-композицию.

Отсюда

$$\dot{\hat{\tilde{R}}} \subset \hat{\tilde{R}}$$

и, следовательно,

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} \subset \overline{\dot{\hat{\tilde{R}}}}$$

Отношение несходства. Отношение $\tilde{R}$, такое, что

1) $\forall$ *(x,x)* $\in$ E×E: $\mu_{\tilde{R}}$ *(x,x)* = 0 (антирефлексивность),

2) $\forall$ *(x, y)* $\in$ E × E: $\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y)* = $\mu_{\tilde{R}}$ *(y, x)* (симметрия),

называется *отношением несходства* (рис. 12.45).

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,3	0,9	1	0,2
B	0,3	0	0,4	0,1	0
C	0,9	0,4	0	0,8	0,1
D	1	0,1	0,8	0	1
E	0,2	0	0,1	1	0

Рис. 12.45.

Рассмотрим некоторые очевидные свойства. Если $\tilde{R}$ — отношение сходства, то $\overline{\tilde{R}}$ — отношение несходства и наоборот.

Теорема 2. Если $\hat{\tilde{R}}$ есть (max — min) -транзитивное замыкание отношения сходства $\tilde{R}$, то $\overline{\hat{\tilde{R}}}$ есть (min—max)-транзитивное замыкание соответствующего отношения несходства.

Доказательство. (Max — min)-транзитивное замыкание выражается с помощью (12.9) и (12.8); таким образом,

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \ldots$$

и

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{R}}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

Тогда *(min — max)-транзитивное замыкание* запишем в виде (можно обозначать $\tilde{R} * \tilde{R} = \tilde{R}^2$, если нет опасности спутать с (max— min)-операцией, и $\tilde{R} * \tilde{R} * \ldots * \tilde{R} = \tilde{R}^n$)

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \bigcap (\tilde{R} * \tilde{R}) \bigcap (\tilde{R} * \tilde{R} * \tilde{R}) \bigcap \ldots \qquad (12.73)$$

и

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{R}}(x, z) = \bigwedge_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \vee \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

Пусть $\tilde{R}$ - отношение сходства, $\hat{\tilde{R}}$ — отношение подобия, $\overline{\tilde{R}}$ — отношение несходства и $\breve{\overline{\tilde{R}}}$ — отношение различия. Покажем, что

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} = \breve{\overline{\tilde{R}}}$$

В (12.52)— (12.55) мы уже показали, что если $\tilde{R}$ (max — min) - транзитивно, то $\overline{\tilde{R}}$ (min — max)-транзитивно.

Покажем теперь, что

$$\underset{\text{max-min}}{\overline{\tilde{R} \circ \tilde{R}}} = \underset{\text{min-max}}{\overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}}} \qquad (12.74)$$

Для проверки этого поступим так же, как в (12.52)— (12.55):

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{R}}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)],$$

$$\mu_{\overline{\tilde{R}\circ\tilde{R}}}(x, z) = 1 - \mu_{\tilde{R}\circ\tilde{R}}(x, z) = 1 - \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)] =$$

$$= \bigwedge_y \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x, y) \vee \mu_{\overline{\tilde{R}}}(y, z) = \mu_{\overline{\tilde{R}}\circ\overline{\tilde{R}}}(x, z)$$

Это доказывает (12.74).

Теперь запишем

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} = \overline{\tilde{R} \bigcup \tilde{R}^2 \bigcup \tilde{R}^3 \bigcup \ldots} = \overline{\tilde{R} \bigcup (\tilde{R} \circ \tilde{R}) \bigcup (\tilde{R} \circ \tilde{R} \circ \tilde{R}) \bigcup \ldots} =$$

$= \overline{\tilde{R}} \bigcap \overline{\tilde{R} \circ \tilde{R}} \bigcap \overline{\tilde{R} \circ \tilde{R} \circ \tilde{R}} \bigcap \ldots =$ далее, используя теорему Де Моргана, получаем $= \overline{\tilde{R}} \bigcap \overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}} \bigcap \overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}} \bigcap \ldots =$ и, наконец, согласно (12.74) $= \breve{\overline{\tilde{R}}}$.

Пример 7. Возьмем опять отношение сходства, которое представлено на рис. 12.37, для которого соответствующее отношение подобия представлено на рис. 12.38, а матрица расстояний — на рис.

12.39. Мы встретимся с этими отношениями еще раз при расчетах, которыми заканчивается нахождение $\overline{\breve{\tilde{R}}}$ на рис. 12.46, *г-з*.

$\overline{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,9	0,2	0,8	0,7
B	0,9	0	1	0,7	0
C	0,2	1	0	0,3	1
D	0,8	0,7	0,3	0	0,4
E	0,7	0	1	0,4	0

г

$\overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,7	0,2	0,3	0,7
B	0,7	0	0,7	0,4	0
C	0,2	0,7	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,7	0	0,4	0,4	0

(min–max)-*композиция* $\overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}}$

д

$\overline{\tilde{R}}^3_*$	A	B	C	D	E
A	0	0,7	0,2	0,3	0,4
B	0,7	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

(min–max)-*композиция*

е

$\overline{\tilde{R}}^4_*$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

(min–max)-*композиция*

ж

$\overline{\breve{\tilde{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

пересечение
(min–max)-*композиций*

з

Рис. 12.46.

Теорему 2 можно распространить на случай любого отношения, не подчеркивая, что это отношение сходства. Таким образом, можно сформулировать более общую теорему.

Теорема 3. Пусть $\hat{\tilde{R}}$ есть (max — min)-транзитивное замыкание некоторого нечеткого отношения $\tilde{R} \subset E\times E$ и $\overline{\breve{\tilde{R}}}$ — (min — max)-транзитивное замыкание $\overline{\tilde{R}}$. Тогда

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} = \overline{\breve{\tilde{R}}}$$

12.11. Некоторые свойства отношений подобия и сходства

Теорема декомпозиции для отношения подобия. Пусть $\tilde{R}$ — отношение подобия в Е × Е. Тогда $\tilde{R}$ можно разложить так:

$$\tilde{R} = \bigvee_{\alpha} \alpha \bullet R_\alpha,\ 0<\alpha\leq 1, \tag{12.75}$$

при

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Longrightarrow R_2 \supset R_1$$

где R_α — отношение эквивалентности в смысле обычной теории множеств и $\alpha \bullet R_\alpha$ обозначает, что все элементы обычного отношения R_α умножаются на α .

Доказательство. Во-первых, $\mu_{\tilde{R}}(x,\ x)=1$, откуда следует, что $(x,\ x)\in R_\alpha$ при $\alpha\in[0,1]$; следовательно, R_α обладает свойством рефлексивности.

Во-вторых, положив $(x, y)\in R_\alpha$, $\alpha\in[0,1]$, получим, что $\mu_{\tilde{R}}(x, y)\geq\alpha$ и в силу симметрии R_α: $\mu_{\tilde{R}}(y,\ x)\geq\alpha$. Следовательно, R_α обладает свойством симметрии.

В-третьих, для всех $\alpha\in[0,1]$ предположим, что $(x,\ y)\in R_\alpha$ и $(y,\ z)\in R_\alpha$; тогда $\mu_{\tilde{R}}(y,\ x)\geq\alpha$ и $\mu_{\tilde{R}}(y,\ z)\geq\alpha$; следовательно, по транзитивности $\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \alpha$ и R_α транзитивно.

Поскольку R_α рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R_α — отношение эквивалентности. Справедлива и обратная теорема.

Обратная теорема. Если R_1 не пусто, $(x, x)\in R_1$ и

$$\mu_{\tilde{R}}(x,x)=1,\ \forall x\in \text{E}, \tag{12.76}$$

тогда $\tilde{R}$ — рефлексивное нечеткое отношение.

С другой стороны, можно записать

$$\forall\,(x,y) \in \text{E}\times\text{E}:\ \mu_{\tilde{R}}(x, y) = \bigvee_{\alpha} \alpha \bullet \mu_{R_\alpha}(x, y). \tag{12.77}$$

Очевидно, что из симметричности каждого R_α следует симметрия $\tilde{R}$.

Наконец, пусть $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \alpha$ и $\mu_{\tilde{R}}(y, z) = \beta$.

Тогда $(x, y)\in R_{\alpha\beta}$ и $(y, z)\in R_{\alpha\beta}$.

Как следствие получаем $(x, z)\in R_{\alpha\beta}$.

поскольку $R_{\alpha\beta}$ транзитивно.

Следовательно,

$$\forall\, x, y, z \in \mathrm{E}:\ \mu_{\tilde R}\ (x, z) \geq \alpha \wedge \beta$$

и

$$\mu_{\tilde R}\ (x, z) \geq \bigvee_{y}\ (\mu_{\tilde R}\ (x, y) \wedge \mu_{\tilde R}\ (y, z)),$$

что вместе с (12.76) и (12.77) доказывает транзитивность R.

Эта обратная теорема разрешает синтезировать отношение подобия, в то время как прямая теорема разрешает проводить анализ.

Замечание. Как следует из этой теоремы, обычное отношение, ближайшее к отношению подобия, есть отношение эквивалентности. Это становится очевидным, если рассмотреть, что представляет собой R_α, когда $\alpha > 0,5$.

Примеры. Посмотрим, как проводится анализ отношения, которое представлено на рис. 12.18. Декомпозиция этого отношения показана на рис. 12.47.

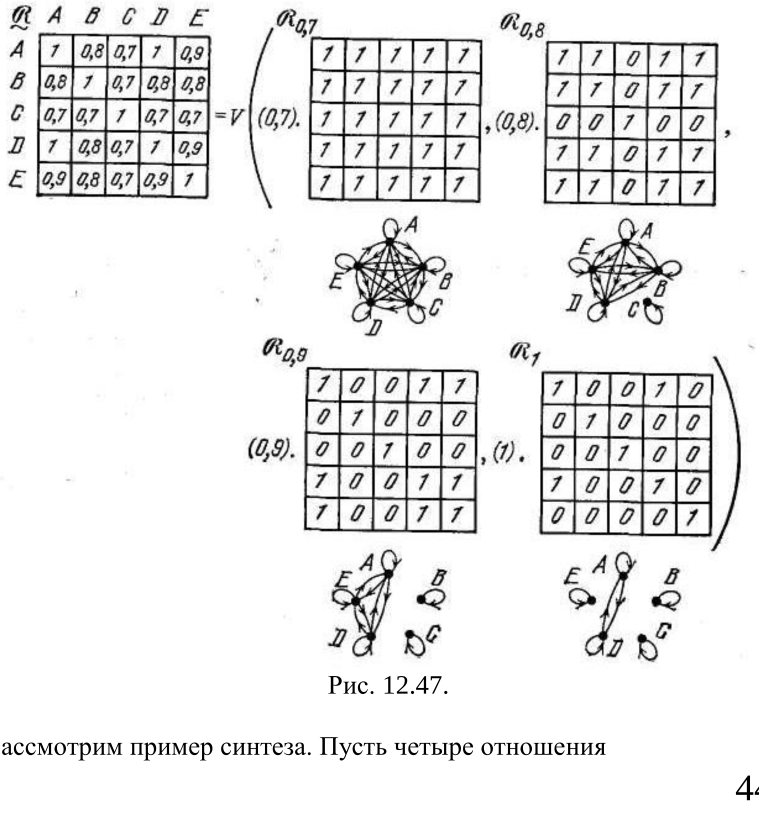


Рис. 12.47.

Рассмотрим пример синтеза. Пусть четыре отношения эквивалентности последовательно удерживают друг друга (рис. 12.48).

$R_{0,2}$	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	1	1	1	1

а

$R_{0,6}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	1	0	0
C	0	0	1	1
D	0	0	1	1

б

$R_{0,8}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

в

R_1	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

г

Рис. 12.48.

Тогда имеем $\tilde{R} = \vee\ (0{,}2\cdot R_{0,2};\ 0{,}6\cdot R_{0,6};\ 0{,}8\cdot R_{0,8};\ 1\cdot R_1)$.

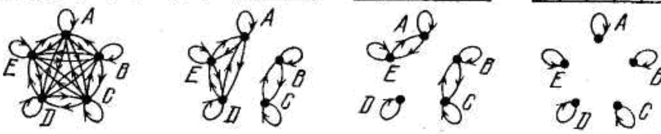
Результат показано на рис. 12.49.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0,8	0,2	0,2
B	0,8	1	0,2	0,2
C	0,2	0,2	1	0,6
D	0,2	0,2	0,6	1

Рис. 12.49.

Другой пример приведен на рис. 12.50, где предполагается, что a и $b \in [0,1]$ при $a < b$.

$$V\left(0.\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}, a.\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}, b.\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{bmatrix}, 1.\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right)$$



=

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	a	b
B	0	1	b	0	0
C	0	b	1	0	0
D	a	0	0	1	a
E	b	0	0	a	1

Рис. 12.50.

Транзитивные графы расстояний. Для каждого отношения подобия рассмотрим транзитивные графы, которые отвечают (min — max)-м расстояниям. Несколько примеров послужат наглядной иллюстрацией к этому замечанию.

Пример 1. На рис. 12.51 показаны отношение различия.

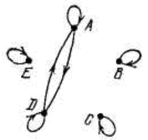
$\underset{\sim}{R}$	A	B	C	D	$\dot{E}$
A	0	0,2	0,8	0	0,1
B	0,2	0	0,8	0,2	0,2
C	0,8	0,8	0	0,8	0,8
D	0	0,2	0,8	0	0,1
$\dot{E}$	0,1	0,2	0,8	0,1	0

Рис. 1.51.

На рис. 12.52 представленны транзитивные графы, соответствующие разным расстояниям.

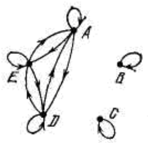
Відстані дорівнюють 0:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	1	0	0	1	0
E	0	0	0	0	1



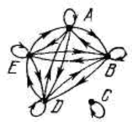
Відстані менші або дорівнюють 0,7:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	1
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	1	0	0	1	1
E	1	0	0	1	1



Відстані менші або дорівнюють 0,2:

	A	B	C	D	E
A	1	1	0	1	1
B	1	1	0	1	1
C	0	0	1	0	0
D	1	1	0	1	1
E	1	1	0	1	1



Відстані менші або дорівнюють 0,8:

	A	B	C	D	E
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1

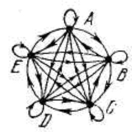


Рис. 12.52.

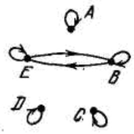
Пример 2 (рис. 12.53 и 12.54). Этот пример - на транзитивное замыкание (рис. 12.38) отношения сходства (рис. 12.37).

$\bar{\hat{\underset{\sim}{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

Рис. 12.53.

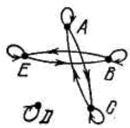
Відстані дорівнюють 0:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	0	0
B	0	1	0	0	1
C	0	0	1	0	0
D	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	1



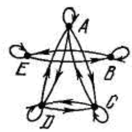
Відстані менші або дорівнюють 0,2:

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	0	0
B	0	1	0	0	1
C	1	0	1	0	0
D	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	1



Відстані менші або дорівнюють 0,3:

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	1	0
B	0	1	0	0	1
C	1	0	1	1	0
D	1	0	1	1	0
E	0	1	0	0	1



Відстані менші або дорівнюють 0,4:

	A	B	C	D	E
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1

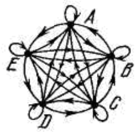


Рис. 12.54.

Полученное здесь разложение мы сравним с тем, которое получится в следующем примере (рис. 12.55 и 12.56).

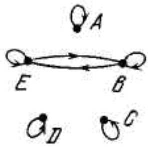
Пример 3 (рис. 12.55 и 12.56).

$\widehat{\underset{\sim}{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,664	0,2	0,44	0,664
B	0,664	0	0,58	0,4	0
C	0,2	0,58	0	0,3	0,58
D	0,44	0,4	0,3	0	0,4
E	0,664	0	0,58	0,4	0

Рис. 12.55.

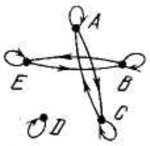
Відстані дорівнюють 0:

1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1



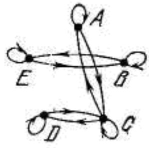
Відстані менші або дорівнюють 0,2:

1	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1



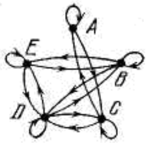
Відстані менші або дорівнюють 0,3:

1	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1



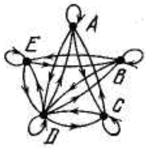
Відстані менші або дорівнюють 0,4:

1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1



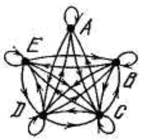
Відстані менші або дорівнюють 0,44:

1	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1
0	1	0	1	1



Відстані менші або дорівнюють 0,58:

1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1



Відстані менші або дорівнюють 0,664:

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

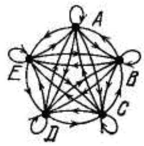


Рис. 12.56.

(Max— $\cdot$)-транзитивное замыкание отношения сходства на рис. 12.37 было представлено на рис. 12.42. Для этого на рис. 12.43 выписали матрицу (max — sum)-расстояний. В этом примере при декомпозиции на обычные графы расстояний появятся нетранзитивные графы. Использование (max — $\cdot$)-транзитивного замыкания в отношении сходства менее удобно по сравнению с использованием (max — min) транзитивного замыкания.

Декомпозиционное дерево. Если внимательно изучить рис. 12.47, то можно заметить, что по мере того, как α последовательно принимает значение 0,7; 0,8; 0,9 и 1, разбиение Е на классы эквивалентности включает все больше и больше частей. Это разложение было проведено по древовидной схеме (рис. 12.57).

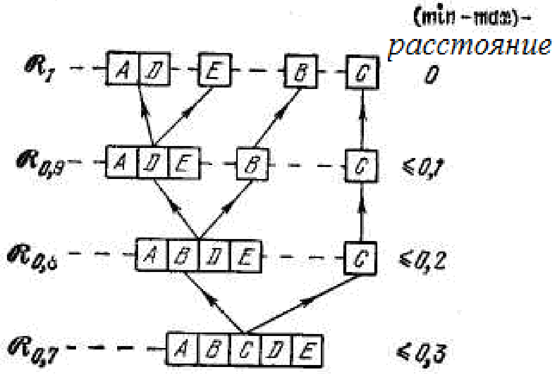


Рис. 12.57.

Такая схема называется *декомпозиционным деревом.*

Другой пример разложения для данных рис. 12.50 приведено на рис. 12.58.

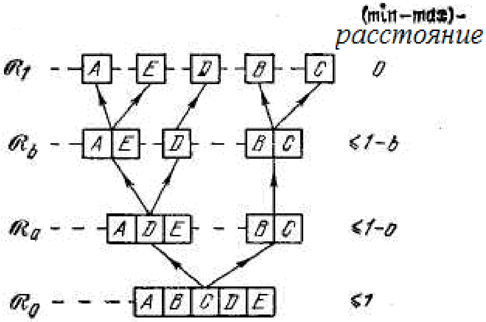


Рис. 5.90.

Можно проверить, что два элемента *x* и *y,* которые принадлежат Е, должны принадлежать одному и тому же классу α-уровня, если и только если

$$\mu_R\ (x,y) \geq \alpha.$$

Это декомпозиционное дерево хорошо отражает структуру отношения подобия или группировки элементов, которые построены с использованием их транзитивных расстояний от других элементов.

Деревья можно представлять разными способами. Используя лингвистические обозначения, дерево на рис. 12.57 можно записать в следующем виде:

0,7 (0,8 (0,9(1 {A, D}, 1{E}), 0,9(1 {B})), 0,8(0,9 (1{C}))).

Такое использование круглых скобок не слишком удобно.

Можно также использовать польское обозначение, собирая вершины в «кучи».

Дерево на рис. 12.57 будет тогда записано в виде такой последовательности:

0,7 (ABCDE) 0,8 (ABDE) 0,9 (ADE) 1 (AD), 0,9 (ADE) 1 (E) 0,9 (ADE), 0,8(ABDE) 0,9 (B) 1 (B) 0,9 (B) 0,8 (ABDE) 0,7 (ABCDE) 0,8 (C) 0,9 (C) 1 (C) 0,9 (C) 0,8 (C) 0,7 (ABCDE).

Выбор транзитивно ближайших сообщений. Нечеткое подмножество можно рассматривать как *сообщение,* которое вместо того, чтобы быть бинарным, оказалось нечетким.

Рассмотрим обычное множество F нечетких подмножеств $\tilde{A}_i$ принадлежащих одному и тому же универсальному множеству E:

$$F=\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n\}.$$

Мы хотим определить, какие из нечетких подмножеств или нечетких сообщений окажутся транзитивно ближайшими. Чуть позже уточним неудобства понятия транзитивности, которое здесь будем рассматривать, при этом преимущества выявятся сразу.

Будем действовать следующим образом (и попутно объяснять, что понимается под «транзитивно ближайшим»).

1. Для каждой пары ($\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_j$), i, j = 1, 2, ..., n, подсчитаем относительное обобщенное расстояние Хемминга (или относительное евклидово расстояние $\varepsilon(A_i,A_j)$ в зависимости от характера проблемы или даже какое-нибудь другое расстояние) $\delta(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$, что дает отношение несходства $\tilde{L}$.

2. Вычисляем (min — max)-транзитивное замыкание [определеное в (12.73)]. Полученное отношение $\breve{\tilde{L}}$ дает (min — max)-транзитивное расстояние

$$\breve{\delta}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = 0.$$

3. Затем раскладываем $\breve{\tilde{L}}$ согласно (12.75) и получаем следующие обычные подмножества F:

транзитивно ближайшие сообщения, для которых

$$\breve{\delta}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = 0;$$

транзитивно ближайшие сообщения, для которых

$$0<\breve{\delta}\ (\tilde{A}_i,\ \tilde{A}_j)=\alpha_1<\alpha_2<...;$$

транзитивно ближайшие сообщения, для которых

$$0<\alpha_1<\breve{\delta}\ (\tilde{A}_i,\ \tilde{A}_j)=\alpha_2<\alpha_3<...;$$

и т.д.

4. Строим соответствующее декомпозиционное дерево.

Пример. Пусть E — конечное универсальное множество с card (E)=7; рассмотрим семь подмножеств или сообщений $\tilde{A}_i$, i = 1,2.....6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\underset{\sim}{A}_1$ =	0,1	0,8	0,3	1	0,1	0	1
$\underset{\sim}{A}_2$ =	0,3	0,8	0,1	1	0	1	0,7
$\underset{\sim}{A}_3$ =	0,7	1	0	1	0,8	0,3	0,7
$\underset{\sim}{A}_4$ =	0,1	0,8	0,7	0	0,1	1	0,3
$\underset{\sim}{A}_5$ =	0,6	1	0	0,7	0,8	0	1
$\underset{\sim}{A}_6$ =	0	0,3	0,5	0,1	0,1	0,5	0,8

Теперь подсчитаем относительное обобщенное расстояние Хемминга:

$$\delta\,(\tilde{A}_и,\ \tilde{A}_j)=\frac{d(\tilde{A}_i,A_j)}{7}\ .$$

Это дает отношение несходства $\tilde{L}$ (рис. 12.59, *а)*.

$\underset{\sim}{\delta}$	$\underset{\sim}{A}_1$	$\underset{\sim}{A}_2$	$\underset{\sim}{A}_3$	$\underset{\sim}{A}_4$	$\underset{\sim}{A}_5$	$\underset{\sim}{A}_6$
$\underset{\sim}{A}_1$	0	0,25	0,34	0,44	0,28	0,34
$\underset{\sim}{A}_2$	0,25	0	0,31	0,32	0,42	0,40
$\underset{\sim}{A}_3$	0,34	0,31	0	0,61	0,14	0,54
$\underset{\sim}{A}_4$	0,44	0,32	0,61	0	0,64	0,27
$\underset{\sim}{A}_5$	0,28	0,42	0,14	0,64	0	0,54
$\underset{\sim}{A}_6$	0,34	0,40	0,54	0,27	0,54	0

а

$\underset{\sim}{\breve{\delta}}$	$\underset{\sim}{A}_1$	$\underset{\sim}{A}_2$	$\underset{\sim}{A}_3$	$\underset{\sim}{A}_4$	$\underset{\sim}{A}_5$	$\underset{\sim}{A}_6$
$\underset{\sim}{A}_1$	0	0,25	0,28	0,32	0,28	0,32
$\underset{\sim}{A}_2$	0,25	0	0,28	0,32	0,28	0,32
$\underset{\sim}{A}_3$	0,28	0,28	0	0,32	0,14	0,32
$\underset{\sim}{A}_4$	0,32	0,32	0,32	0	0,32	0,27
$\underset{\sim}{A}_5$	0,28	0,28	0,14	0,32	0	0,32
$\underset{\sim}{A}_6$	0,32	0,32	0,32	0,27	0,32	0

б

Рис. 12.59.

Затем с помощью (12.73) подсчитаем (min — max)-транзитивное замыкание $\breve{\tilde{L}}$, которое дает транзитивные расстояния δ (см. рис. 12.60 и 12.61).

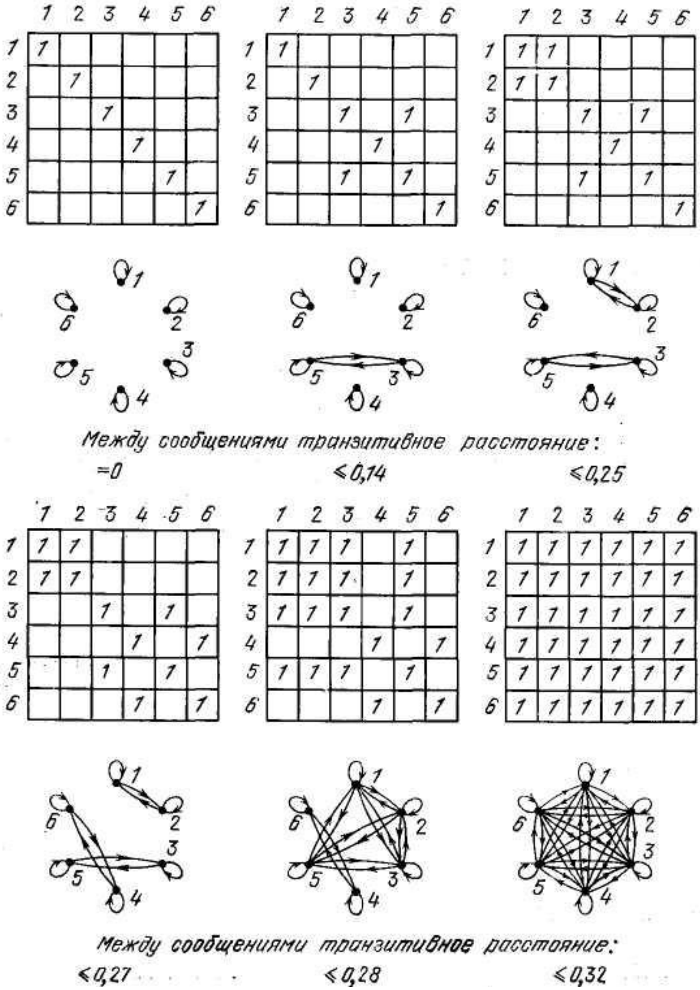


Рис. 12.60.

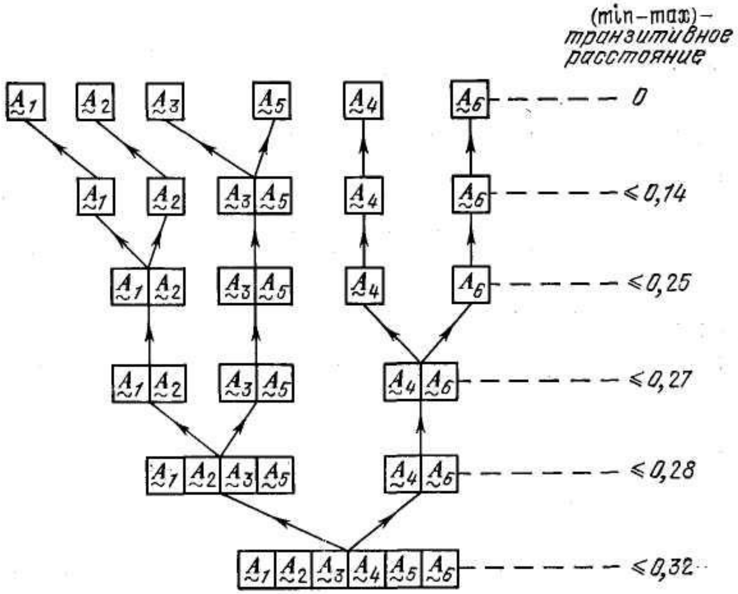


Рис. 12.61.

Замечание о сущности транзитивного расстояния.

В зависимости от характера решаемой проблемы (min — max)-транзитивное замыкание матрицы расстояний может не иметь значения в практических приложениях. Рассмотрим пример. Имеем следующие четыре сообщения:

$$\underset{\sim}{A}_1 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{A}_3 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\frac{1}{2}} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{A}_2 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\frac{1}{2}} \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{A}_4 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$$

Относительные обобщенные расстояния Хемминга для этих сообщений приведенные на рис. 12.62, представляющем матрицу отношения несходства $\overline{\underset{\sim}{R}}$.

$\overline{\tilde{R}}$	$(0,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,1)$
$(0,0)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$(\frac{1}{2},0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$
$(0,1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0

Рис. 12.62.

На рис. 5.63 подсчитано (min — max)-замыкание $\overline{\tilde{R}}$, т.е. $\breve{\overline{\tilde{R}}}$. Теперь видно, что все эти сообщения являются транзитивно равноотстоящими.

$\breve{\overline{\tilde{R}}}$	$(0,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,1)$
$(0,0)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$(\frac{1}{2},0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$(0,1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

Рис. 12.63.

Такое понимание (min — max)-транзитивного расстояния может показаться неприемлемым в числовых приложениях. Но относительное обобщенное расстояние Хемминга транзитивно для обычной (min—sum)-операции, т.е.

$$\delta\ (x,\ z) \leq \underset{в}{\mathrm{MIN}}\ [\delta\ (x,\ y) + \delta(y,\ z)], \qquad (12.78)$$

а так как $\delta\ (x,\ z)$ — это расстояние, то

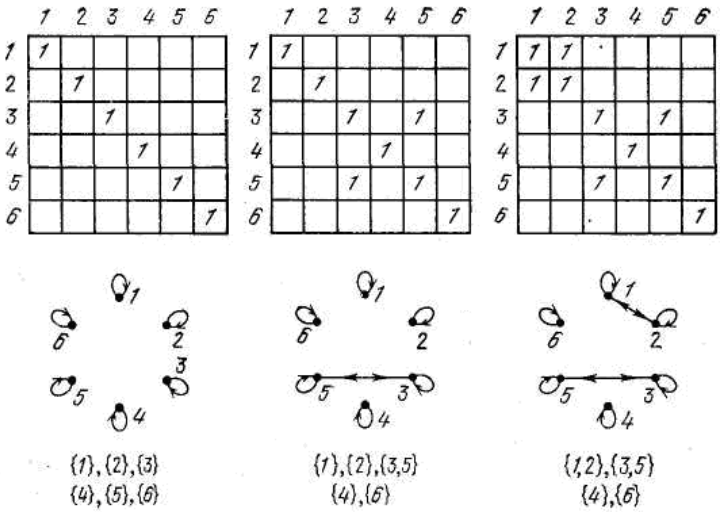
$$\forall\ y{:}\delta\ (x,\ z) \leq \delta\ (x,\ y) + \delta(y,\ z).$$

К тем же выводам приводит рассмотрение относительного евклидова расстояния.

Таким образом, каждое отношение $\tilde{L}$, которое задает относительное обобщенное расстояние Хемминга (или относительное евклидово расстояние), есть отношение, которое совпадает со своим собственным обычным (min — sum)-транзитивным замыканием. Заметим, что правая часть (12.78) может принять значение больше 1, так как здесь выполняется обычное сложение, но это ничего не изменяет, поскольку член слева по построению всегда принадлежит [0,1].

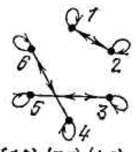
Как будет показано ниже, разложение по уровням относительно значений, которые содержатся в отношении несходства, дальше будет давать не классы эквивалентности, а максимальные подотношения.

Обычное (min—sum)-различие. Декомпозиция на максимальные подотношения. Отношение (12.78) можно рассматривать как отношение различия, которое можно назвать обычным (min — sum)-различием.



Расстояние =0   Расстояние ≤ 0,14   Расстояние ≤ 0,25

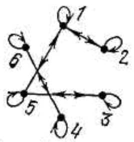
	1	2	3	4	5	6
1	1	1				
2	1	1				
3			1		1	
4				1		1
5			1		1	
6				1		1



{1,2},{3,5},{4,6}

Відстань $\leqslant 0,27$

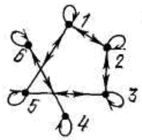
	1	2	3	4	5	6
1	1	1			1	
2	1	1				
3			1		1	
4				1		1
5	1		1		1	
6				1		1



{1,2},{1,5},{3,5}
{4,6}

Відстань $\leqslant 0,28$

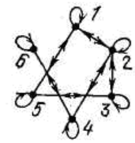
	1	2	3	4	5	6
1	1	1			1	
2	1	1	1			
3		1	1		1	
4				1		1
5	1		1		1	
6				1		1



{1,2},{1,5},{2,3}
{3,5},{4,6}

Відстань $\leqslant 0,31$

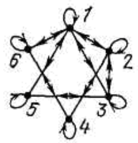
	1	2	3	4	5	6
1	1	1			1	
2	1	1	1	1		
3		1	1		1	
4		1		1		1
5	1		1		1	
6				1		1



{1,2},{1,5},{2,3},{2,4}
{3,5},{4,6}

Відстань $\leqslant 0,32$

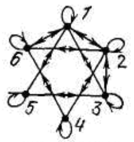
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1		1	1
2	1	1	1	1		
3	1	1	1		1	
4		1		1		1
5	1		1		1	
6	1			1		1



{1,2,3},{1,3,5},{1,6}
{2,4},{4,6}

Відстань $\leqslant 0,34$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1		1	1
2	1	1	1	1		1
3	1	1	1		1	
4		1		1		1
5	1		1		1	
6	1	1		1		1



{1,2,3},{1,2,6},{1,3,5}
{2,4,6}

Відстань $\leqslant 0,40$

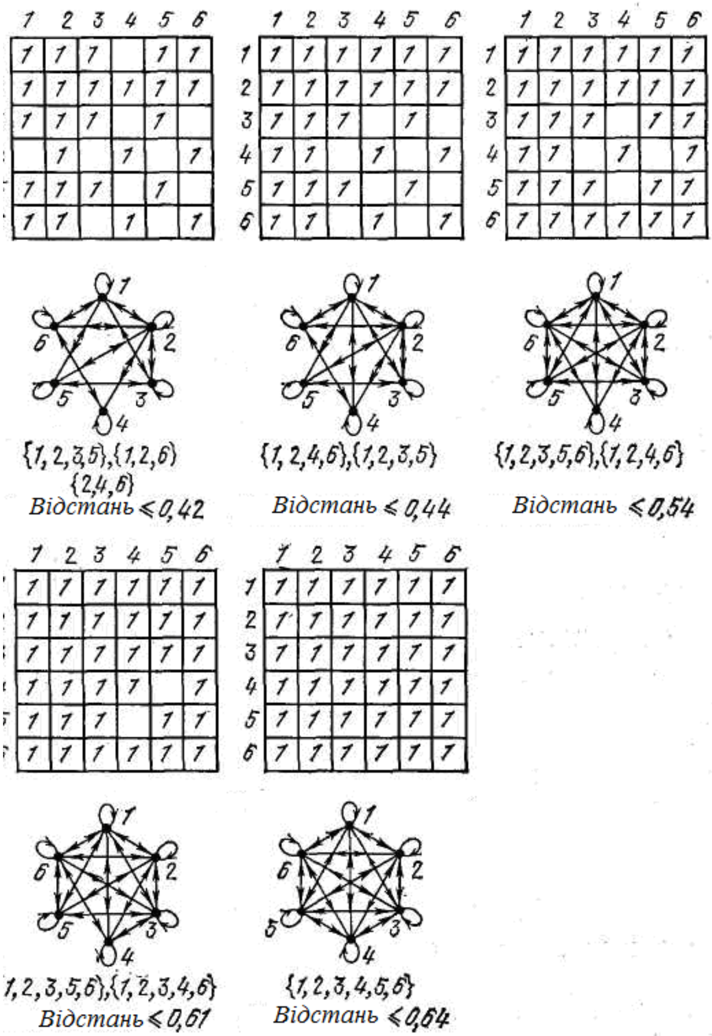


Рис. 12.65.

Как видно в примере на рис. 12.65, для расстояний *d≤k (k* произвольное) не получаются обычные графы, подграфы которых устанавливают классы эквивалентности. Иногда можно использовать менее строгое понятие, довольно важное при разных операциях — понятие максимальных подотношений, которые могут быть как обычными, так и непересекающимися.

Обратимся к рис. 12.65 и рассмотрим более подробно обычный симметричный граф, соответствующий $d \leq 0{,}42$. На рис. 12.64 мы изобразили этот обычный граф и выделили три максимальных подотношения или полных обычных графа, каждый из которых устанавливает отношение эквивалентности. Для каждого из этих подотношений расстояние каждого элемента до другого меньше или равно 0,42 и свойство (12.78) подтверждается. В общем случае такое разложение нельзя сделать без подходящего алгоритма.

Замечание. Обычное (min— sum)-различие недвойственно обычному (max —·)-подобию. Двойственным к первому из этих отношений и будет алгебраическое (min—sum)-различие.

Рассмотрим пример, в котором появляются максимальные подотношения.

Пример. Разложим отношение различия, которое задано на рис. 12.59,*а* (см. декомпозицию на рис. 12.65).

Наконец, можно также использовать алгебраическую ($a \hat{+} b = a + b - ab$) (min — sum)-транзитивность для того, чтобы получить разложение на максимальные подотношения.

Сравнивая рис. 12.60 и 12.65, можно увидеть преимущества и недостатки использования (min — max)-транзитивности, с одной стороны, и (min — sum)-транзитивности — с другой. Первая дает классы эквивалентности, которые появляются последовательно в зависимости от величины α, интерпретация которой очень спорная. Вторая транзитивность дает только максимальные подотношения, в общем случае непересекающиеся; однако ее интерпретация бесспорна, особенно когда речь идет о приложениях в области классификации структур.

12.12. Некоторые свойства нечетких отношений совершенного порядка

Теорема о декомпозициях для нечеткого отношения совершенного порядка. Пусть $\tilde{R}$ есть нечеткое отношение совершенного порядка в E × E. Отношение $\tilde{R}$ можно разложить в виде

$$\tilde{R} = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot R_\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \qquad (12.79)$$

при $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$,

где R_α — отношение порядка в смысле теории обычных множеств и $\alpha \cdot R_\alpha$ обозначает произведение всех элементов R_α на величину α.

Доказательство. Рефлексивность и транзитивность R_α доказывется так же, как в (12.75). Покажем, что свойство совершенной антисимметрии также выполняется.

Чтобы показать, что R_α антисимметрично, сначала заметим, что поскольку $\tilde{R}$ рефлексивно, то определение

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) > 0 \Longrightarrow \mu_{\tilde{R}}\,(y, x) = 0$$

можно заменить

$$(\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) > 0 \text{ и } \mu_{\tilde{R}}\,(y, x) > 0) \Longrightarrow (x=y).$$

Антисимметричность будем доказывать методом от противного. Предположим, что $(x, y) \in R_\alpha$ и $(y, x) \in R_\alpha$. Тогда $\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) \geq \alpha$ и $\mu_{\tilde{R}}\ (y, x) \geq \alpha$ и в силу антисимметрии $\tilde{R}:\ x = y$. Теперь, наоборот, предположим, что $\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) = \alpha > 0$ и $\mu_{\tilde{R}}\ (y, x) = \beta \geq 0$. Положим $\gamma = \alpha \geq \beta$. Тогда $(x, y) \in R_\gamma$ и $(y, x) \in R_\gamma$ и из антисимметрии R_γ следует, что $x=y$. Значит, что при сделанном предположении невозможно получить $x \neq y$.

Пример 1. На рис. 12.66 представленна декомпозиция нечеткого отношение совершенного порядка.

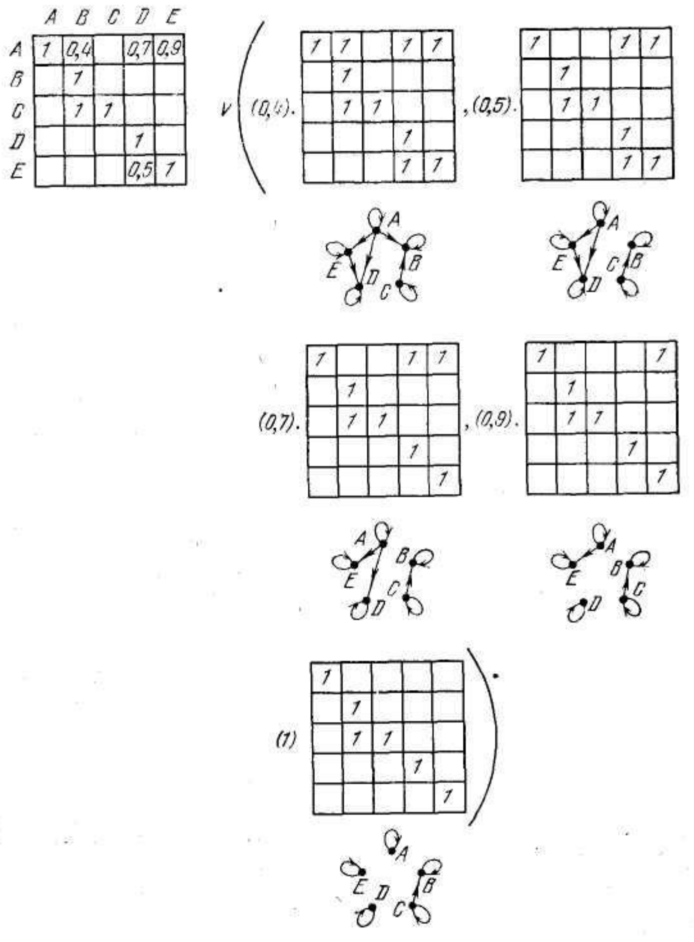


Рис. 12.66.

Для большей наглядности результатов мы опустили нули. Под каждым R_α расположили эскиз обычного антисимметричного графа.

Пример 2. На рис. 12.67 показано, как происходит синтез отношения совершенного порядка.

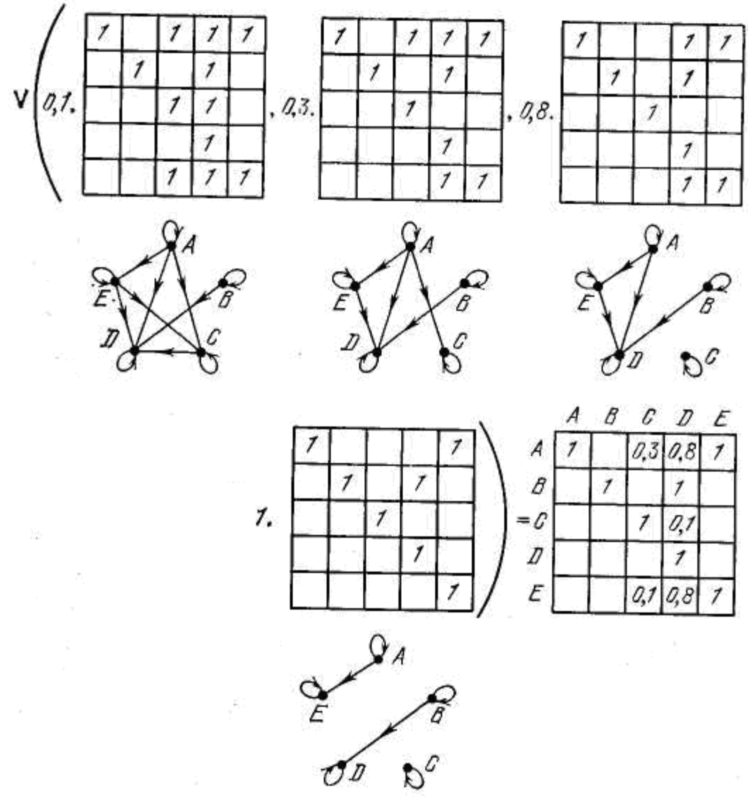


Рис. 12.67.

Расширение декомпозиционного свойства на случай приводимого предпорядка, классы подобия которого совершенно упорядочены.

Свойства (12.75) и (12.79) совпадают всегда, когда рассматривается приводимий предпорядок, классы подобия которого устанавливают совершенный порядок.

Пример. На рис. 12.68 приводится пример такой декомпозиции.

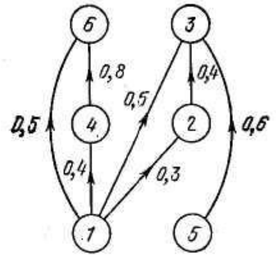
		1			2	3		4	5		6
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A	1	0,2	0,6	0,3	0,5	0,5	0,4			0,5
	B	0,2	1	0,2	0,3	0,5	0,5	0,4			0,5
	C	0,6	0,2	1	0,3	0,5	0,5	0,4			0,5
2	D				1	0,4	0,4				
3	E					1	0,4				
	F					0,4	1				
4	G							1			0,8
5	H					0,6	0,6		1	0,8	
	I					0,6	0,6		0,8	1	
6	J										1

= V (

(0,2).

1	1	1	1	1	1	1			1
1	1	1	1	1	1	1			1
1	1	1	1	1	1	1			1
			1	1	1				
				1	1				
				1	1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,



(0,3).

1		1	1	1	1	1			1
	1		1	1	1	1			1
1		1	1	1	1	1			1
			1	1	1				
				1	1				
				1	1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,

(0,4).

1		1		1	1	1			1
	1			1	1	1			1
1		1		1	1	1			1
			1	1	1				
				1	1				
				1	1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,

(0,5).

1		1		1	1				1
	1			1	1				1
1		1		1	1				1
			1						
				1					
					1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,

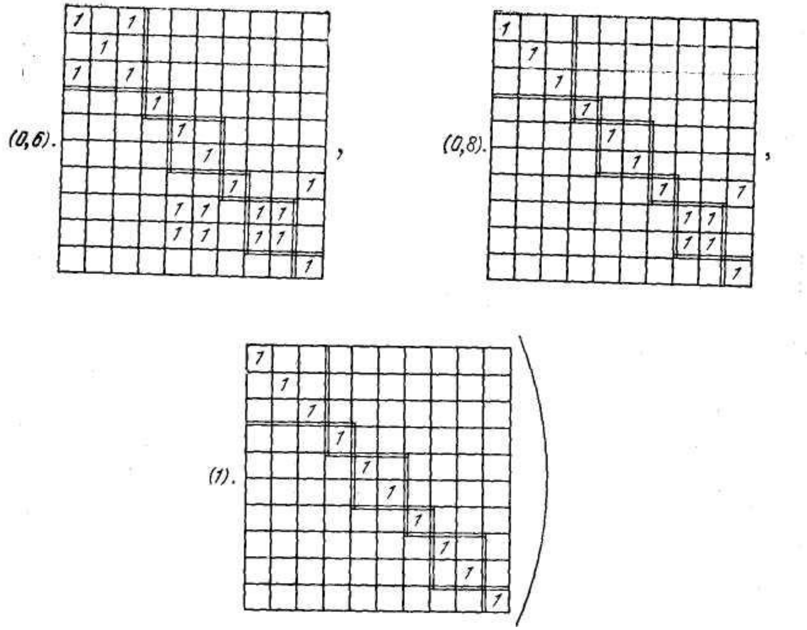


Рис. 12.68.

На рисунке для большей наглядности опущены нули. С другой стороны, выделены числовые элементы и классы подобия, свойства которых легко определить.

Пример синтеза см. на рис. 12.69.

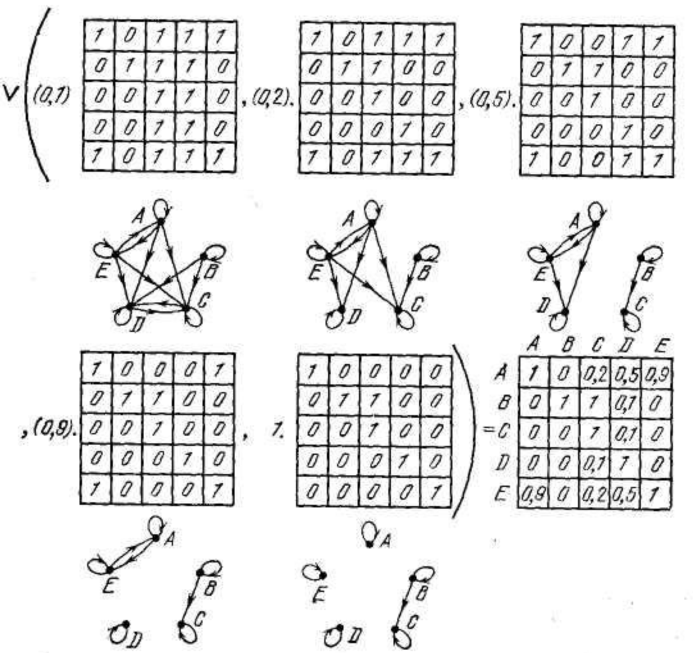


Рис. 12.69.

На рис. 12.70 показанная блочно-треугольгая форма предпорядка.

$\tilde{R}$	A	E	B	C	D
A	1	0,9	0	0,2	0,5
E	0,9	1	0	0,2	0,5
B	0	0	1	1	0,1
C	0	0	0	1	0,1
D	0	0	0	0,1	1

Рис. 12.70.

Подведем итог, составив табл. 12.2, отражающую все случаи, соответствующие теме этого раздела.

Таблица 12.2

Свойства основных нечетких отношений

Отношения	Свойства						
	Рефлексивность	Антирефлексивность	(max-min)-транзитивность	(min - max)-транзитивность	Симметричность	Антисимметричность	Сответствующий граф не имеет контуров, кроме петель
Предпорядок	+		+				
Подобие	+		+		+		
Различие		+		+	+		
Сходство	+				+		
Неходство		+			+		
Порядковое	+					+	+
Нестрогий порядок	+		+			+	+
Строгий порядок		+	+			+	+

Литература

1. Мануэль Кастельс. Информационная эпоха: экономика, общество и культура. М., 2000.

2. Юзвишин И.И. Основы информациологии. М., 2001.

3.Энциклопедия информациологии / Под ред. А.М. Прохорова. М., 2000.

4. Абдеев Р.Ф. Философия информационной цивилизации. М., 1994;

5. Столяров Ю.Н. Сущность информации. М., 2000.

6. Энциклопедия информациологии / Под ред. А.М. Прохорова. М., 2000.

7. Зубов Ю.С., Сляднева Н.А. Человек в пространстве и времени: информационный аспект проблемы // Информационная культура личности: прошлое, настоящее, будущее. Краснодар, 1996.

8. Калина Н.М. Информатизация как социокультурный процес: Некоторые аспекты анализа. Казань, 1993.

9. Уханов В.А. Информационная деятельность человека: Социально-философский анализ. Екатеринбург, 1998.

10. Моль А. Социодинамика культуры. М., 1973.

11. Ковальченко И.Д. Исторический источ-ник в свете учения об информации / История СССР. 1982.

12. Бовыкин В.И. Проблемы изучения исторической информации (К вопросу об информационном источниковедении) // Информационный бюллетень Ассоциации "История и компьютер". Март 1998 г. М., 1998.

13. Бовыкин В.И. К вопросу о закономерностях фиксирования исторической информатики в письменных источниках // Круг идей: историческая информатика на по-роге XXI века. М.-Чебоксары, 1999.

14. Алексеев П. В., Панин А. В. Философия. Учебник. – М.: "Проспект", 1997.

15. Астафьев В. И. Организация информационных потоков в биологических системах и фундаментальный принцип распределенной обработки информации Э. В. Евреинова. Н.сб.т. "Информациология распределенной обработки информации". – М.: Международное издательство Информациология, 1998.

16. Бим И. Л. Немецкий язык. Базовый курс. Концепция, программа – М: "Новая школа", 1995.

17. Бим И. Л. Концепция обучения второму иностранному языку (немецкому на базе английского", М: 1997.

18. Диалектическая логика. Ростов-на-Дону. Ростовское книжное издательство, 1966.

19. Евреинов Э. В. Информациология распределенной обработки информации в средах, структурах и биокомпьютерных системах. Н.сб.т. "Информациология распределенной обработки информации". – М.– Международное издательство Информациология, 1995.

20. Искусственный интеллект. Справочное издание. Т. 2. М. 1990.

21. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач. – М.: "Радио и связь", 1990.

22. Коротенков Ю. Г Некоторые свойства производных отношений в математической лингвистике. Деп. в ВИНИТИ в 1988 г .№ 2049-В88.

23. Краткий философский словарь. – М.: "Проспект", 1997.

24 Мамедов Э. Э., Коротенков Ю. Г. Философия информации и системы информационных знаний. – М.: Международное издательство "Информациология", 1999.

25. Маркус С. Теоретико-множественные модели языков М.: "Наука", 1970.

26. Полат Е. С., Моисеева М. В., Петров А. Е. и др. Дистанционное обучение – М.: "ВЛАДОС", 1998.

27. Роберт И. В. Современные информационные технологии в образовании. М.: "Школа-Пресс", 1994.

28. Управление государственной собственностью. Учебник под ред. В. И. Кошкина. М.: "Инфра-М", 1997.

28. Шаповалов В. И. Энтропийный мир. – Волгоград. "Перемена", 1995.

Научно-практическое издание

Кононюк Анатолий Ефимович

Информациология
Общая теория информации

Книга 2

Авторская редакция

Подписано в печать 30.03.2011 г.
Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 16,5. Тираж 300 экз.

Издатель и изготовитель:
Издательство «Освита Украины»
04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40
Свидетельство о внесении в Государственный реестр
издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.
Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992
E-mail: osvita2005@ukr.net, www.rambook.ru